Управляемые системы, ИМ,ИК.СО АН СССР 1973 г. выпуск II.
УДК.519.1

# ОБ ОДНОЙ АЛГОРИТМИЧЕСКИ НЕРАЗРЕШИМОЙ МАССОВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГРАФОВ

В.К.Вулитко

Мы рассматриваем только неориентированные графы без петель и кратных ребер /1/.

Пусть $\mathcal{L}$ – конечное множество конечных графов. Граф, окружение каждой вершины которого изоморфно некоторому элементу $\mathcal{L}$, называем $T$ -графом для $\mathcal{L}$, обозначая $T\langle\mathcal{L}\rangle$.

Рассмотрим следующие массовые задачи /1,2,3/:

/1/ по произвольному конечному графу $M$ установить, существует ли $T\langle\{M\}\rangle$;

/2/ по произвольному конечному множеству $\mathcal{L}$ конечных графов определить, существует ли конечный $T\langle\mathcal{L}\rangle$.

В статье доказывается алгоритмическая неразрешимость этих задач.

Мы предполагаем знакомство читателя с работой /4/. По определению, пара $(Q,P)$, где $P$ – произвольное конечное множество типов домино и $Q\subseteq P$, разрешима на плоскости, если существует покрытие плоскости посредством домино, типы которых принадлежат $P$ и в покрытии участвует домино, тип которого принадлежит $Q$. /Мы всюду имеем в виду условия, указанные в /4/: при составлении покрытия домино не поворачиваются и не отражаются, т.е. можно использовать только параллельный перенос./

Т е о р е м а 1 /4/. Не существует алгоритма, устанавливающего по произвольной паре множеств типов домино $(Q,P)$ и $Q\subseteq P$, разрешима ли она на плоскости.

Мы говорим, что конечное множество $P$ типов домино сильно разрешимо на плоскости, если для всякого $d\in P$ пара $(\{d\},P)$ разрешима на плоскости.

Из теоремы 1 следует, что нет алгоритма, узнающего по произвольному конечному множеству $P$ типов домино, сильно разрешимо ли оно на плоскости. Действительно, пусть имеется такой алгоритм. Для произвольной пары $(Q,P)$, $Q\subseteq P$, применим его к каждому множеству $H$ такому, что $Q\cap H\neq\emptyset$, $H\subseteq P$. Некоторое такое $H$ сильно разрешимо на плоскости, очевидно, тогда и только тогда, когда $(Q,P)$ разрешимо на плоскости.

Теперь мы по произвольному конечному множеству $P$ типов домино построим конечный граф $M(P)$. Как обычно, $V(G)$ и $U(G)$ – обозначения для множества вершин и множества ребер графа $G$, соответственно. Если $A$ – конечное множество, то $|A|$ есть количество его элементов.

Занумеруем взаимно-однозначно все различные цвета, встречающиеся на ребрах элементов $P$ натуральными числами $2,\dots,S$ где $S-1$ равно количеству различных цветов, встречающихся на ребрах элементов $P$.

Пусть $d_i \in P$ и $i_1, i_3$ - номера цветов его горизонтальных ребер, $i_2, i_4$ - номера цветов его вертикальных ребер. Построим граф $\bar{M}(d_i)$, который будет в дальнейшем моделью типа домино $d_i$.

Для $k$ -го ребра $d_i$, $k=1,\dots,4$, построим простую цепь $L_k(d_i)$ такую, что:

$$|v(L_k(d_i))| = \begin{cases} 4+2i_k & ,\text{если } k \text{ четно,} \\ 5+2i_k & ,\text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Причем выполняются следующие условия:

$$v(L_1(d_i)) \cap v(L_3(d_i)) = v(L_2(d_i)) \cap v(L_4(d_i)) = \phi;$$

при $k \in \{1,2,3,4\}$ имеем: $v(L_k(d_i)) \cap v(L_{k+1}(d_i)) = a_k$, полагая $L_5(d_i) = L_1(d_i)$; если $a_j \in V(L_k(d_i))$, то $a_j$ является концом цепи $L_k(d_i)$ и $\{j,k\} \subseteq \{1,2,3,4\}$.

Пусть $f_k \in V(L_k(d_i))$, причем в $L_k(d_i)$ $f_k$ находится на расстоянии 3 от $a_{k-1}$, если $k \in \{2,3\}$, а если $k \in \{1,4\}$, то на расстоянии 3 от $a_k$.

Для любого $k$, $k \in \{1,\dots,4\}$, определим граф $\bar{L}_k(d_i)$, который в дальнейшем является моделью $k$ -го ребра $d_i$:

$$v(\bar{L}_k(d_i)) = v(L_k(d_i)),$$

$$u(\bar{L}_k(d_i)) = \begin{cases} u(L_k(d_i)) \cup \{f_k a_k\}, & \text{если } k \in \{1,4\}, \\ u(L_k(d_i)) \cup \{f_k a_{k-1}\}, & \text{если } k \in \{2,3\}. \end{cases}$$

Введем множество $\{c_1,\dots,c_4\}$, предполагая, что $\{c_1,\dots c_4\} \cap (\bigcup_{k=1}^{4} v(L_k(d_i))) = \phi$. Теперь мы можем указать граф $\bar{M}(d_i)$:

$$v(\bar{M}(d_i)) = (\bigcup_{k=1}^{4} v(\bar{L}_k(d_i))) \cup \{c_1,\dots,c_4\},$$

$$u(\bar{M}(d_i)) = (\bigcup_{k=1}^{4} u(\bar{L}_k(d_i))) \cup \bigcup_{j=1}^{4} \{xc_j \mid x \in v(\bar{L}_j(d_i))\}$$

/рис. 1/. При изоморфизме $\bar{M}(d_i)$ на граф $L$ образы в $L$ вершин $a_k$ называем вершинами типа $A$, образы вершин $c_k$ - вершинами типа $C$, образы вершин $f_k$ - вершинами типа $F$, $k=1,\dots,4$, а образы остальных вершин $\bar{M}(d_i)$ - вершинами типа $B$.

Построим еще графы $M_A$, $M_B$, $M_F$, как показано на рис. 2, предполагается, что $V(M_A), V(M_B), V(M_F)$ попарно не пересекаются.

Моделью всего множества $P$ служит граф $M(P)$:

$$M(P) = (\bigcup_{i=1}^{n} M(d_i)) \cup M_A \cup M_B \cup \underline{M}_F,$$

где предполагается, что $M(d_i)$ изоморфно $\bar{M}(d_i)$, построенному выше, для любого $d_i \in P$, $n = |P|$, и для любых целых $i$, $j$, если $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и $i \neq j$, то множества $V(M(d_i)), V(M(d_j)), V(M_A), V(M_B), V(M_F)$, попарно не пересекаются.

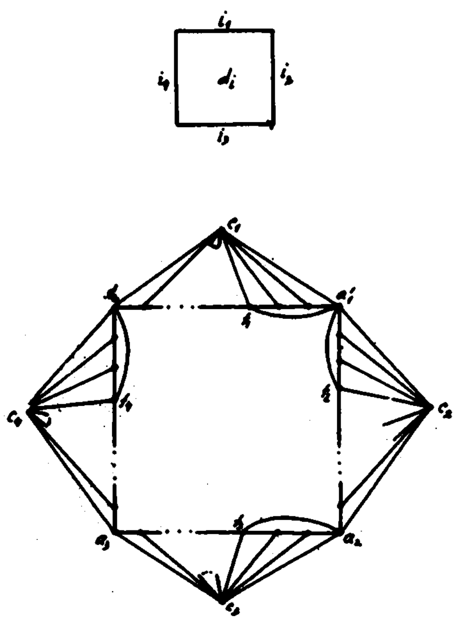


Рис. 1. Граф $M(d_i)$.

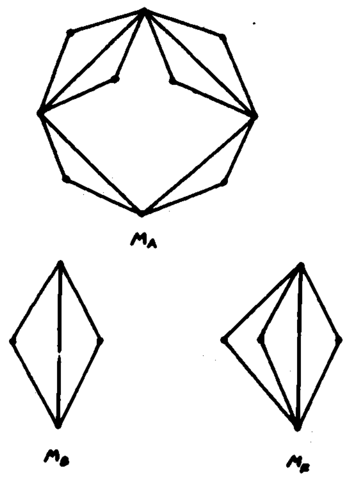



Рис. 2. Графы $M_A, M_B, M_Г$.

Л е м м а I. Множество $P$ сильно разрешимо на плоскости, если существует некоторый $T<\{M(P)\}>$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любого $d_j \in P$ во всяком $T$ - графе для $\{M(P)\}$ найдется такой подграф, по структуре которого непосредственно строится покрытие, включающее домино типа $d_j$ .

Пусть $c_j$ - произвольная вершина $T<\{M(P)\}>$. Рассмотрим подграф $\bar{M}(d_j, c_j)$ графа $T<\{M(P)\}>$, порожденный вершиной $c_j$ и вершинами компоненты связности окружения $c_j$ в $T<\{M(P)\}>$, изоморфной $M(d_j)$ /рис. 3/. Индекс $j$ в обозначении выбранной вершины графа $T<\{M(P)\}>$ взят, чтобы подчеркнуть, что мы отправляемся от компоненты связности окружения этой вершины, изоморфной $M(d_j)$. Аналогичные соображения играют роль при выборе обозначений и далее. Кроме того, обозначения вершин, выбираемые по мере надобности ниже, никак не связаны с обозначениями, использованными ранее при построении $\bar{M}(d_i)$ , если не считать того, что вершины типа $A$ , например, в графах, изоморфных $M(d_q)$ , при соответствующих $q$ обозначаются малой буквой $a$ с индексами и т.п. Обозначения поясняются рисунками

Мы будем выявлять, начиная с $\bar{M}(d_j, c_j)$ , подграф $T<\{M(P)\}>$, в котором каждая компонента связности окружения каждой вершины изоморфна некоторой компоненте связности $M(P)$ . Подграф следующего шага рассмотрения будем называть "достроением" предыдущего, а окружение любой вершины достроения, принадлежащей подграфам предыдущих шагов рассмотрения, - достроением окружения этой вершины в подграфах предыдущих шагов рассмотрения.

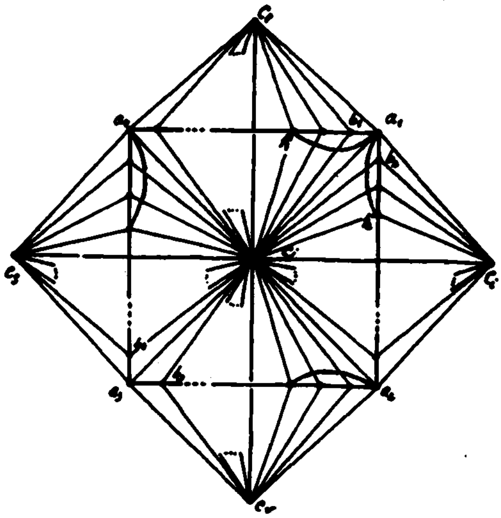


Рис. 3. Граф $\bar{M}(d_j, c_j)$.

Через $O(x)$ обозначим окружение вершины $x$ в графе данного шага рассмотрения; если $O(x)$ изоморфно $M(d_i)$ или $M_A$, $M_B$, $M_F$, то мы пишем вместо $O(x)$ соответственно $M(d_i, x)$, $M_A(x)$, $M_B(x)$, $M_F(x)$.

Для любых $d_s$ и $d_k$ из $P$, если $s \neq k$, то никакие надграфы графов $M(d_s)$ и $M_A$ не изоморфны никаким подграфам $M(d_k)$. Мы будем опираться далее на это непосредственно проверяемое утверждение.

Рассмотрим вершину $a_1$ типа $A$ в $\bar{M}(d_j, c_j)$ /Рис.3/. В выбранных обозначениях для вершин имеем:

$$V(O(a_1)) = \{c_p, c_j, c_i, f_1, f_2, b_1, b_2\},$$

$$u(O(a_1)) = \{c_pc_j, c_jc_i, c_pf_1, c_pb_1, c_jb_1, c_jf_1, c_jb_2, c_jf_2, c_ib_2, c_if_2\}.$$

Это окружение должно быть достроено либо до $M_A(a_1)$, либо до $M(d_m, a_1)$ при подходящем $m$, $d_m \in P$, так как $O(a_1)$ не изоморфно никакому подграфу $M_F \cup M_B$.

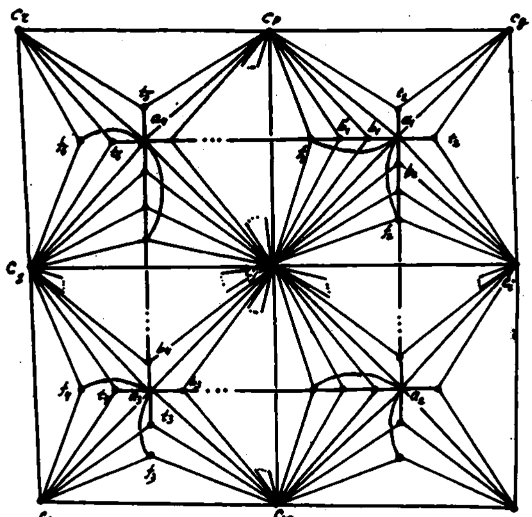
Пусть достроение идет до $M(d_m, a_1)$. Так как степень $c_j$ в $O(a_1)$ равна 6, то возможны всего два случая.

<u>Случай I</u>. В $M(d_m, a_1)$ вершина $c_j$ имеет тип $A$. Легко видеть, что $c_p$ является в нем вершиной типа $C$, и найдется вершина $x$ такая что $\{f_1x, c_px, b_1x, xa_1\} \subseteq u(T\langle\{M(P)\}\rangle)$, $b_1' \neq x$

Достаточно теперь выписать $O(c_p)$, чтобы убедиться в том, что $O(c_p)$ не изоморфно никакому подграфу $M(P)$.

<u>Случай 2.</u> В $M(d_m, a_1)$ вершина $c_j$ имеет тип $C$. Так как окружение вершины типа $C$ в модели домино связно, то в рассматриваемом достроении появится либо ребро, инцидентное какой-либо вершине из $\{c_p, f_1, b_1\}$ и какой-либо вершине множества $\{c_i, f_2, b_2\}$ либо новая вершина, смежная $c_j$ и $a_1$. В любом варианте новое $O(c_j)$ не изоморфно никакому подграфу $M(P)$.

Итак, достроение $O(a_1)$ в $\bar{M}(d_j, c_j)$ идет до $M_A(a_1)$. Пусть $V(M_A(a_1)) = \{c_p, f_1, b_1, c_j, b_2, f_2, c_i, t_1, t_2, c_g\}$, /рис. 4/. Легко видеть, что окружение $c_i$ в $\bar{M}(d_j, c_j)$ может быть достроено только до графа-модели некоторого домино, которое обозначим $d_i$. В $M(d_i, c_i)$ вершина $c_g$ имеет тип $C$, а $t_2$ - тип $B$. В самом деле, если $t_2$ имеет тип $C$ в $M(d_i, c_i)$, то в дальнейшем, при достроении окружения $t_2$ в $M(d_i, c_i)$ до $M(d_k, t_2)$ при подходящем $k$, придется ввести вершину $x$, $x \notin \{c_p, f_1, b_1, c_j, b_2, f_2, c_i, t_2, c_g, t_1, a_1\}$, и ребра $a_1 x$, $t_2 x$. При этом $M_A(a_1)$ достроится до собственного связного надграфа, который, таким образом, неизоморфен никакому подграфу $M(P)$. Противоречие.



| | | |
|---|---|---|
| $d_t$ | $d_p$ | $d_g$ |
| $d_s$ | $d_j$ | $d_i$ |
| $d_e$ | $d_v$ | $d_k$ |

Рис. 4.

Аналогично в $M(d_p, c_p)$ вершина $c_q$ имеет тип $C$, а $t_1$ - тип $B$.

Вернемся к $\bar{M}(d_j, c_j)$ и рассмотрим другую вершину типа $A$ в $M(d_j, c_j)$ - $a_3$.

$$v(O(a_3)) = \{c_s, c_j, c_v, b_3, b_4\},$$

$$u(O(a_3)) = \{c_s c_j,\ c_j c_v,\ c_s b_4,\ c_j, b_4,\ c_j b_3,\ b_3 c_v\},$$

/см. рис. 3/.

Как и для $a_1$, показываем, что достроение $O(a_3)$ идет до $M_A(a_3)$ /см.рис.4/, причем в рассмотрении альтернативной возможности анализируются аналогичные случаи I и 2. Точно так же доказывается, что в $O(c_s)$ /в $O(c_v)$ /при достроении до графа,изоморфного графу-модели некоторого домино из $D$, $c_c$ играет роль вершины типа $C$, а, следовательно, вершины $f_4$, $t_4$ /вершины $f_3$, $t_3$ / имеют типы $F$ и $B$ соответственно, так как в $T\langle\{M(P)\}\rangle$ они не смежны.

Случаи, возникающие при рассмотрении вершин $a_4$ и $a_2$ /см. рис. 3,4/, аналогичны и получаются комбинацией использованных способов рассмотрения.

Теперь ясно, что подграф $T\langle\{M(P)\}\rangle$, порожденный вершинами, общими подграфам $M(d_j, c_j)$ и $M(d_i, c_i)$, изоморфен, с одной стороны, графу $\bar{L}_i(d_j)$, с другой - графу $\bar{L}_s(d_i)$, причем $s = 4$. В самом деле, четность числа $|v(\bar{L}_s(d_i))|$ исключает возможности: $s = 1$, $s = 3$. Если $s = 2$, то из определения $\bar{M}(d_i)$ получаем,что существует вершина $z$, играющая роль вершины типа $F$ в $M(d_i, c_i)$, и поэтому $\{za_1, zc_q, zc_i\} \subseteq u(T\langle\{M(P)\}\rangle)$ и $z \neq t_2$. Но тогда окружение $a_1$ в $T\langle\{M(P)\}\rangle$ содержит собственный связный надграф графа $M_A(a_1)$, и $M_A(a_1)$ изоморфно $M_A$, чего не может быть. Итак, $s = 4$.

Окружение вершины $c_p$ в графе /рис.4/ может быть связно достроено только до граф-модели некоторого домино, которое обозначим $d_p$, то есть достроение пойдет до $M(d_p, c_p)$. Подграф $T\langle\{M(P)\}\rangle$, порожденный вершинами, общими подграфам $M(d_j, c_j)$ и $M(d_p, c_p)$, изоморфен $\bar{L}_1(d_j)$, с одной стороны и $\bar{L}_{s'}(d_p)$ - с другой. В силу нечетности $|v(\bar{L}_1(d_j))|$ $s' = 1$ или $s' = 3$. Если $s' = 1$, то в $M(d_p, c_p)$ найдется вершина $z'$ типа $F$, для которой $\{z'c_p, z'a_1, z'c_q\} \subseteq u(T\langle\{M(P)\}\rangle)$ и $z' \neq t_1$, что невозможно, так как $M_A(d_1)$ не может далее связно надстраиваться. Итак, $s' = 3$.

Таким образом, мы видим, что домино типа $d_j$ может быть правильно /в смысле условий Ван Хао/ состыковано с домино типов $d_p$ и $d_i$. Будем представлять себе домино как квадратный участок /назовем его костью/ плоскости со стороной единичной длины, причем стороны каждой кости окрашены в тот или иной цвет. Допускаем, что имеется достаточный запас таких моделей домино. Кость типа $d_j$ сопоставим графу $M(d_j, c_j)$ и расположим на плоскости. Теперь в соответствии с результатами предыдущего рассмотрения сопоставим графам $M(d_i, c_i)$ и $M(d_p, c_p)$ кости $d_i$ и $d_p$ соответственно и, расположив их на плоскости чтобы они не налегали на $d_j$ и друг на друга, состыкуем с $d_j$ соответствующими сторонами. Напомним, что $d_j$ - произвольный элемент $P$. Каждый подграф графа $M(d_j, c_j)$, который при изоморфизме $M(d_j, c_j)$ на $\bar{M}(d_j)$ отображается на $\bar{L}_k(d_j)$ при подходящем $k$ /и служит моделью $k$ -й стороны соответствующей кости/, принадлежит в выделенном подграфе графа $T\langle\{M(P)\}\rangle$ еще только одному из графов $M(d_i, c_i)$, $M(d_p, c_p)$, $M(d_s, c_s)$, $M(d_v, c_v)$ /см. рис. 4/. Каждая из вершин $a_1, \ldots, a_4$, моделирующих вершины кости, соответствующей $M(d_j, c_j)$, принадлежит еще ровно трем графам вида $M(d_e, c_e)$ /например, $a_1$ принадлежит еще $M(d_p, c_p)$, $M(d_i, c_i)$, $M(d_q, c_q)$ /. Теперь ясно, как построить покрытие плоскости посредством описанного множества костей, начиная с кости типа $d_j$. Таким образом, множество $P$ сильно разрешимо на плоскости, и лемма доказана.

Л е м м а 2. Если множество $P$ типов домино сильно разрешимо на плоскости, то существует $T$ -граф для $\{M(P)\}$.

Мы не будем проводить точную, но громоздкую процедуру индуктивного построения некоторого $T$ -графа для $\{M(P)\}$. существование такого графа легко усмотреть из следующего. По покрытию $S_j$ плоскости, содержащему домино типа $d_j$, можно построить граф $M(S_j)$ - модель покрытия, в котором каждому домино соответствует его модель. Этот граф мы выявляли в $T\langle\{M(P)\}\rangle$, в лемме I, и фрагмент его показан на рис. 4. В $M(S_j)$ окружение каждой вершины изоморфно некоторой компоненте связности графа $M(P)$. Теперь, взяв счетное множество экземпляров $M(S_j)$ для каждого $d_j$, $d_j \in P$, так, чтобы множества вершин этих экземпляров попарно не пересекались, отождествим вершины таким образом, чтобы для любых двух экземпляров графов $M(S_j)$ и $M(S_i)$ только самое большое одна пара вершин $(x, y)$ отождествлялось, причем $x \in v(M(S_j))$, а $y \in v(M(S_i))$. Кроме того, отождествление проводится так, чтобы можно было построить для каждой вершины результирующего графа окружение, изоморфное $M(P)$. Очевидно, это возможно.

Из леммы I и 2 следует

Т е о р е м а 2. Не существует алгоритма, устанавливающего по произвольному конечному графу $M$, существует ли какой-нибудь $T$ - граф для $\{M\}$.

З а м е ч а н и е. В теореме можно ограничиться несвязными, связными, плоскими, однородными и некоторыми другими классами графов.

Перейдем к доказательству алгоритмической неразрешимости массовой задачи /2/, сформулированной в начале статьи. Для этого нам потребуется другая модификация результата, сформулированного в теореме I. Рассмотрим прямоугольный конечный блок, составленный правильным в смысле Ван Хао образом из домино некоторого конечного множества типов. Каждый из четырех краев блока составлен из соответствующих сторон домино. Про эти стороны можно сказать, что они лежат на краю блока. Пусть для каждого края блока все стороны, лежащие на нем, имеют одинаковый цвет и цвета сторон, лежащих на противоположных краях блока, совпадают. Такой блок называем правильным.

Мы говорим, что пара $(\{d\}, P)$ разрешима на торе, если $d \in P$ и можно из домино типов, принадлежащих $P$, начиная с домино типа $d$, составить правильный блок.

По данной машине Тьюринга можно построить множество $P$ типов домино и указать такой элемент $d^0$ из $P$, что начиная с домино типа $d^0$, единственным образом /эта единственность важна для дальнейшего/ строится покрытие плоскости; покрытие содержит правильный блок $B$, включающий домино типа $d^0$, тогда и только тогда, когда данная машина Тьюринга останавливается. Кроме того, $B$ содержит только одно домино типа $d^0$.

Т е о р е м а 3. Не существует алгоритма, распознающего по произвольной паре $(\{d\}, P)$, разрешима ли она на торе.

Метод доказательства подобных утверждений изложен в /4/.

Пусть задана пара $(\{d^0\}, P)$, $d^0 \in P$. $\bar{M}(d_i)$, $d_i \in P$, построен выше для каждого $d_i$ /см. рис. I/ и описан перед леммой I. Мы будем использовать также графы $M_A$, $M_F$, $M_B$ /см. рис. 2/. Кроме них, введем еще несколько графов: $R; G, Q, S, E_1, \ldots, E_8$.

$$V(G) = \{t_1, \ldots, t_{14}\},$$

$$U(G) = \{t_i t_{i+1} / i = 1, \ldots, 13\} \cup \{t_1 t_4, t_1 t_6, t_{14} t_7, t_{14} t_9, t_{14} t_{11}\};$$

$$V(S) = V(G) \cup \{t_{15}\}, \quad t_{15} \notin V(G),$$

$$U(S) = U(G) \cup \{t_{15} t_i \; / \; i = 1, \ldots, 14\}.$$

Графы $S$, $E_1, \ldots, E_8$ определены на рис. 5 и 6. Граф $R$ получается из трех экземпляров графа $S$ и двух экземпляров графа $G$ с попарно не пересекающимися множествами вершин отождествлением некоторых вершин /см. рис. 5/.

Пусть для любого $d_i$, $d_i \in P$, множества $V(\bar{M}(d_i))$, $V(R)$ и $V(S)$ попарно не пересекаются. Пусть еще для любых $k$ и $j$, $k = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 8$, графы $E_j^{(k)}$, $M_A^{(k)}$, $M_F^{(k)}$, $M_B^{(k)}$ изоморфны соответственно графам $E_j$, $M_A$, $M_F$, $M_B$ и множества $V(E_j^{(k)}) \cup V(M_A^{(k)}) \cup V(M_B^{(k)}) \cup V(M_F^{(k)})$, $V(R) \cup V(S)$ и $V(E_j^{(k')}) \cup V(M_A^{(k')}) \cup \cup V(M_B^{(k')}) \cup V(M_F^{(k')})$ попарно не пересекаются при произвольных $k$ и $k'$, если $k \neq k'$.

Рассмотрим конечное множество графов $\mathcal{L}^{m}_{d^0_,P}$ :

$$\mathcal{L}^{m}_{d^0_,P}=\{RUSU\bar{M}(d_i)/d_i\in P\setminus\{d^0\}\}U\{\bar{M}(d^0)US\}U\{RUS\}U\{RUSU UE_{jt}/j\in\{1,\ldots,8\},t\in\{1,\ldots,m\}\}U\{RUSUM_{A,t}/t\in\{1,\ldots,m\}\}U U\{RUSUM_{B,t}/t\in\{1,\ldots,m\}\}U\{RUSUM_{F,t}/t\in\{1,\ldots,m\}\},$$

где $E_{jt}=\bigcup\limits_{k=1}^{t}E_j^{(k)}$, $M_{A,t}=\bigcup\limits_{k=1}^{t}M_A^{(k)}$, $M_{B,t}=\bigcup\limits_{k=1}^{t}M_B^{(k)}$, $M_{F,t}=\bigcup\limits_{k=1}^{t}M_F^{(k)}$, $m\geqslant 1$.

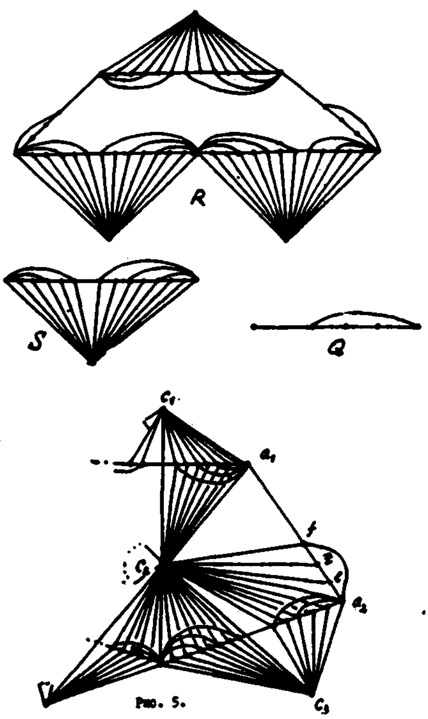



Рис. 5.

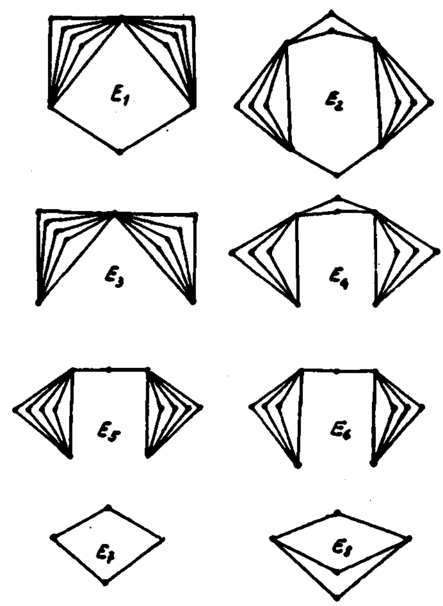



Рис. 6.

Лемма 3. Если существует конечный $T<\mathcal{L}^{m}_{d^0,P}>$ , то пара $(\{d^0\},P)$ разрешима на торе.

Доказательство. План доказательства состоит в следующем. Покажем, что число вершин конечного $T<\mathcal{L}^{m}_{d^0,P}>$ , имеющих в окружении компоненту связности, изоморфную $R$ , меньше числа вершин этого графа, имеющих в окружении компоненту связности, изоморфную $S$ . Отсюда следует по определению $\mathcal{L}^{m}_{d^0,P}$ , что для некоторой вершины $T<\mathcal{L}^{m}_{d^0,P}>$ определенная компонента связности ее окружения изоморфна $\bar{M}(d^0)$ . Затем рассуждениями, аналогичными рассуждениям леммы I, в $T<\mathcal{L}^{m}_{d^0,P}>$ выделяем конечный подграф, по структуре которого на плоскости строится покрытие посредством домино соответствующих типов. В этом покрытии каждая сторона домино принадлежит ровно двум домино, а каждая вершина - ровно четырем. Используя формулу Эйлера, связывающую род поверхности с количеством вершин, граней и ребер в разбиении ее, и учитывая конечность $T\langle\mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$, а также сказанное ранее о выборе $(\{d^{\circ}\}, P)$, получаем, что $(\{d^{\circ}\}, P)$ разрешима на торе.

Допустим, что окружение каждой вершины $T\langle\mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$ имеет компоненту связности, изоморфную $R$. На рис. 5. показан фрагмент такой компоненты связности для произвольной вершины $C_2$. Окружение вершины $a_1$ в подграфе $M(C_2)$ графа $T\langle\mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$, порожденном вершиной $C_2$ и множеством вершин компоненты связности ее окружения, изоморфной графу $R$, может быть достроено / мы используем терминологию из леммы I/ только до графа $E_1$ или $E_5$. Аналогично окружение $a_2$ в том же подграфе нашего $T$ -графа может быть достроено лишь до $E_2$ или $E_4$. Какие бы достроения из указанных ни реализовались, в результате для вершины $f$ в качестве окружения в выявленном подграфе мы получим граф $O(f)$:

$V(O(f))=\{y_1,y_2,a_1,a_2,C_2,z\}$, $u(O(f))=\{a_1y_1, C_2a_1, C_2z, C_2a_2, a_2y_2\}$, причем вершины $y_1$ и $y_2$, возможно совпадают и каждая из них в выявленном подграфе графа $T\langle\mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$ имеет степень 7. С другой стороны, в результате этого достроения степени вершин $a_1$, $a_2$ и $C_2$ в $O(f)$ не могут быть изменены. В графах $E_1,\dots,E_7,M_A,M_F$ степень любой вершины либо равна двум, либо больше трех /в $O(f)$ степень вершины $C_2$ равна 3/. В графах $S$, $\bar{M}(d_i)$, $d_i \in P$, нет вершин степени 2, а в графе $K$ нет вершин, каждая из которых степени 2 и таких, что кратчайшая в $R$ цепь, соединяющая их, имеет длину 2. Если бы $O(f)$ достраивалось до $M_B$, то необходимо отождествлялись бы вершины $z$, $y_1$ и $y_2$, что, очевидно, невозможно. Таким образом, $O(f)$ достраивается до $E_8$: $y_1$ отождествляется с $y_2$ и вводится ребро $zy_1$. Теперь чтобы убедиться в том, что компонента связности окружения $y_1$ в $T\langle\mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$, содержащая $f$, изоморфна $R$, достаточно выписать окружение вершины $y_1$ в графе, построенном на предыдущих шагах, начиная с $M(C_2)$.

Компонента связности /изоморфная $R$ / окружения $y_1$ в $T\langle\mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$ имеет общий подграф /изоморфный $Q$ /см.рис.5// с компонентой связности /изоморфной $R$ / окружения $C_2$. Всякие такие вершины мы будем называть $R$ -соседними. Учитывая изложенное выше, конечность $T\langle\mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$, соображения симметрии, а также единственность компоненты связности, изоморфной $R$ в окружениях вершин $T\langle\mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$, получаем следующее. Каждая вершина $X$, $X\in(T\langle\mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle)$, принадлежит некоторой последовательности $X$, $X_1,\dots,X_n$, $X$ вершин такой, что всякие две соседние в ней вершины являются $R$ -

соседними. Множество элементов этой последовательности назовем $R$ -циклом. $V(T\langle \mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle)$ разбивается на конечное множество $R$ -циклов. $R(x)$ обозначает тот $R$ -цикл, в который попадает $x$.

Пусть вершина $y$ принадлежит компоненте связности /изоморфной $R$ / окружения вершины $x$, и подграф этой компоненты, порожденный вершинами, смежными как с вершиной $x$, так и с вершиной $y$, изоморфен графу $G$. Тогда мы говорим, что вершина $x$ $R$ -смежна вершине $y$. Если еще и вершина $y$ $R$ -смежна вершине $x$, то говорим просто, что $x$ и $y$ $R$ -смежны. Если $x$ $R$ -смежна $y$, но неверно, что $y$ $R$ -смежна $x$, то говорим, что $y$ $S$- смежна $x$. Легко проверить, что если какая-либо $y\in V(T\langle \mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle)$ $S$-смежна некоторой вершине $x\in V(T\langle \mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$, то $x$ $R$-смежна с $y$ и $x$ принадлежит компоненте связности, изоморфной $S$, окружения вершины $y$ в $T\langle \mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$.

Нетрудно доказать следующие утверждения /мы опускаем рутинные рассуждения/:

1/ Если вершины $x$ и $y$ $R$ -смежны, то всякая вершина из $R(x)$ $R$-смежна некоторой вершине из $R(y)$ и, наоборот, всякая вершина, принадлежащая $R(y)$, $R$ -смежна некоторой вершине из $R$ -цикла $R(x)$, $R(x)\neq R(y)$, и мы говорим тогда, что эти $R$ -циклы $R$ -смежны.

2/ Если $R(x)$ и $R(y)$ $R$-смежны, то $|R(x)|=a|R(y)|$, где $a=2$ или $a=1/2$.

Введем частичное отношение на множестве $R$ -циклов: $R(x)>R(y)$ если $R(x)$ и $R(y)$ $R$-смежны и $|R(x)|=2|R(y)|$.

Так как всякий подграф графа $T\langle \mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$ изоморфный $G$, принадлежит окрестностям самое большое одной пары $R$ -смежных или $S$ -смежных вершин, то справедливо следующее утверждение: если $R(x)<R(y)$ и $R(z)<R(g)$, то $R(x)=R(z)$ эквивалентно $R(y)=R(g)$.

Теперь мы распространим введенное отношение: если $R(x)<R(y)$ и $R(y)<R(z)$, то по определению $R(x)<R(z)$. Из соотношения между количествами элементов $R$ -смежных $R$ -циклов следует ложность утверждения $R(x)<R(x)$ для каждого $x$.

Таким образом, на множестве $R$ -циклов определен частичный линейный порядок. $T\langle \mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$ конечен, и поэтому существуют максимальные элементы. Пусть $R^{M}(x)$ -максимальный элемент. Пусть $R(R^{M}(x))$- цепь $R$ -циклов, в которой $R^{M}(x)$ есть наибольший элемент. Тогда число вершин, каждая из которых $S$ -смежна с некоторой вершиной $R$ -цикла $R^{M}(x)$, в два раза превосходя $|R^{M}(x)|$, будет строго больше суммы количества всех элементов $R$ -колец цепи $R(R^{M}(x))$.

Поэтому число вершин графа $T\langle \mathcal{L}^{m}_{d;p}\rangle$, в окружении которых есть компонента связности, изоморфная $S$, больше числа вершин, в окружении которых есть компонента связности, изоморфная $R$. Это противоречит предположению.

Пусть $\bar{m}$ - натуральное число и $\bar{m} \geqslant 2\bar{V}+200$, где $\bar{V}$ - максимальное среди чисел $|V(\bar{M}(d_i))|$, $d_i \in P$.

Л е м м а 4. Если $(\{d^0\}, P)$ разрешимо на торе, то существует конечный $T$ -граф для $\mathcal{L}^{\bar{m}}_{d^0,P}$.

По условию существует покрытие $\Sigma$ подходящего тора посредством домино, типы которых принадлежат $P$, причем $\Sigma$ содержит только одно домино типа $d^0$. Перейдем к граф-модели $M(\Sigma)$ этого покрытия, котоая является $T$ -графом для $\{\bar{M}(d_i)|d_i\in P\}\cup\{M_A,M_B,M_F\}$. Для краткости вершину, окружение которой изоморфно некоторому элементу множества $\mathfrak{A}$, называем $\mathfrak{A}$ -вершиной. В $M(\Sigma)$ количество $\{M_A,M_B,M_F\}$ - вершин меньше, чем $\bar{V}\cdot\ell$, где $\ell$ -количество $\{\bar{M}(d_i)|d_i\in P\}$ - вершин.

Рассуждения, приведенные в лемме 3, дают способ построения $T$ -графа $L(R)$ для $\{R,S,M_B,M_F,E_1,\dots,E_8\}$ такого, что количество $\{S\}$ - вершин превышает на 8 количество $N$ $\{R\}$ -вершин, и $N$ может быть выбрано сколько угодно превышающим $|V(M(\Sigma))|$. В $L(R)$ еще количество $\{M_B,M_F,E_1,\dots,E_8\}$ -вершин меньше, чем 50$N$. /Эту оценку получаем из рассмотрения графа $R$ /. Теперь,взяв достаточно много $(q)$ экземпляров графа $L(R)$ с попарно не пересекающимися множествами вершин и отождествляя в объединении этих графов некоторые вершины, очевидно, можно построить конечный граф $T\langle\{R\cup S,S,M_B,M_F,E_1,\dots,E_8\}\rangle$. В этом графе количество $\{S\}$ -вершин равно $4q$, а количество $\{M_B,M_F,E_1,\dots,E_8\}$ - вершин меньше, чем $100q$, если $q$ - количество $\{R\cup S,S\}$ -вершин.

Возьмем $4q$ экземпляров графа $M(\Sigma)$ с попарно различными множествами вершин. Ясно, как построить $T$ -граф $Y$ для $\{R\cup S, M_A,M_B,M_F,E_1,\dots,E_8\}\cup\{\bar{M}(d_i)|d_i\in P\setminus\{d^0\}\}\cup\{\bar{M}(d^0)\cup S\}$, отождествляя $\{\bar{M}(d^0)\}$ - вершины взятых экземпляров графа $M(\Sigma)$ с $\{S\}$ -вершинами графа $T\langle\{R\cup S,S,M_B,M_F,E_1,\dots,E_8\}\rangle$. В $Y$ количество $\{S\cup R\}$ -вершин больше $\{\bar{M}(d_i)|d_i\in P\setminus\{d^0\}\}$ -вершин, а количество $\{M_A,M_B,M_F,E_1,\dots,E_8\}$ --вершин меньше, чем $(2\bar{V}+200)\ell$, где $\ell$ - количество $\{R\cup S,\bar{M}(d^0)\cup S\}\cup\{\bar{M}(d_i)|d_i\in P\setminus\{d^0\}\}$ -вершин.

Используя все тот же прием отождествления подходящих вершин в графе, полученном объединением достаточно большего количества с попарно не пересекающимися множествами вершин экземпляров графа $Y$, построим искомый конечный граф. Недостаток места не позволяет изложить все детали доказательства.

Из леммы 3 и 4 следует

Т е о р е м а 4. Не существует алгоритма, устанавливающего по произвольному конечному множеству $\mathcal{L}$ конечных графов, существует ли конечный $T$ -граф для $\mathcal{L}$.

Заметим, что для каждого множества $\mathcal{L}^{m}_{d',p}$ существует бесконечный $T$ -граф.

Поступила в ред.-изд.отдел
14 июня 1972 г.

Литература

1. А.А.Зыков. Теория конечных графов I, Новосибирск, Наука, 1969.

2. Theory ot graphs and its applications, Proc. of the symp. in Smolenice, Prague, 1964, 157-165.

3. В.Г.Визинг. Некоторые нерешенные задачи в теории графов, УМН, 1968, вып.6.

4. A.S.Kahr, Edward F. Moore, Hao Wang, Entscheidungsproblem reduced to the $\forall\exists\forall$ case, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A.,1962, v.48, N 3.