Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1973 г. выпуск II.
УДК.517.946.

О ПОВЕДЕНИИ ПРИ БОЛЬШОМ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Г.Е.Квасова

Рассмотрим задачу:

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}), \qquad /1/$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \qquad /2/$$

$$u|_{t=t_0} = u_0(x). \qquad /3/$$

Будем предполагать, что функции $F(x, u, u_x, u_{xx})$ четыре раза, $u_0(x)$ - трижды непрерывно дифференцируемы. Пусть существует классическое решение задачи /1/-/3/ и определена u_{xxx} .

Т е о р е м а. Пусть $u(x,t)$ - решение задачи /1/-/3/, удовлетворяющее условию $\|u(x,t)\|_{C_{2+\alpha}} \leq K$, где K - постоянная, не зависящая от t . Тогда существует стационарное решение $V(x)$ такое, что

$$\|u(x,t) - V(x)\|_{C_{2+\beta}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как в [I], можно доказать, что существуют функции $\rho(x,\xi,\eta,\zeta)>0, \rho_1(x,\xi,\eta,\zeta)>0, \Phi(x,\xi,\eta,\zeta)$, определенные для $|\xi| \leq K$, $|\eta| \leq K, |\zeta| \leq K, 0 \leq x \leq 1$, такие, что для любого решения $u(x,t)$ задачи /1/-/3/, обладающего непрерывными производными $u_x, u_{xx}, u_{xxx}; u_{xxt} \in L_2$ и удовлетворяющего условиям теоремы, выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \Phi(x, u, u_x, u_{xx})dx = \int_0^1 (\rho u_t^2 + \rho_1 u_{xt}^2)dx. \qquad /4/$$

Из /4/ следует существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 \Phi(x, u, u_x, u_{xx})dx = B. \qquad /5/$$

Так как $u(x,t)$ ограничена в $C_{2+\alpha}(0,1)$, то для любой последовательности $t_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$ найдется подпоследовательность t_{i_k} такая, что

$$u(x, t_{i_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{C_{2+\beta}} \omega(x), \quad \omega(x) \in C_{2+\alpha}, \beta < \alpha.$$

Рассмотрим задачу

$$V_t(x,t) = F(x, v, v_x, v_{xx}), \qquad /1'/$$

$$v(x,t)\big|_{x=0} = v(x,t)\big|_{x=1} = 0, \qquad /2'/$$

$$v(x,t)\big|_{t=0} = \omega(x). \qquad /3'/$$

Существование решения задачи /1 / - /3 / на каждом конечном интервале времени можно доказать, используя метод из [2] и априорные оценки из [3] - [5].

В силу непрерывной зависимости решения от начальных данных и наших предположений о $F(x,u,u_x,u_{xx})$ и $u_0(x)$,

$$u(x, t_{i_k}+t) \xrightarrow[k\to\infty]{} v(x,t)$$

при каждом фиксированном t ; заметим, что

$$\int_0^1 \Phi(x, v, v_x, v_{xx})dx = B, \text{ т.е. } \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Это значит, что каждый частичный предел $u(x,t)$ является стационарным решением. Докажем, что все частичные пределы совпадают.

Каждый частичный предел функции $u(x,t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$F(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx}) = 0,$$

$$\omega\big|_{x=0} = 0, \quad \omega'_x\big|_{x=0} = \mu,$$

где μ - соответствующий частичный предел функции $u_x(0,t)$. Таким образом, если $u(x,t)$ не имеет определенного предела, то частичные пределы $u(x,t)$ образуют однопараметрическое семейство стационарных решений, причем полагаем $\omega'_x(0,\mu) = \mu$.

Пусть

$$\mu_1 = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, u_x(x,t)\big|_{x=0}, \quad \mu_2 = \underline{\lim_{t\to\infty}}\, u_x(x,t)\big|_{x=0}.$$

Рассмотрим задачу

$$(u-\omega)_t = F_{u_{xx}}(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx})(u-\omega)_{xx} + \\ + F_{u_x}(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx})(u-\omega)_x + F_u(\cdot)(u-\omega) + A(x,u,u_x,u_{xx}) \qquad /6/$$

$$(u-\omega)\big|_{x=0} = (u-\omega)\big|_{x=1} = 0, \qquad /7/$$

$$(u-\omega)\big|_{t=t_0} = u_0(x), \qquad /8/$$

где

$$\left|A(x,u,u_x,u_{xx})\right| \leq \operatorname{Sup}\left\{F''_{u_{xx}u_{xx}}\big|_{\theta_1,\theta_2,\theta_3}, F_{u_{xx}u_x}\big|_{\theta_1,\theta_2,\theta_3}, \dots\right\} \times$$

$$\times \sup\left[(u-\omega)_{xx}^2+(u-\omega)_x^2+(u-\omega)^2\right] \le N(t)\|u-\omega\|_{C_2},$$
$$N(t)\longrightarrow 0 \qquad \text{при } t\longrightarrow\infty .$$

В этой формуле $\omega(x,\mu)$ рассматривается при $\mu(t)$ таком, что

$$\inf_{\mu}\|u(x,t)-\omega(x,\mu)\|_{\mathcal{L}_2}=\inf_{\mu}\theta(\mu,t)$$

достигается в точке $\mu(t)$. Если $\mu_2<\mu(t)<\mu_1$, то, пользуясь леммами 2 и 3 из [I], получаем неравенство

$$\|u-\omega\|_{W_2^3}\le C\left\{N(t)\|u-\omega\|_{W_2^3}+\|u_t\|_{W_2^1}\right\},$$

где C зависит от $\sup\left\{F_{u_{xx}u_{xx}},\ F_{u_{xx}u_x},\ldots,\right.$

$$\left.\ldots,F_{u_{xx}u},\ F_{u_{xx}u_{xxx}},\ F_{u_{xx}u_xu},\ldots,F_{uu_xu},\ldots\right\},$$

наименьшего по модулю ненулевого собственного числа задачи

$$Nu\equiv u_{xx}+\left.\frac{F_{u_x}}{F_{u_{xx}}}\right|_{u=\omega}\cdot u_x+\left.\frac{F_u}{F_{u_{xx}}}\right|_{u=\omega}\cdot u=\lambda u, \qquad /9/$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=1}=0, \qquad /10/$$

и может быть выбрана одной и той же для всех $\mu_2<\mu<\mu_1$. Обозначим через Π множество таких t, для которых $\mu_2<\mu(t)<\mu_1$. Для $t\in\Pi$ и достаточно больших

$$\|u-\omega\|_{W_2^3}\le K_1\|u_t\|_{W_2^1}, \qquad /11/$$

где K_1 - некоторая константа.

Далее,

$$\left|\int_0^1\left(\Phi(x,u,u_x,u_{xx})-\Phi(x,\omega,\omega_x,\omega_{xx})\right)dx\right|\le A\|u-\omega\|_{W_2^2(0,1)} \qquad /12/$$

с некоторой константой A, не зависящей от ω.

Из /12/, используя /11/, для $t\in\Pi$ и выбранного μ, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[B-\int_0^1\Phi dx\right]\le-\frac{\rho_0}{AK_1}\int_0^1\left[B-\Phi\right]dx, \qquad /13/$$

где $\rho_0=\min\{\rho,\rho_1\}$. Пусть теперь $u(x,t_i)\longrightarrow\omega(x,\mu_0)$, где

$$\mu_2<\mu_0<\mu_1,\ \|\omega(x,\mu_0)-\omega(x,\mu_k)\|_{\mathcal{L}_2}\ge\delta,\ k=1,2.$$

Выберем i настолько большим, чтобы для всех $t\ge t_i$

$$\sqrt{\left[B-\int_0^1\Phi dx\right]}\le\frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}\ \frac{\delta\sqrt{\rho_0}}{16K},\ \|u(x,t_i)-\omega(x,\mu_0)\|_{\mathcal{L}_2}\le\frac{\delta}{8}.$$

Положим

$$\bar{t}=\inf_{t\geq t_i}\left\{t, \|u(x,t)-\omega(x,\mu_k)\|_{\mathcal{L}_2}\leq\|u(x,t)-\omega(x,\mu_0)\|_{\mathcal{L}_2}\right.$$

хотя бы для одного $\left.k\right\}$.

На промежутке $t_i\bar{t}$ выполняется неравенство /13/, т.е.

$$B-\int_0^1\Phi dx=\int_t^\infty dt\int_0^1(\rho u_t^2+\rho_1 u_{xt}^2)dx\leq\left[B-\int_0^1\Phi dx\right]_{t=t_i}e^{-\frac{\rho_0}{AK_1}(\bar{t}-t_i)}.$$

Проводя выкладки, аналогичные доказательству леммы 4 из [1], получаем для $t_i<t<\bar{t}$

$$\int_0^1|u(x,t)-u(x,\tau)|dx\leq\sqrt{\left[B-\int_0^1\Phi dx\right]_{t=t_i}}\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\,e^{-\frac{1}{AK_1}\frac{\bar{t}-t_i}{2}} \qquad /14/$$

и окончательно

$$\int_0^1|u(x,t)-u(x,t_i)|^2dx\leq 2K\int_0^1|u(x,t)-u(x,t_i)|dx\leq\frac{\delta}{8}. \qquad /15/$$

Если $\bar{t}$ конечно, то из /15/ следует

$$\|u(x,\bar{t})-\omega(x,\mu_0)\|_{\mathcal{L}_2}\leq\frac{\delta}{4},$$

$$\|u(x,\bar{t})-\omega(x,\mu_k)\|_{\mathcal{L}_2}\geq\frac{3}{4}\delta.$$

В силу выбора $\bar{t}$,

$$\|u(x,\bar{t})-\omega(x,\mu_k)\|_{\mathcal{L}_2(0,1)}\leq\|u(x,\bar{t})-\omega(x,\mu_k)\|_{\mathcal{L}_2}.$$

Мы получили противоречие. Следовательно, $\bar{t}=\infty$. Значит, /15/ верно для всех $t>t_i$, что и доказывает теорему.

Из доказанной теоремы следует асимптотическая устойчивость по Ляпунову стационарных решений, удовлетворяющих условиям теоремы об устойчивости работы [6].

Автор благодарен своему научному руководителю Т.И.Зеленяку за руководство при выполнении данной работы.

Поступила в ред.-изд.отдел
20 мая 1972 г.

Литература

1. Т.И.Зеленяк. Дифференциальные уравнения, № 1, 1968.

2. А.Фридман. Уравнения с частными производными параболического типа, Мир, 1968.

3. Л.И.Камынин, В.Н.Масленникова, СМЖ, 1966, т.VII,№1,83-128.

4. С.Н.Кружков. ДАН СССР, 1966, 170, № 3, 501-504.

5. В.А.Солонников.Моск.матем.общества им. В.А.Стеклова АН СССР, 1965, т. LXXXIII.

6. Г.Е.Квасова. Управляемые системы, Новосибирск, 1972,вып.10.