Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1973 г. выпуск II.
УДК.519.95

СЛАБАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ Λ -СИСТЕМЫ

М.Д.Зияудинов

В работе доказывается теорема о слабой устойчивости решений уравнения

$$x(\ell) = Fx(\ell-1) \quad , \ \ell = 1,2,\ldots,$$

где F - оператор из R^n_+ в R^n_+, определяющий однородную Λ - систему /определение однородной Λ - системы см. /1//. Доказывается также, что операторное уравнение $Fx = x$, $x \in R^n_+$ имеет положительное решение.

1°. Пусть R^n и R^m - евклидовы пространства размерности n и m соответственно, упорядоченные естественным образом. Определим оператор B, действующий из R^n в R^m в виде

$$Bx = (B_1 x, B_2 x, \ldots, B_m x), \quad x \in R^n, \qquad /1.1/$$

где координатные функции B_j задаются формулами:

$$B_j x = \min_{1 \le k \le n} x_k / b_{kj} \ , \quad k = 1,2,\ldots n; \ j = 1,2,\ldots,m. \qquad /1.2/$$

Пусть $R^n_+ = \{x \in R^n : x \geqslant 0\}$ и $R^m_+ = \{y \in R^m : y \geqslant 0\}$.

Легко видеть, что оператор B, определенный формулами /1.1/ и /1.2/, обладает следующими свойствами:

а/ если $x \in R^n_+$ то $Bx \in R^n_+$;

б/ если $x \in R^n_+$ и $x_i = 0$ хотя бы для одного $i \in N = \{1,2,\ldots,n\}$ то $Bx = 0$;

в/ B - непрерывный оператор;

г/ B положительно однороден первой степени, т.е. для любого $x \in R^n$ и $\lambda \geqslant 0$ выполняется соотношение $B\lambda x = \lambda Bx$;

д/ B - изотонный оператор, т.е. для $x', x'' \in R^n$ и $x' \le x''$ имеет место неравенство $Bx' \le Bx''$; ";

е/ оператор B суперлинеен, т.е. $\alpha Bx' + \beta Bx'' \le B(\alpha x' + \beta x'')$, где $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $x', x'' \in R^n$.

Рассмотрим далее линейный оператор $A: R^m \to R^n$. Оператор A задается прямоугольной матрицей $\{a_{ij}\}$, $i = 1,2,\ldots,n; j = 1,\ldots,m$) в естественном базисе. Через F обозначим суперпозицию операторов B и A, т.е.

$$Fx = ABx \ , \qquad x \in R^n. \qquad /1.3/$$

Нетрудно проверить, что оператор F обладает свойствами б/-г/. В работе /2/ доказана следующая

Лемма А/. Если для оператора F, определенного формулой $F = (F_1, \ldots, F_n)$, где

$$F_i x = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \min_{1\le k\le n} \frac{x_k}{b_{kj}}, \quad i=1,2,\dots,n,$$

выполнено неравенство:

$$\sum_{j\in M_i^+} a_{ij} \frac{1}{b_j^i} - \sum_{j\in M_i^-} |a_{ij}| \frac{1}{\bar{b}_j^i} \geq 0, \qquad /1.4/$$

то $F(R_+^n) \subset R_+^n$ $\left(M_i^+ = \{j \in M = \{1,2,\dots,m\};\ a_{ij} \geq 0;\right.$

$\left. M_i^- = M \setminus M_i^+;\ b_j^i = \max_{1\le k\le n} b_{kj}\ j\in M_i^+;\ \bar{b}_j^i = \min_{1\le k\le n} b_{kj}\ j\in M_i^-\right).$

В дальнейшем будем полагать условия А/ выполненными. Тогда оператор F обладает свойством а/. В дальнейшем будем рассматривать сужение оператора F на конус R_+^n.

Представим теперь матрицу A в виде $A = A^+ - A^-$, где A^+ и A^- положительная и отрицательная части матрицы A. Соотношение же /1.3/, используя введенные обозначения, запишем в виде

$$Fx = (A^+ - A^-)Bx = A^+Bx - A^-Bx, \quad x \in R_+^n. \qquad /1.5/$$

Определение /см. /3//. Оператор $\underline{T}$ ($\overline{T}$) называется минорантой /мажорантой/ оператора T, действующего из R_+^n в R_+^n, если $\underline{T}x \le Tx$ ($Tx \le \overline{T}x$) для любого $x \in R_+^n$.

Лемма 1.1. Для оператора B, определенного формулами /1.1/ и /1.2/, существует миноранта $\underline{B}$, обладающая свойствами а/ - е/.

Доказательство. Пусть $x \in R_+^n$. Определим оператор C из R_+^n в R_+^n, положив $Cx = (\min_{1\le k\le n} x_k, \dots, \min_{1\le k\le n} x_k)$ Из определения B следует, что $BCx \le Bx$ для любого $x \in R_+^n$. Если через $\underline{B}$ обозначим суперпозицию операторов B и C, то $\underline{B}$ является минорантой оператора B. Легко показать, что оператор $\underline{B}$ обладает свойствами а/ - е/. Пусть, по определению, $e = \underbrace{\{1,1,\dots,1\}}_{n}$. Тогда оператор $\underline{B}$ можно записать в виде

$$\underline{B}x = BCx = \min_{k\in N} x_k Be. \qquad /1.6/$$

Строить мажоранту $\overline{B}$, имеющую структуру /1.6/, в конусе R_+^n невозможно, поэтому будем строить $\overline{B}$ в более "узком" конусе.

2°. Пусть $u \in R_+^n$ такой, что для него выполняются условия:

$$u \geq e, \quad A^+Be \geq A^-Bu. \qquad /2.1/$$

Этому элементу сопоставим множество

$$K(u) = \{x \in R_+^n : x \le u \cdot \min_{k\in N} x_k\}. \qquad /2.2/$$

Покажем, что множество $K(u)$ является выпуклым замкнутым конусом.

Лемма 2.1. Множество $K(u)$ - выпуклый замкнутый конус.

Доказательство. Замкнутость множества $K(u)$ очевидна. Очевидно так же, что $\lambda K(u) \subset K(u)$ для любого $\lambda \geqslant 0$. Покажем, что множество $K(u)$ выпукло. Пусть $x', x'' \in K(u)$, т.е.

$$x' \leqslant u \cdot \min_{k \in N} x'_k ,$$
$$x'' = u \cdot \min_{k \in N} x''_k .$$

Тогда

$$\alpha x' + \beta x'' \leqslant u(\alpha \min_{k \in N} x'_k + \beta \min_{k \in N} x''_k) \leqslant u \cdot \min(\alpha x' + \beta x'')$$
$$(\alpha + \beta = 1; \quad \alpha, \beta \geqslant 0).$$

Таким образом, выполняется соотношение $\alpha x' + \beta x'' \in K(u)$. Заметим, что конус $K(u)$ не пуст, так как $0 \in K(u)$. Представляет интерес лишь тот случай, когда $K(u)$ отличен от нуля. Из определения $K(u)$ следует, что $K(u) \neq \{0\}$ лишь в том случае, когда $u \geqslant e$. Кроме того, в силу условия /2.1/ должно выполняться неравенство $A^+Be \geqslant A^-Bu$, которое, используя обозначения принятые в лемме А/, можно переписать в виде

$$\sum_{j \in M_i^+} a_{ij} \min_{k \in N} \frac{1}{b_{kj}} \geqslant \sum_{j \in M_i^-} |a_{ij}| \min_{k \in N} \frac{1}{b_{kj}}, \quad i \in N.$$

Отметим еще, что поскольку $Fe = ABe \in R^n_+$, то $A^+Be \geqslant A^-Be$, т.е.

$$\sum_{j \in M_i^+} a_{ij} \min_{k \in N} \frac{1}{b_{kj}} \geqslant \sum_{j \in M_i^+} a_{ij} \min_{k \in N} \frac{1}{b_{kj}}, \quad i \in N.$$

Предположим, что $Fe > 0$, или, что то же самое,

$$\sum_{j \in M_i^+} a_{ij} \min_{k \in N} \frac{1}{b_{kj}} > \sum_{j \in M_i^-} a_{ij} \min_{k \in N} \frac{1}{b_{kj}}, \quad i \in N.$$

Тогда вектор u, удовлетворяющий соотношениям /2.1/, заведомо существует.

Приведем еще одно достаточное условие, гарантирующее существование ветора u.

Будем говорить, что оператор F удовлетворяет условию (Δ), если существует такое множество номеров $\bar{K} = \{\bar{k}_1, \bar{k}_2, .., \bar{k}_\ell\} \in N$, что при каждом $j \in M$ найдется номер k_j, не входящий в $\bar{K}$ и такой, что

$$\frac{1}{b_{k_j j}} = \min_{k \in N} \frac{1}{b_{kj}} .$$

Легко видеть, что если оператор F удовлетворяет условию (Δ), то вектор u, определенный в виде

$$u = (1, 1, \dots, \underset{\bar{k}_1}{\lambda_1}, 1, \dots, 1, \underset{\bar{k}_\ell}{\lambda_\ell}, 1, \dots, 1),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_\ell$ - произвольные числа, большие 1, удовлетворяет соотношениям /2.1/.

Покажем теперь, что для оператора B в конусе $K(u)$ можно построить мажоранту $\bar{B}$, имеющую структуру /1.6/.

Л е м м а 2.2. Оператор $\bar{B}$, определенный формулой

$$\bar{B}x = \min_{k\in N} x_k \cdot Bu, \qquad x \in R^n_+ , \qquad /2.3/$$

является мажорантой оператора B в конусе $K(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in K(u)$. Тогда из изотонности оператора B следует, что

$$Bx \leq Bu \cdot \min_{k\in N} x_k = \min_{k\in N} x_k \cdot Bu . \qquad /2.4/$$

Обозначая $\min_{k\in N} x_k Bu = \bar{B}x$, легко видеть, что оператор $\bar{B}$ является мажорантой оператора B в конусе $K(u)$.

Используя формулы /I.6/ и /2.4/ для оператора F, определенного формулой /I.5/, имеем

$$A^+\underline{B}x - A^-\bar{B}x \leq A^+Bx - A^-Bx \leq A^+\bar{B}x - A^-\underline{B}x, \quad x \in K(u). \qquad /2.5/$$

Обозначим через $\underline{G}$ и $\bar{G}$ соответственно миноранту и мажоранту оператора F в конусе $K(u)$, т.е.

$$\underline{G}x = A^+\underline{B}x - A^-\bar{B}x , \quad x \in K(u) , \qquad /2.6/$$

$$\bar{G}x = A^+\bar{B}x - A^-\underline{B}x , \quad x \in K(u) . \qquad /2.7/$$

Для $\underline{B}$ и $\bar{B}$ в формулах /2.6/ и /2.7/ используем соответствующие значения из формул /I.6/ и /2.3/. Тогда формулы /2.6/ и /2.7/ принимают вид:

$$\underline{G}x = A^+\min_{k\in N} x_k Be - A^-\min_{k\in N} x_k Bu = \min_{k\in N} x_k (A^+Be - A^-Bu), \quad x \in K(u),$$

$$\bar{G}x = A^+\min_{k\in N} x_k Bu - A^-\min_{k\in N} x_k Be = \min_{k\in N} x_k (A^+Bu - A^-Be), \quad x \in K(u).$$

Полагая $\underline{a} = A^+Be - A^-Bu$, $\bar{a} = A^+Bu - A^-Be$, имеем

$$\underline{G}x = \underline{a} \cdot \min_{k\in N} x_k , \quad x \in K(u), \qquad /2.8/$$

$$\bar{G}x = \bar{a} \min_{k\in N} x_k , \quad x \in K(u). \qquad /2.9/$$

Легко видеть, что операторы $\underline{G}$ и $\bar{G}$ определенные формулами /2.8/ и /2.9/, удовлетворяют условиям а/ - е/ из I°. Из соотношения /2.5/ следует, что $\underline{a} \leq \bar{a}$. Из определения операторов $\underline{G}$ и $\bar{G}$ формулами /2.8/ и /2.9/ следует, что элементы $\underline{a}$ и $\bar{a}$ являются собственными векторами операторов $\underline{G}$ и $\bar{G}$ соответственно, причем $\underline{a}$ - единственный /с точностью до множителя/ собственный вектор оператора $\underline{G}$, а $\bar{a}$ - единственный /с точностью до множителя/ собственный вектор для оператора $\bar{G}$.

3°. Пусть u такой, что помимо условия /2.I/ для него выполняются еще соотношения:

$$A^+Bu - A^-Be \leq u , \qquad /3.1/$$

$$\min_{i\in N} (A^+Be - A^-Bu)_i = \min_{i\in N} (A^+Bu - A^-Be)_i = 1 . \qquad /3.2/$$

Л е м м а 3.1. Если для u выполнены соотношения /2.1/, /3.1/ и /3.2/, то $\underline{a}, \bar{a} \in K(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство /3.1/ означает, что $\bar{a} \leq u$, а из соотношения /3.2/ следует, что $\min\limits_{i \in N} \bar{a}_i = 1$, откуда $\bar{a} \leq u \cdot \min\limits_{i \in N} \bar{a}_i$. Совершенно аналогично показывается, что $\underline{a} \leq \min\limits_{i \in N} a_i \cdot u$. Таким образом, $\underline{a}, \bar{a} \in K(u)$.

Рассмотрим теперь множество $X = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle \cap K(u)$, где $\langle \underline{a}, \bar{a} \rangle = \{x \in R^n : \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}$. Множество X, очевидно, не пусто /так как $\underline{a}$ и $\bar{a} \in K(u)$ //. Очевидно также, что X – выпуклое множество.

Т е о р е м а 3.1. Если для оператора F выполняются условия леммы 3.1, то F имеет в множестве X хотя бы одну неподвижную точку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что множество X инвариантно относительно оператора F. Для этого достаточно показать, что $X = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle$. В самом деле, если $X = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle$, то из определения $\underline{G}$ и $\bar{G}$ следует, что для любого $x \in X$ $\underline{G}\underline{a} \leq \underline{G}x \leq Fx \leq \bar{G}x \leq \bar{G}\bar{a}$. Из соотношения /3.2/ следует, что $\underline{G}\underline{a} = \underline{a}$ и $\bar{G}\bar{a} = \bar{a}$. Таким образом, $Fx \in X$. Покажем теперь, что если выполняются соотношения /3.1/ и /3.2/, то $X = \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle$. В самом деле, пусть $x \in \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle$, тогда $\min\limits_{k \in N} x_k = 1$ – это следует из соотношения /3.2/, и выполняется соотношение $x \leq \bar{a} \leq \min\limits_{i \in N} a_i \cdot u = \min\limits_{i \in N} x_i \cdot u$, т.е. $x \in K(u)$. Таким образом, $\langle \underline{a}, \bar{a} \rangle \subset K(u)$, а из определения множества X следует, что $\langle \underline{a}, \bar{a} \rangle = X$. Множество X ограничено, замкнуто и выпукло: оператор F вполне непрерывен в X и преобразует множество X в себя. Существование неподвижной точки для оператора F следует из принципа Шаудера /см. /4//.

Т е о р е м а 3.2. Если операторы A и B такие, что выполняется равенство

$$A^{-}B\underline{a} = A^{-}B\bar{a}, \qquad /3.3/$$

то последовательности $V(e) = FV(e-1)(V(0) = \underline{a})$, $W(e) = FW(e-1)(W(0) = \bar{a})$ сходятся к неподвижным точкам оператора F в множестве X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что если выполнено равенство /3.3/, то оператор F изотонен на множестве X. В самом деле, пусть x' и $x'' \in X$ и $x' \leq x''$. Тогда

$$Fx'' - Fx' = A^{+}Bx'' - A^{-}B'' - A^{+}Bx' + A^{-}Bx'. \qquad /3.4/$$

Так как оператор $A^{-}B$ изотонен, то из условия /3.3/ для $x', x'' \in \langle \underline{a}, \bar{a} \rangle$ следует, что $A^{-}B\underline{a} \leq A^{-}Bx' \leq A^{-}Bx'' \leq A^{-}B\bar{a}$. Значит, $A^{-}Bx' = A^{-}Bx''$. Из сказанного следует, что правая часть формулы /3.4/ равна $A^{+}Bx'' - A^{+}Bx'$. Оператор $A^{+}B$ изотонен, следовательно, $A^{+}Bx'' - A^{+}Bx' \geq 0$, т.е. оператор F изотонен на множестве X. Сходимость последовательностей $\{V(e)\}$ и $\{W(e)\}$ к неподвижным точкам вытекает из леммы Канторовича /см. /5//.

4°. В этом пункте доказывается теорема о слабой устойчивости траектории $\{x(\ell)\}$, $\ell=0,1,\ldots$.

Рассмотрим соотношение:

$$x(\ell+1)=Fx(\ell)\ ,\ \ell=0,1,2,\ldots \qquad /4.1/$$

Определение. Траекторию $\{x(\ell)\}$, $\ell=0,1,\ldots$,порожденную оператором F , назовем слабо устойчивой относительно конуса $K(u)$, если существуют $v, w \in K(u)$ и n_0 такие, что

$$v \leqslant \frac{x(\ell)}{\lambda} \leqslant w\ ,\quad \ell \geqslant n_0\ ,$$

где $x(0)\in K(u)$, а $\lambda>0$ зависит только от $x(0)$.

Вначале покажем, что оператор F оставляет конус $K(u)$ инвариантным, т.е. имеет место

Лемма 4.1. Если для элемента u выполняются условия /2.1/, /3.2/ и /3.1/, то $F[K(u)]\subset K(u)$.

Доказательство. Пусть $x\in K(u)$. Тогда из определения операторов $\underline{G}$ и $\bar{G}$ следует, что выполняется неравенство

$$\underline{G}x \leqslant Fx \leqslant \bar{G}x\ ,\quad x\in K(u).$$

Используя формулы /2.8/ и /2.9/ имеем

$$\underline{a}\min_{k\in N} x_k \leqslant Fx \leqslant \bar{a}\cdot\min_{k\in N} x_k\ .$$

Согласно теореме 3.1, конусный отрезок $\langle\underline{a},\bar{a}\rangle\in K(u)$. Так как $K(u)$ - конус, то выполняется соотношение

$$\langle\underline{a}\min x_k, \bar{a}\min x_k\rangle \subset K(u)\ ,\quad x\in K(u).$$

Следовательно, $F(x)\in K(u)$.

Теорема 4.1. Каково бы ни было начальное значение $x(0)\in K(u)$, имеет место соотношение

$$\underline{G}[\underline{x}(\ell)] \leqslant F[x(\ell)] \leqslant \bar{G}[\bar{x}(\ell)], \qquad /4.2/$$

где $x(0)=\bar{x}(0)=\underline{x}(0)$;

$$\underline{x}(\ell)=\underline{G}[x(\ell-1)],\ x(\ell)=F[x(\ell-1)],\ \bar{x}(\ell)=\bar{G}[\bar{x}(\ell-1)]\ . \qquad /4.3/$$

Доказательство. Докажем теорему по индукции. Для $\ell=0$ неравенство, очевидно, выполнено, так как имеет место

$$\underline{G}[\underline{x}(0)] \leqslant F[x(0)] \leqslant \bar{G}[\bar{x}(0)]\ .$$

Это следует из определения $\underline{G}$ и $\bar{G}$, т.е.

$$\underline{G}[\underline{x}(0)]=\underline{G}[x(0)] \leqslant F[x(0)] \leqslant \bar{G}[x(0)] \leqslant \bar{G}[\bar{x}(0)]\ .$$

Предположим теперь, что соотношение /4.2/ выполнено для $\ell>0$, т.е. имеет место

$$\underline{G}[\underline{x}(\ell)] \leqslant F[x(\ell)] \leqslant \bar{G}[\bar{x}(\ell)]\ . \qquad /4.4/$$

Используя формулы /4.3/, перепишем соотношение /4.4/ в виде

$$\underline{x}(\ell+1) \leq x(\ell+1) \leq \bar{x}(\ell+1).$$

Тогда из изотонности операторов $\underline{G}$ и $\bar{G}$ следует

$$\underline{G}[\underline{x}(\ell+1)] \leq \underline{G}[x(\ell+1)] \leq F[x(\ell+1)] \leq \bar{G}[x(\ell+1)] \leq \bar{G}[\bar{x}(\ell+1)].$$

Таким образом, соотношение /4.2/ выполняется для любого ℓ.

Рассмотрим операторы $\underline{G}$ и $\bar{G}$, определенные формулами /2.8/ и /2.9/. Тогда имеет место один из следующих случаев:

1/ либо $\min\limits_{i\in N} \bar{a}_i < 1$ и $\min\limits_{i\in N} \underline{a}_i \neq \min\limits_{i\in N} \bar{a}_i$; в этом случае $\underline{G}[\underline{x}(\ell)] \to 0$ и $\bar{G}[\bar{x}(\ell)] \to 0$, следовательно, $F[x(\ell)] \to 0$ для любого $x \in K(u)$ при $\ell \to \infty$;

2/ либо $\min\limits_{i\in N} \underline{a}_i > 1$ и $\min\limits_{i\in N} \bar{a}_i \neq \min\limits_{i\in N} \underline{a}_i$; в этом случае $\underline{G}[\underline{x}(\ell)] \to \infty$, следовательно, $F[x(\ell)] \to \infty$ для любого $x \in K(u)$ при $\ell \to \infty$;

3/ либо $\min\limits_{i\in N} \underline{a}_i < 1$ и $\min\limits_{i\in N} \bar{a}_i > 1$, в этом случае $\underline{G}[\underline{x}(\ell)] \to 0$, а $\bar{G}[\bar{x}(\ell)] \to \infty$ для любого $x \in K(u)$ при $\ell \to \infty$;

4/ либо $\min\limits_{i\in N} \underline{a}_i < 1$, а $\min\limits_{i\in N} \bar{a}_i = 1$; в этом случае $\underline{G}[\underline{x}(\ell)] \to 0$, $\bar{G}[\bar{x}(\ell)] \to \min\limits_{k\in N} x_k(0)\bar{a}$ и $F[\bar{x}(\ell)] \in K(u) \cap \langle 0, \min\limits_{k\in N} x_k(0)\cdot\bar{a}\rangle$ для $\ell > 1$;

5/ либо $\min\limits_{i\in N} \underline{a}_i = 1$, а $\min\limits_{i\in N} \bar{a}_i > 1$; в этом случае $\underline{G}[x(\ell)] \to \min\limits_{k\in N} x_k(0)\underline{a}$, $\bar{G}[\bar{x}(\ell)] \to \infty$ и $F[x(\ell)] \geq \min\limits_{k\in N} x_k(0)\underline{a}$.

6/ либо $\min\limits_{i\in N} \underline{a}_i = \min\limits_{i\in N} \bar{a}_i = 1$, в этом случае решение уравнения $x(\ell-1) = F[x(\ell)]$ слабо устойчиво. Иными словами, имеет место

Теорема 3.2. Если вектор u таков, что для него выполняются все условия леммы 4.I, то

$$\underline{a} \leq \frac{F[x(\ell)]}{\min\limits_{k\in N} x_k(0)} \leq \bar{a}$$

для любого $x(0) > 0$, $x(0) \in K(u)$ и для любого $\ell \geq 1$, а для $\underline{a}$ и $\bar{a}$ выполняется равенство

$$\|\underline{a} - \bar{a}\| = \frac{\|\underline{G}u - \bar{G}u\|}{\min\limits_{k\in N} u_k}.$$

Доказательство. Пусть $x(0) \in K(u)$. Тогда по определению операторов $\underline{G}$ и $\bar{G}$

$$\underline{G}[x(0)] \leq F[x(0)] \leq \bar{G}[x(0)].$$

Но $\underline{G}[x(0)] = \underline{G}[x(0)] = \min\limits_{k\in N} x_k \cdot \underline{a}$. Из положительной однородности оператора $\underline{G}$ и из того, что $\min\limits_{i\in N} a_i = 1$, следует что $G[x(\ell)] = \min\limits_{k\in N} x_k(0)\underline{a}$ для любого $\ell \geq 1$. Совершенно аналогично показывается, что

$$\bar{G}[\bar{x}(\ell)] = \min_{k\in N} x_k(0)\cdot\bar{a} \qquad \text{для любого } \ell \geq 1.$$

Из сказанного, используя теорему 4.I, следует, что

$$\underline{a} \leq \frac{F[x(\ell)]}{\min\limits_{k\in N} x_k(0)} \leq \bar{a}.$$

Легко видеть, что если выполнено соотношение /3.I/, то $\underline{a}$ и $\bar{a}$ суть неподвижные элементы операторов $\underline{G}$ и $\bar{G}$ соответственно. Тогда $\|\underline{G}u-\bar{G}u\|=\|\min_{k\in N} u_k(\underline{a}-\bar{a})\|=\min_{k\in N} u_k\|\underline{a}-\bar{a}\|$, т.е.

$$\|\underline{a}-\bar{a}\|=\frac{\|\underline{G}u-\bar{G}u\|}{\min_{k\in N} u_k}.$$

Поступила в ред.-изд.отдел
20 января 1972 г.

Л и т е р а т у р а

I. Ю.И.Гильдерман, К.Н.Кудрина, И.А.Полетаев. Модели Λ - систем /системы с лимитирующими факторами/. "Исследования по кибернетике", Сов.радио, М., 1970, 165-211.

2. М.Д.Зияудинов. Поведение траекторий, порождаемых оператором для однородной Λ - системы.

3. М.А.Красносельский. Положительные решения операторных уравнений, ИФМЛМ, 1962.

4. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.

Л.В.Канторович. Sur la continuite et sur la procondement des operations lineares C.R.Akd.Sct. /206 (1938), 833-835/.