Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1973 г. выпуск II.
УДК.517.946.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Г.Е.Квасова

Рассмотрим задачу

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}), \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=t_0} = u_0(x). \tag{3}$$

Будем предполагать, что $F_{u_{xx}} \geqslant q > 0$, $F(x,0,0,0) = 0$, $F(x, u, u_x, u_{xx})$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция по всем своим аргументам, $u_0(x) \in C_{2+\alpha}$ и выполняются условия согласования:
$u_0(0) = u_0(1) = 0, F(0,0,\eta,\xi) = 0, F(1,0,\eta,\xi) = 0$.

О п р е д е л е н и е. Стационарное решение $V(x)$ задачи /I/-/3/ назовем устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\|u_0(x) - V(x)\|_{C_{2+\alpha}} \leqslant \delta$ вытекает существование решения $u(x,t) \in C_{2+\alpha}(0 \leqslant x \leqslant 1, t > 0)$ этой задачи, причем

$$\|u(x,t) - V(x)\|_{C_{2+\alpha}} \leqslant \varepsilon, \quad \text{для } t \geqslant 0.$$

Укажем критерий устойчивости, а также неустойчивости, стационарных решений задачи /I/-/3/. Так же, как в [I] докажем, что из устойчивости в первом приближении вытекает устойчивость.

Если стационарное решение $V(x)$ рассматриваемой задачи существует, то его можно построить как решение следующей задачи Коши:

$$F(x, V, V_x, V_{xx}) = 0, \tag{4}$$

$$V|_{x=0} = 0, \tag{5}$$

$$V'_x|_{x=0} = \alpha, \tag{6}$$

где вещественные значения α_0, соответствующие стационарному решению $V(x,\alpha_0) = \varphi(x,\alpha_0)$, определяются из уравнения

$$\varphi(1,\alpha_0) = 0. \tag{7}$$

Функция $V(x,\alpha)$ определена и непрерывна при $x \in [0,1]$ в некоторой окрестности α_0 : $\alpha_0 - \varepsilon < \alpha < \alpha_0 + \varepsilon$, причем существуют $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)'_x$, $\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)''_{xx}$.

Рассмотрим задачу:

$$W_t = \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} W_{xx} + \frac{\partial F}{\partial u_x} W_x + \frac{\partial F}{\partial u} W \equiv NW, \tag{8}$$

$$W|_{x=0} = W|_{x=1} = 0 \,, \qquad /9/$$

$$W|_{t=t_0} = W_0(x) \,, \qquad /10/$$

где $\dfrac{\partial F}{\partial u_{xx}}$, $\dfrac{\partial F}{\partial u_x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ - функции (x, V, V_x, V_{xx}), $W = u(x,t) - V(x)$

Функция $W_1 = \dfrac{\partial V}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ является частным решением уравнения

$$NW = 0 \,, \qquad /11/$$

удовлетворяющим краевому условию /9/ при $x = 0$.

Предположим, что $\dfrac{\partial V}{\partial \alpha} \neq 0$ в полуинтервале $(0, 1]$. Пользуясь теоремой Крейна [4], так же, как в [1], можно доказать, что спектр задачи /8/-/9/ лежит в левой полуплоскости. При этом справедлива

Т е о р е м а I. В предположении, что $\dfrac{\partial V}{\partial \alpha} \neq 0$ для $x \in (0, 1]$, стационарное решение $V(x, \alpha)$ задачи /1/-/3/ устойчиво. Если $\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}$ обращается в нуль хотя бы в одной точке промежутка $(0, 1)$, то решение неустойчиво.

Докажем, что из устойчивости в первом приближении, т.е. из отрицательности спектра задачи /8/-/9/, вытекает устойчивость. Без ограничения общности можем считать $V \equiv 0$. Используя указанное предположение, можно установить существование функции $Z(x)$ такой, что $NZ = -\delta$, $Z \geqslant \delta$, $Z \leqslant \tilde{M}$, где $\tilde{M}$ и δ - положительные постоянные.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} u_t &= F_{u_{xx}}(x,0,0,0)u_{xx} + F_{u_x}(x,0,0,0)u_x + F_u(x,0,0,0)u + \\ &+ \frac{1}{2}\Big[F_{u_{xx}u_{xx}}(x,\theta u,\theta u_x,\theta u_{xx})u_{xx}^2 + F_{u_x u_x}(x,\theta u,\theta u_x,\theta u_{xx})u_x^2 + \\ &+ F''_{uu}(\cdot)u^2 + 2\big(F_{u_{xx}u_x}(x,\theta u,\theta u_x,\theta u_{xx})u_{xx}u_x + \\ &+ F_{u_{xx}u}(\cdot)u_{xx}u + F_{u_x u}(\cdot)u_x u\big)\Big], \end{aligned} \qquad /12/$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \,, \qquad /13/$$

$$u|_{t=t_0} = u_0(x) \,. \qquad /14/$$

Введем новую функцию $\omega = \dfrac{u}{Z}$. Получим

$$\omega_t = F_{u_{xx}}(x,0,0,0)\Big\{\omega_{xx} + \frac{1}{Z}(2\omega_x Z_x + \omega Z_{xx}) + \frac{F_{u_x}(x,0,0,0)}{F_{u_{xx}}(x,0,0,0)} \cdot$$

$$\cdot \frac{Z\omega_x + \omega Z_x}{Z} + \frac{F_u(x,0,0,0)}{F_{u_{xx}}(x,0,0,0)}\omega + R(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx})\Big\} \,.$$

Введем обозначение

$$f(x,\omega,\omega_x)=\frac{1}{z}(2\omega_x z_x+\omega z_{xx})+\frac{F_{u_x}(x,0,0,0)}{F_{u_x}(x,0,0,0)}\,\frac{z\omega_x+\omega z_{xx}}{z}+\frac{F_u(\cdot)}{F_{u_{xx}}(\cdot)}\,\omega .$$

Задача /I2/-/I4/ примет вид:

$$\omega_t=F_{u_{xx}}(x,0,0,0)\left\{\omega_{xx}+\frac{\partial f}{\partial\omega_x}\Big|_{\omega=0}\omega_x+\frac{Nz}{z}\omega\right\}+R(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx})F_{u_{xx}}(\cdot) \qquad /I2'/$$

$$\omega|_{x=0}=\omega|_{x=1}=0, \qquad /I3'/$$

$$\omega|_{t=t_0}=\omega_0(x). \qquad /I4'/$$

Для $|\omega|<1$, $|\omega_x|\le 1$, $|\omega_{xx}|\le 1$ имеем

$$|R(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx})|\le K\left\{|\omega|^2+|\omega_x|^2+|\omega_{xx}|^2\right\},$$

где

$$K=\sup_{\substack{|\omega|\le 1,\,|\omega_x|\le 1\\ |\omega_{xx}|\le 1,\,0\le x\le 1}}\left\{\left|F_{u_{xx}u_{xx}}(\cdot)\right|_{\theta_1,\theta_2\theta_3},\left|\dot F_{u_x u_x}(\cdot)\right|_{\theta_1\theta_2\theta_3},\dots\right\}.$$

Положим теперь

$$\tilde R(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx})=\begin{cases}R(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx}), & \text{если } |\omega|\le\frac{\varepsilon_0}{2},\ |\omega|_x\le\frac{\varepsilon_0}{2},\ |\omega_{xx}|\le\frac{\varepsilon_0}{2}\\ R(x,\varepsilon_0,\varepsilon_0,\varepsilon_0), & \text{если } |\omega|>\varepsilon_0,\ |\omega_x|>\varepsilon_0,\ |\omega_{xx}|>\varepsilon_0\end{cases}$$

Для остальных значений аргументов продолжаем $\tilde R$ с сохранением гладкости и таким образом, чтобы $|\tilde R|\le k_1\varepsilon_0^2$, где k_1 - некоторая постоянная.

Покажем, что если $\|\omega_0\|_{C_{2+\alpha}}\le\varepsilon_0$ при достаточно малом ε_0 то решение задачи

$$\omega_t=F_{u_{xx}}(x,0,0,0)\left\{\omega_{xx}+\frac{\partial f}{\partial\omega_x}\Big|_{\omega=0}\omega_x+\frac{Nz}{z}\omega+\tilde R(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx})\right\} \qquad /I2''/$$

$$\omega|_{x=0}=\omega|_{x=1}=0, \qquad /I3''/$$

$$\omega|_{t=t_0}=\omega_0(x) \qquad /I4''/$$

совпадает с искомым решением задачи /I/-/3/. В силу свойств функции $z(x)$ можно применить принцип максимума.

Имея оценку модуля решения, можно доказать разрешимость задачи /I2″/-/I4″/, используя метод из [5] , принцип сжатых отображений и априорные оценки [6] .

Из [6] следует, что для решения задачи /I2″/-/I4″/ справедлива оценка

$$\|\omega\|_{C_{2+\alpha}}\le C\left\{\|\tilde R\|_{C_\alpha}+\|\omega_0\|_{C_{2+\alpha}}\right\}, \qquad /I5/$$

где $C = C(\alpha, \varphi, K, \delta, \tilde{M})$. Для достаточно малого ε_0 из /15/ следует существование решения задачи /1/-/3/, причем $\|u(x,t)\|_{C_{2+\alpha}} \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.

Устойчивость нулевого решения доказана.

Для задачи /1/-/3/ можно доказать устойчивость в одном критическом случае. Действительно, теорема 1 оставляет неисследованными случаи, когда $\frac{\partial V}{\partial \alpha}(1,\alpha) = 0$.

Функция $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ является решением уравнения $NW = 0$, удовлетворяющим условиям /2/, и, следовательно, нуль является собственным числом этой задачи. Справедлива

Т е о р е м а 2. Стационарное решение $V(x, \alpha_0^k)$ задачи /1/-/3/ такое, что $\frac{\partial V}{\partial \alpha}(x, \alpha_0^k) \neq 0$ для $x \in (0,1)$, устойчиво, если $V(1,\alpha_0^k) = 0$, $\frac{\partial V}{\partial \alpha}(1, \alpha_0^k) = 0$ и существует постоянная $\rho_1 > 0$ такая, что $\frac{\partial V}{\partial \alpha}(1,\alpha) < 0$ для $\alpha \in [\alpha_0^k - \rho_1, \alpha_0^k)$ и $\alpha \in (\alpha_0^k, \alpha_0^k + \rho_1]$.

Полученные результаты применимы к уравнениям, возникающим в химической технологии.

Поступила в ред.-изд.отдел
13 марта 1972 г.

Л и т е р а т у р а

1. Т.И.Зеленяк. Дифференциальные уравнения, 1968, т.IУ, № 1.

2. Т.И.Зеленяк. Дифференциальные уравнения, 1967, т.Ш. № 1.

3. Т.И.Зеленяк. ДАН СССР, 1966, 171, № 2,266-268.

4. Ф.Р.Гантмахер и М.Т.Крейн. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем

5. А.Фридман, Уравнения с частными производными параболического типа, Мир, 1968.

6. С.Н.Кружков. Труды Московского математического общества, т.16, 1967.

7. Ю.С.Колесов. Известия АН СССР, серия матем., 1969, 33, 1356-1372.