Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1973 г. выпуск II.
УДК.512.25/26+519.3:330.115

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н.И.Глебов

Для решения некоторых задач выпуклого целочисленного программирования может быть использован алгоритм типа покоординатного спуска. Ввиду простоты такого алгоритма представляет интерес исследование возможностей его применения для решения тех или иных задач.

В настоящей работе рассматривается определенный класс задач выпуклого целочисленного программирования и устанавливается признак разрешимости задачи из этого класса посредством алгоритма покоординатного спуска. На этой основе далее в явном виде выделяется класс разрешимых посредством данного алгоритма задач, более широкий, чем ранее известные [1].

I. Рассматривается класс задач выпуклого целочисленного программирования следующего вида:

$$\max_{x \in P} f(x) \qquad /1/$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)$ - n -мерный целочисленный вектор;

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j), \qquad /2/$$

$f_j(x_j)$ - выпуклые вверх функции целочисленного аргумента x_j ;
P - конечное множество целочисленных точек x ,лежащее в положительном ортанте и содержащее начало координат.

Нашей целью будет исследование разрешимости задачи /1/ - /2/ посредством алгоритма, неформальное описание которого приводится ниже.

Алгоритм ПС. Процесс вычислений начинается с точки $0 \in P$. Пусть после некоторого числа шагов мы пришли к точке $x \in P$. Следующий шаг состоит в переходе к такой точке $x' \in P$, которая непосредственно следует за x /т.е. отличается от x лишь одной координатой x'_j и $x'_j = x_j + 1$/ и для которой приращение функции $f(x)$ положительное и максимально возможное. Если такой точки x' не существует, то процесс заканчивается в точке x , если же их несколько, то выбирается любая из них. За конечное число шагов процесс закончится в некоторой точке $\bar{x} \in P$. В этом случае будем говорить, что алгоритм приводит к точке $\bar{x}$ /или $\bar{x}$ есть результат применения алгоритма на множестве P /.

Возникает естественный вопрос: для каких множеств P алгоритм ПС приводит к точке $\bar{x}$, являющейся решением задачи /1/-/2/ при любых $f(x)$ вида /2/?

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$x, y, z, \ldots$ - n - мерные векторы с неотрицательными целочисленными компонентами;

$x \leqslant y$, если компоненты векторов x и y удовлетворяют неравенствам $x_j \leqslant y_j$, $j=1,\ldots,n$;

$$[0,x]=\{y \,/\, 0 \leqslant y \leqslant x\},$$

$$\delta_j=(0,\ldots,0,1_j,0,\ldots,0\};$$

$E(x,P)=\{j/x+\delta_j \in P\}$ - множество допустимых направлений в точке x относительно множества P .

$\widetilde{P}=\{x/E(x,P)=\phi, x \in P\}$ - множество максимальных точек множества P ;

$$P(z)=\{x/x\in P,\ x \leqslant z\}=[0,z]\cap P;$$

$$P_m=\{x/x\in P, \sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant m\},\ m=0,1,2,\ldots;$$

$\widetilde{P}(z)$, $\widetilde{P}_m$ - множества максимальных точек множеств $P(z)$ и P_m соответственно.

$$\Delta_j f(x)=f(x+\delta_j)-f(x)=f_j(x_j+1)-f_j(x_j)=\Delta f_j(x_j).$$

Для функции $f(x)$ вида /2/ из $x \leqslant y$ следует

$$\Delta_j f(x) \geqslant \Delta_j f(y),\ j=1,\ldots,n.$$

По алгоритму ПС переход из точки $x\in P$ происходит в такую точку $x+\delta_j$, для которой $j\in E(x,P)$ и

$$\Delta_j f(x)=\max_{i\in E(x,p)} \Delta_i f(x)>0.$$

Ответ на поставленный выше вопрос дает

Т е о р е м а I. Для того чтобы алгоритм ПС приводил к решению задачи /1/-/2/ при любых $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы множество P обладало свойствами:

/A/ если $x\in P$, то $[0,x]\subset P$;

/B/ для всякого вектора $z \geqslant 0$ существует число b ,такое, что из $x\in\widetilde{P}(z)$ следует $\sum_{j=1}^{n} x_j=b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость.

/A/ Пусть $x^0\in P$ и $[0,x^0]\not\subset P$. Тогда найдутся y и j_0 , такие, что $y+\delta_{j_0}\leqslant x^0$, $y+\delta_{j_0}\notin P$, $[0,y]\subset P$.

Определим $f(x)$, положив

$$f_{j_0}(t)=\begin{cases}2t, & \text{если } t\leqslant y_{j_0},\\ y_{j_0}+t, & \text{если } t>y_{j_0}\end{cases}\qquad f_j(t)=\begin{cases}2t, & \text{если } t\leqslant y_j,\\ 2y_j, & \text{если } t>y_j\ (j\neq j_0)\end{cases}$$

Имеем $f(x^0)>f(y)$, но алгоритм ПС приводит к точке y .

/B/ Пусть для некоторого z существуют x и y , такие, что $x\in\widetilde{P}(z)$, $y\in\widetilde{P}(z)$, $\sum_{j=1}^{n} x_j=p$, $\sum_{j=1}^{n} y_j=q$ и $p<q$. Положим $f(0)=0$,

$$\Delta f_j(t)=\begin{cases}q+1, & \text{если } 0\leqslant t<x_j\\ p+1, & \text{если } x_j\leqslant t<z_j \quad (j=1,\ldots,n)\\ 0, & \text{если } z_j\leqslant t\end{cases}$$

Имеем $f(x)=p(q+1)<(p+1)q\leq f(y)$, но алгоритм ПС приводит к точке x /в предположении, что множество P обладает свойством /A//.

Прежде чем переходить к доказательству достаточности условий теоремы, отметим некоторые очевидные факты и докажем одну лемму.

Последовательность множеств P_0, P_1, P_2, ... является монотонно возрастающей, и при достаточно больших m $P_m=P$. Если множество P обладает свойствами /A/ и /B/, то этими свойствами обладают и множества P_m. Кроме того, если $x\in P_{m-1}$, то $E(x,P_m)=E(x,P)$. Следовательно, если $\bar{x}_m$ есть результат применения алгоритма ПС на множестве P_m, а $\bar{x}_m-\delta_j$ - предпоследняя точка на пути из 0 в $\bar{x}_m$, то $\bar{x}_{m-1}=\bar{x}_m$ в случае $\bar{x}_m\in P_{m-1}$ и $\bar{x}_{m-1}=\bar{x}_m-\delta_j$ в противном случае.

Л е м м а. Если $x\in P\setminus\tilde{P}$, $y\in\tilde{P}$ и P обладает свойством /B/, то найдется $j\in E(x,P)$, для которого $x_j<y_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует неравенство $\sum_{j=1}^{n}y_j>\sum_{j=1}^{n}x_j$. Предположим, что $x_j\geqslant y_j$ при любом $j\in E(x,P)$. Определим вектор z, положив $z_j=max(x_j,y_j), j=1,\dots,n$. Тогда для множестве $P(z)$ точки x и y являются максимальными, что невозможно.

Продолжим доказательство теоремы.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Доказательство проведем для множеств P_m методом индукции по m. При $m=0$ утверждение тривиально. Предположим, что для множества P_{m-1}, $(m\geqslant 1)$ алгоритм ПС приводит к решению задачи. Пусть $\bar{x}$ есть результат применения алгоритма ПС на множестве P_m.

Возможны два случая: а/ $\bar{x}\in P_{m-1}$; в/ $\bar{x}\in P_m\setminus P_{m-1}=\tilde{P}_m$.

Рассмотрим второй случай. /Случай а/ рассматривается аналогично/ Пусть переход в точку $\bar{x}$ произошел из точки $x'=\bar{x}-\delta_{j_0}$. Тогда $x'\in P_{m-1}$ и эта точка является результатом применения алгоритма ПС на множестве P_{m-1}. По предположению индукции функция $f(x)$ достигает в точке x' максимума на P_{m-1}. Кроме того,

$$\Delta_{j_0}f(x')=\max_{j\in E(x',P_m)}\Delta_j f(x')>0,$$

в частности, $f(x')<f(\bar{x})$.

Пусть $y\in P_m\setminus P_{m-1}=\tilde{P}_m$. По доказанной лемме существует $j\in E(x',P_m)$, для которого $x'_j<y_j$ и, следовательно,

$$\Delta_j f(y-\delta_j)\leqslant\Delta_j f(x')\leqslant\Delta_{j_0}f(x').$$

Так как $y-\delta_j\in P_{m-1}$, то $f(y-\delta_j)\leqslant f(x')$. Таким образом,

$$f(y)=f(y-\delta_j)+\Delta_j f(y-\delta_j)\leqslant f(x')+\Delta_{j_0}f(x')=f(\bar{x}).$$

и $f(x)$ достигает в $\bar{x}$ максимума на P_m. Теорема доказана.

2. В этом пункте мы выделим в явном виде один класс множеств, обладающих свойствами /A/ и /B/. С этой целью будем рассматривать множества P, определяемые неравенствами:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq \beta_i \ , \ i=1,\dots,m, \qquad /3/$$

где $\alpha_{ij} \in \{0,1\}$, β_i и x_j - целые неотрицательные числа.

Очевидно, что при любых α_{ij} и β_i определяемое условиями /3/ множество P содержит начало координат и обладает свойством /А/. Оно будет также ограниченным, если каждая переменная x_j входит хотя бы в одно ограничение, т.е. для любого j существует i такое, что $\alpha_{ij}=1$.

Не столь тривиальным оказывается вопрос, касающийся свойства /В/. При произвольных α_{ij} и β_i множество P этим свойством, вообще говоря, не обладает. Однако можно указать некоторые дополнительные ограничения, налагаемые на матрицу $\{\alpha_{ij}\}$, при выполнении которых множество P будет обладать свойством /В/ независимо от значений правых частей неравенств /3/. С практической точки зрения именно этот случай представляет наибольший интерес.

Для формулировки указанных ограничений введем в рассмотрение множества $A_i \ (i=1,\dots,m)$, где A_i есть множество номеров j всех переменных x_j, входящих в i -е неравенство, т.е. $A_i=\{j/\alpha_{ij}=1\}$. Ради краткости будем также говорить, что матрица $\{\alpha_{ij}\}$ имеет структуру типа дерева, если любые два множества A_k и A_s таковы, что либо они не имеют общих элементов, либо одно из них включает другое.

Теперь может быть сформулирована и доказана

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы при фиксированных α_{ij} и произвольных β_i определяемые неравенствами /3/ множества P обладали свойством /В/, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\{\alpha_{ij}\}$ имела структуру типа дерева.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть структура матрицы $\{\alpha_{ij}\}$ отлична от указанной в условиях теоремы. Тогда найдутся два множества, скажем A_1 и A_2, такие, что ни одно из них не включает другое и $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Пусть $1 \in A_1 \setminus A_2$, $2 \in A_2 \setminus A_1$ и $3 \in A_1 \cap A_2$. Положим $\beta_1=\beta_2=1$ и $\beta_i=2$ при $i \geqslant 3$. Тогда $X'=/1,1,0,\dots,0/$ и $X''=/0,0,1,0,\dots0/$ будут максимальными точками множества $P(z)$ при $z=/1,1,1,0,\dots,0/$ и $\sum_{j=1}^{n} x'_j \neq \sum_{j=1}^{n} x''_j$. Таким образом, при указанных β_i множество P не обладает свойством /В/.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть матрица $\{\alpha_{ij}\}$ имеет структуру типа дерева и $\bigcup_{i=1}^{m} A_i=\{1,\dots,n\}$. Тогда множество P, будучи ограниченным, имеет максимальные точки. Пусть X' - максимальная точка.

Номер i назовем критическим, если i -е ограничение системы /3/ выполняется в точке X' как равенство, и для любого k, такого, что $A_k \supset A_i$, k -е ограничение выполняется как строгое неравенство. В силу максимальности точки $\bar{X}'$ для любого $j \in \{1,\dots,n\}$ существует критический номер i, такой, что $j \in A_i$. Пусть $\mathcal{J}$ есть множество всех критических номеров. Тогда семейство множеств $\{A_i\}_{i\in J}$ является разбиением множества $\{1,2,\ldots,n\}$ на непересекающиеся подмножества, и, следовательно, $\sum_{j=1}^{n} x'_j = \sum_{i\in J}\beta_i$. Кроме того, для произвольной точки $x\in P$ имеет место неравенство $\sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant \sum_{i\in J}\beta_i$. В частности, для любой максимальной точки x'' имеем $\sum_{j=1}^{n} x''_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} x'_j$. Поскольку x' и x'' в наших рассуждениях можно поменять местами, то нами доказано равенство $\sum_{j=1}^{n} x'_j = \sum_{j=1}^{n} x''_j$. Таким образом, существует число b, такое, что для любой максимальной точки x множества P имеет место равенство $\sum_{j=1}^{n} x_j = b$.

Применение доказанного утверждения к множеству $P(z)$, определяемому условиями /3/ с дополнительными ограничениями $x_j \leqslant z_j$ $(j=1,\ldots,n)$, завершает доказательство теоремы.

Поступила в ред.-изд.отдел
23 октября 1972 г.

Литература

I. О.С.Горбачева. Об одном классе задач выпуклого программирования.-"Труды 3-й зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам". Москва, вып.П, 1970, 246-247.