Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1973 г. выпуск II.
УДК.519.95

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ

В.Д.Батухтин /Свердловск/

При определенных предположениях доказывается дифференцируемость цены игры в нелинейной дифференциальной игре сближения.

I. В монографии [I] доказывается дифференцируемость цены игры в линейной дифференциальной игре сближения в регулярном случае. В данной работе при некоторых предположениях аналогичное утверждение доказывается уже для нелинейной дифференциальной игры сближения. При этом, исходя из дифференцируемости цены игры, обосновывается оптимальность экстремальных стратегий, реализующих правило экстремального прицеливания [I].

2. Пусть движение конфликтно управляемой системы описывается дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dy}{dt}=f^{(1)}(t,y,u)+p\delta(t-\nu), \qquad /2.1/$$

$$\frac{dz}{dt}=f^{(2)}(t,z,u), \qquad /2.2/$$

Здесь y, z — $n^{(1)}, n^{(2)}$- мерные фазовые векторы первого и второго игроков соответственно, функции $f^{(i)}(i=1,2)$ непрерывны по всем своим аргументам и непрерывно дифференцируемы по y и z при $t_0 \leq t \leq \nu$. Частные производные от $f^{(i)}(i=1,2)$ по y и z равномерно ограничены в фазовом пространстве $\{y,z\}$. Вектор p принадлежит некоторому ограниченному, выпуклому и замкнутому множеству P - области влияния первого игрока, $\delta(\tau)$ - дельта-функция. Реализации $u[t], v[t]$ управлений u, v стеснены ограничениями

$$u[t]\in U_t \ , \ v[t]\in V_t \ , \qquad /2.3/$$

где U_t, V_t - ограниченные, замкнутые множества изменяющиеся непрерывно с изменением времени t.

Задача первого игрока - минимизировать величину

$$\gamma=\|\{y[\nu]\}_m-\{z[\nu]\}_m\| \ (m\leq n^{(1)}, m\leq n^{(2)}), \qquad /2.4/$$

имеющую смысл расстояния в m - мерном пространстве от точки $\{z[\nu]\}_m$ до области влияния P точки $\{y[\nu]\}_m$, задача второго игрока - максимизировать /2.4/. Здесь и ниже символ $\{x\}_m$ означает вектор, составленный из первых m компонент x_i вектора x, символ $\|x\|$ - евклидову норму вектора x.

3. Обозначим через $G^{(1)}(t,\nu,y), G^{(2)}(t,\nu,z)$ области достижимости [I] движений $y(t)$ /2.1/, /2.3/ и $z(t)$ /2.2/, /2.3/ соответственно, построенные из позиции $\{t,y,z\}$ к моменту времени ν, а через

$G_\varepsilon^{(1)}(t,y,\nu)$ - замкнутую евклидову ε - окрестность области $G^{(1)}(t,\nu,y)$. Пусть область $G_\varepsilon^{(1)}(t,y,\nu)$ выпукла. Тогда условие поглощения области $G^{(2)}(t,\nu,z)$ наименьшей ε° - окрестностью $G_{\varepsilon^\circ}^{(1)}(t,\nu,y)$ области $G^{(1)}(t,\nu,y)$ в m -мерном пространстве может быть записано в виде

$$\varepsilon^\circ(t,y,z)=\max_{\|\ell\|=1}(\rho^{(2)}(t,\nu,z,\ell)-\rho^{(1)}(t,\nu,y,\ell)), \qquad /3.1/$$

где

$$\rho^{(1)}(t,\nu,y,\ell)=\max_{\substack{u(\cdot)\in U(\cdot/t,\nu)\\ p\in P}}(\ell'\cdot\{y(\nu;\,t,\,y,\,u(\cdot)\}_m),$$

$$\rho^{(2)}(t,\nu,z,\ell)=\max_{v(\cdot)\in V(\cdot/t,\nu)}(\ell'\cdot\{z(\nu;t,z,v(\cdot)\}_m),$$

$U(\cdot/t,\nu)$, $V(\cdot/t,\nu)$ - множества суммируемых вектор-функций $u(\tau)$, $v(\tau)$ соответственно, определенных на $t\le\tau\le\nu$; которые при почти всех $\tau\in[t,\nu]$ удовлетворяют включениям

$u(\tau)\in U_\tau$, $v(\tau)\in V_\tau$; $y(\nu;t,y,u(\cdot))$, $z(\nu;t,z,v(\cdot))$ — правый конец траектории $y(\tau)$, $z(\tau)$ в момент ν при начальных условиях $\{t,y\}$, $\{t,z\}$ и управлениях $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ соответственно; ℓ - - произвольный единичный m - мерный вектор, штрих означает транспонирование.

Далее будем полагать, что выполнены следующие условия.

/1°/. При любых $\{t,y,z\}$ векторы $f^i(i=1,2)$ пробегают выпуклые множества $F^{(1)}(t,y)$, $F^{(2)}(t,z)$, когда векторы u, v пробегают множества U_t, V_t .

/2°/. При условии $\varepsilon^\circ(t,y,z)>0$ максимум в равенстве /3.1/ достигается на единственном векторе ℓ°, при всяком ℓ максимум в соотношениях для $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ на единственном программном движении $\{y^\circ(\tau)$, $z^\circ(\tau)\}$.

Заметим, что в силу условия /1°/ максимум в соотношениях для $\rho^{(1)}$, $\rho^{(2)}$ достигается [2] , из условия /2°/ вытекает, в частности, выпуклость областей $G^{(1)}(t,\nu,y)$, $G^{(2)}(t,\nu,z)$.

Обозначим через $S^{(1)}(\nu,\tau,y^\circ(\cdot),u^\circ(\cdot),\ell)$, $S^{(2)}(\nu,\tau,z^\circ(\cdot),v^\circ,\ell)$ - фундаментальные матрицы решений дифференциальных уравнений в вариациях для уравнений /2.1/, /2.2/, вычисленные соответственно на оптимальных движениях $y^\circ(\cdot)$, $z^\circ(\cdot)$ и управлениях $u^\circ(\cdot)$, $v^\circ(\cdot)$, доставляющих максимум в соотношениях для $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ при данном ℓ /$S^{(1)}(\tau,\tau,y^\circ(\tau)$, $u^\circ(\tau),\ell)=E$, $S^{(2)}(\tau,\tau,z^\circ(\tau),v^\circ(\tau),\ell)=E$ - единичные матрицы/.

Пусть $\{t_i,y_i,z_i\}(i=1,2..)$ - последовательность позиций, сходящихся к позиции $\{t,y,z\}$, а $\{y_i^\circ(\tau),z_i^\circ(\tau)\}$ - последовательность соответствующих этим позициям оптимальных движений, которые вычислены на оптимальных управлениях $\{u_i^\circ(\tau), v_i^\circ(\tau)\}$, доставляющих максимум в соотношениях для $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$. Нетрудно проверить, что из единственности указанных оптимальных движений для каждой позиции $\{t_i, y_i, z_i\}$ вытекает непрерывность этих движений в равномерной метрике по начальным данным $\{t, y, z\}$ и ℓ. Однако отсюда, вообще говоря, непосредственно не выводится непрерывная зависимость по начальным данным и ℓ матриц $S^{(1)}(\nu, \tau, y^\circ(\cdot), u^\circ(\cdot), \ell), S^{(2)}(\nu, \tau, z^\circ(\cdot), v^\circ(\cdot), \ell)$. Поэтому будем исходить из выполнения также следующего условия.

/3°/. Последовательность оптимальных управлений $\{u_i^\circ(\tau), v_i^\circ(\tau)\}$ $(i=1,2,\ldots)$ сходится по мере к оптимальным управлениям $\{u^\circ(\tau), v^\circ(\tau)\}$, когда последовательность оптимальных движений $\{y_i^\circ(\tau), z_i^\circ(\tau)\}$ равномерно сходится к оптимальному движению $\{y^\circ(\tau), z^\circ(\tau)\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. При выполнении условий /1°/ - /3°/ фундаментальные матрицы решений $S^{(1)}(\nu, \tau, y^\circ(\cdot), u^\circ(\cdot), \ell), S^{(2)}(\nu, \tau, z^\circ(\cdot), v^\circ(\cdot), \ell)$ непрерывно зависят от начальных данных $\{t, y, z\}$ и от ℓ / в равномерной метрике/.

Действительно, элементы матриц

$$\left(\frac{\partial f^{(1)}(\tau, y_i^\circ(\tau), u_i^\circ(\tau))}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial f^{(2)}(\tau, z_i^\circ(\tau), v_i^\circ(\tau))}{\partial z}\right)$$

равномерно ограничены на интервале $[t_\circ, \nu]$ и, кроме того, в силу условия /3°/, сходятся по мере к элементам матриц

$$\left(\frac{\partial f^{(1)}(\tau, y^\circ(\tau), u^\circ(\tau))}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial f^{(2)}(\tau, z^\circ(\tau), v^\circ(\tau))}{\partial z}\right),$$

когда последовательность оптимальных движений $\{y_i^\circ(\tau), z_i^\circ(\tau)\}(i=1,2,\ldots)$ сходится к оптимальному движению $\{y^\circ(\tau), z^\circ(\tau)\}$. Отсюда следует непрерывная зависимость от начальных данных $\{t, y, z\}$ и от ℓ матриц

$$S^{(1)}(\nu, \tau, y^\circ(\cdot), u^\circ(\cdot), \ell), S^{(2)}(\nu, \tau, z^\circ(\cdot), v^\circ(\cdot), \ell).$$

Докажем теперь, исходя из условий /1°/ - /3°/ и леммы 3.1, следующую теорему.

Теорема 3.1. Пусть в рассматриваемой игре сближения /2.1/ - /2.4/ выполнены условия /1°/ - /3°/. Тогда функция $\varepsilon^\circ(t, y, z)$ в области, где $\varepsilon^\circ(t, y, z) > 0, t < \nu$, есть функция дифференцируемая.

Составим аналогично тому, как это сделано в [1], частное приращение $\Delta\varepsilon^\circ$, отвечающее приращению аргумента Δt. Нетрудно проверить, что для этого приращения $\Delta\varepsilon^\circ$ справедливы следующие неравенства:

$$\Delta\varepsilon^\circ \geqslant \ell^{\circ\prime}(t, y, z)\Big[\{z(\nu; t+\Delta t, z, v^\circ(\cdot/t+\Delta t, z, \ell^\circ(t, y, z)))\}_m - \{y(\nu; t+\Delta t, y, u^\circ(\cdot/t+\Delta t, y, \ell^\circ(t, y, z)))\}_m - \{z(\nu; t, z, v^\circ(\cdot/t, z, \ell^\circ(t, y, z)))\}_m + \{y(\nu; t, y, u^\circ(\cdot/t, y, \ell^\circ(t, y, z)))\}_m\Big],$$

$$\Delta\varepsilon^0 \leqslant \ell^{0'}(t+\Delta t,y,z)\Big[\{z(\nu;t+\Delta t,z,v^0(\cdot/t+\Delta t,z,\ell^0(t+\Delta t,y,z)))\}_m-$$
$$-\{y(\nu;t+\Delta t,y,u^0(\cdot/t+\Delta t,y,\ell^0(t+\Delta t,y,z)))\}_m-\{z(\nu;t,z,v^0(\cdot/t,$$
$$z,\ell^0(t+\Delta t,y,z)))\}_m+\{y(\nu;t,y,u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t+\Delta t,y,z)))\}_m\Big]. \qquad /3.3/$$

Здесь управления $u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z))$, $v^0(\cdot/t,z,\ell^0(t,y,z))$, $u^0(\cdot/t,y,$ $\ell^0(t+\Delta t,y,z))$, $v^0(\cdot/t,z,\ell^0(t+\Delta t,y,z))$ являются оптимальными управлениями для позиции $\{t,y,z\}$, доставляющими максимум в соотношениях для $\rho^{(1)}(t,\nu,y,\ell^0(t,y,z))$, $\rho^{(2)}(t,\nu,z,\ell^0(t,y,z))$, $\rho^{(1)}(t,\nu,y,\ell^0(t+\Delta t,y,z))$, $\rho^{(2)}(t,\nu,z,\ell^0(t+\Delta t,y,z))$ соответственно. Аналогично смысл имеют остальные управления, входящие в /3.2/, /3.3/.

Найдем оценку для величины:

$$\ell^{0'}(t,y,z)\{\Delta y(\nu)\}_m=\ell^{0'}(t,y,z)\Big[\{y(\nu;t,y,u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z)))\}_m-$$
$$-\{y(\nu;t+\Delta t,y,u^0(\cdot/t+\Delta t,y,\ell^0(t,y,z)))\}_m\Big] \qquad \text{из} \quad /3.2/$$

Обозначим через $\{\Delta y^+(\nu)\}_m$ величину

$$\{\Delta y^+(\nu)\}_m=\{y(\nu;t+\Delta t,y+\Delta y(t+\Delta t),u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z)))\}_m-$$
$$-\{y(\nu;t+\Delta t,y,u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z)))\}_m, \qquad /3.4/$$

через $\{\Delta y^-(\nu)\}_m$ – величину

$$\{\Delta y^-(\nu)\}_m=\{y(\nu;t+\Delta t,y,u^0(\cdot/t+\Delta t,y,\ell^0(t,y,z)))\}_m-$$
$$-\{y(\nu;t+\Delta t,y+\Delta y(t+\Delta t),u^0(\cdot/t+\Delta t,y,\ell^0(t,y,z)))\}_m. \qquad /3.5/$$

Можно найти величины вариаций $\{\delta y^+(\nu)\}_m$, $\{\delta y^-(\nu)\}_m$ отвечающие в линейном приближении соответственно приращениям

$$\{\Delta y^+(\nu)\}_m \quad , \quad \{\Delta y^-(\nu)\}_m$$

$$\{\delta y^+(\nu)\}_m=\{S^{(1)}(\nu,t+\Delta t,\tilde{y}^0(\cdot),u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z)),$$
$$\ell^0(t,y,z))\Delta y(t+\Delta t)\}_m + o(\Delta y), \qquad /3.6/$$

$$\{\delta y^-(\nu)\}_m=\{-S^{(1)}(\nu,t+\Delta t,y^0(\cdot),u^0(\cdot/t+\Delta t,y,\ell^0(t,y,z)),$$
$$\ell^0(t,y,z))\Delta y(t+\Delta t)\}_m + o(\Delta y), \qquad /3.7/$$

где $S^{(1)}(\nu,t+\Delta t,\tilde{y}^0(\cdot),u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))$,

$S^{(1)}(\nu,t+\Delta t,y^0(\cdot),u^0(\cdot/t+\Delta t,y,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))$ –

– фундаментальные матрицы решений уравнения первого приближения в вариациях для уравнения /2.1/, вычисленные соответственно на движениях $\tilde{y}^0(\tau)$, $y^0(\tau)$ и порождающих эти движения программных управлений $u^0(\tau/t,y,\ell^0(t,y,z))$, $u^0(\tau/t+\Delta t,y,\ell^0(t,y,z))$, $o(\Delta y)$ – величина высшего порядка малости относительно Δy.

Справедливы неравенства

$$\ell^{o\prime}(t,y,z)\{\Delta y(v)\}_m \geqslant \ell^{o\prime}(t,y,z)\{\Delta y^+(v)\}_m , \qquad /3.8/$$

$$\ell^{o\prime}(t,y,z)\{\Delta y(v)\}_m \leqslant -\ell^{o\prime}(t,y,z)\{\Delta y^-(v)\}_m , \qquad /3.9/$$

вытекающие непосредственно из оптимальности движений $y^o(t)$, $\tilde{y}^o(\tau)$. Сопоставляя соотношения /3.6/ - /3.9/ и учитывая непрерывную зависимость матрицы $S^{(1)}(v,t,y^o(\cdot),u^o(\cdot),\ell^o)$ от начальных данных $\{t,y\}$ получаем

$$\ell^{o\prime}(t,y,z)\{\Delta y(v)\}_m \geqslant \ell^{o\prime}(t,y,z)\{S^{(1)}(v,t+\Delta t,y^o(\cdot),u^o(\cdot/t+$$
$$+\Delta t,y,\ell^o(t,y,z)),\ell^o(t,y,z))\Delta y(t+\Delta t)\}_m + o(\Delta y), \qquad /3.10/$$

$$\ell^{o\prime}(t,y,z)\{\Delta y(v)\}_m \leqslant \ell^{o\prime}(t,y,z)\{S^{(1)}(v,t+\Delta t,y^o(\cdot),u^o(\cdot/t+$$
$$+\Delta t,y,\ell^o(t,y,z)),\ell^o(t,y,z))\Delta y(t+\Delta t)\}_m + o(\Delta y). \qquad /3.11/$$

Из /3.10/ - /3.11/ следует справедливость равенства

$$\ell^{o\prime}(t,y,z)\{\Delta y(v)\}_m = \ell^{o\prime}(t,y,z)\{S^{(1)}(v,t+\Delta t,y^o(\cdot),u^o(\cdot/t+$$
$$+\Delta t,y,\ell^o(t,y,z)),\ell^o(t,y,z))\Delta y(t+\Delta t)\}_m + o(\Delta y). \qquad /3.12/$$

Аналогичные равенства могут быть получены для $\ell^{o\prime}(t,y,z)\{\Delta z(v)\}_m$, $\ell^{o\prime}(t+\Delta t,y,z)\{\Delta y_*(v)\}_m$, $\ell^{o\prime}(t+\Delta t,y,z)\{\Delta z_*(v)\}_m$

$$\ell^{o\prime}(t,y,z)\{\Delta z(v)\}_m = \ell^{o\prime}(t,y,z)\{S^{(2)}(v,t+\Delta t,z^o(\cdot),V^o(\cdot/t+$$
$$+\Delta t,z,\ell^o(t,y,z)),\ell^o(t,y,z))\Delta z(t+\Delta t)\}_m + o(\Delta z); \qquad /3.13/$$

$$\ell^{o\prime}(t+\Delta t,y,z)\{\Delta y_*(v)\}_m = \ell^{o\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(1)}(v,t+\Delta t,y_*^o(\cdot),u^o(\cdot/t+$$
$$+\Delta t,y,\ell^o(t+\Delta t,y,z)),\ell^o(t+\Delta t,y,z))\Delta y_*(t+\Delta t)\}_m + o(\Delta y_*); \qquad /3.14/$$

$$\ell^{o\prime}(t+\Delta t,y,z)\{\Delta z_*(v)\}_m = \ell^{o\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(2)}(v,t+\Delta t,z_*^o(\cdot),V^o(\cdot/t+\Delta t,z,$$
$$\ell^o(t+\Delta t,y,z)),\ell^o(t+\Delta t,y,z))\Delta z_*(t+\Delta t)\}_m + o(\Delta z_*). \qquad /3.15/$$

В соотношениях /3.14/, /3.15/ матрицы $S^{(1)}(v,t+\Delta t,y_*^o(\cdot),u^o(\cdot/t+\Delta t,y,$ $\ell^o(t+\Delta t,y,z)),\ell^o(t+\Delta t,y,z)),S^{(2)}(v,t+\Delta t,z_*^o(\cdot),V^o(\cdot/t+\Delta t,z,\ell^o(t+\Delta t,y,z))$ вычисляются соответственно на движениях $y_*^o(\cdot)$, $z_*^o(\cdot)$ и порождающих эти движения программных управлениях $u^o(\tau/t+\Delta t,y,\ell^o(t+$ $+\Delta t,y,z))$, $V^o(\tau/t+\Delta t,z,\ell^o(t+\Delta t,y,z))$.

Найдем теперь оценки для приращений $\Delta y(t+\Delta t)$, $\Delta z(t+\Delta t)$, $\Delta y_*(t+\Delta t)$, $\Delta z_*(t+\Delta t)$.

Имеем

$$\Delta y(t+\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} f^{(1)}(\tau,y^o(\tau),u^o(\tau/t,y,\ell^o(t,y,z)))d\tau, \qquad /3.16/$$

$$\Delta z(t+\Delta t)=\int\limits_t^{t+\Delta t} f^{(2)}(\tau, z^0(\tau), v^0(\tau/t, z, \ell^0(t,y,z)))d\tau, \qquad /3.17/$$

$$\Delta y_*(t+\Delta t)=\int\limits_t^{t+\Delta t} f^{(1)}(\tau, y_*^0(\tau), u^0(\tau/t, y, \ell^0(t+\Delta t, y, z)))d\tau \qquad /3.18/$$

$$\Delta z_*(t+\Delta t)=\int\limits_t^{t+\Delta t} f^{(2)}(\tau, z_*^0(\tau), v^0(\tau/t, z, \ell^0(t+\Delta t, y, z)))d\tau. \qquad /3.19/$$

Отметим, что подынтегральные выражения в равенствах /3.16/ - - /3.19/ удовлетворяют условиям принципа максимума [3]

$$\ell^{0\prime}(t,y,z)\{S^{(1)}(\nu,\tau,y^0(\cdot),u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))f^{(1)}(\tau,y^0(\tau), u^0(\tau/t,y,\ell^0(t,y,z)))\}_m=\max_{u\in U_\tau}[\ell^{0\prime}(t,y,z)\{S^{(1)}(\nu,\tau,y(\cdot),u(\cdot), \ell^0(t,y,x))f^{(1)}(\tau,y(\tau),u)\}_m]; \qquad /3.20/$$

$$\ell^{0\prime}(t,y,z)\{S^{(2)}(\nu,\tau,z^0(\cdot),v^0(\cdot/t,z,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))f^{(2)}(\tau,z^0(\tau), v^0(\tau/t,z,\ell^0(t,y,z)))\}_m=\max_{v\in V_\tau}[\ell^{0\prime}(t,y,\tau)\{S^{(2)}(\nu,\tau,z(\cdot), v(\cdot),\ell^0(t,y,z))f^{(2)}(\tau,z(\tau),v)\}_m]; \qquad /3.21/$$

$$\ell^{0\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(1)}(\nu,\tau,y_*^0(\cdot),u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t+\Delta t,y,z)), \ell^0(t+\Delta t,y,z))\cdot f^{(1)}(\tau,y_*^0(\tau),u^0(\tau/t,y,\ell^0(t+\Delta t,y,z)))\}_m= =\max_{u\in U_\tau}[\ell^{0\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(1)}(\nu,\tau,y_*(\cdot),u(\cdot),\ell^0(t+\Delta t; y,z))f^{(1)}(\tau,y(\tau),u\}_m]; \qquad /3.22/$$

$$\ell^{0\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(2)}(\nu,\tau,z_*^0(\cdot),v^0(\cdot/t,z,\ell^0(t+\Delta t,y,z)), \ell^0(t+\Delta t,y,z))\cdot f^{(2)}(\tau,z_*^0(\tau),v^0(\tau/t,z,\ell^0(t+\Delta t,y,z)))\}_m= =\max_{v\in V_\tau}[\ell^{0\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(2)}(\nu,\tau,z_*(\cdot),v(\cdot),\ell^0(t+\Delta t, y,z))f^{(2)}(\tau,z_*(\tau),v)\}_m] \qquad /3.23/$$

при почти всех $\tau\in[t,t+\Delta t]$.

Символами $H^{(1)}(t,y[t]/U_\tau)$, $H^{(2)}(t,z[t]/V_\tau)$, $H_*^{(1)}(t,y[t]/U_\tau)$, $H_*^{(2)}(t,z[t]/V_t)$ обозначим выпуклые оболочки множеств векторов $f^{(1)}(\tau,y(\tau),u(\tau)), f^{(2)}(\tau,z(\tau),v(\tau))$, удовлетворяющих условиям принципа максимума /3.20/ - /3.23/. Множества $H^{(1)}(t,y[t]/U_\tau), H^{(2)}(t,z[t]/V_\tau)$, $H_*^{(1)}(t,y[t]/U_\tau)$, $H_*^{(2)}(t,z[t]/V_\tau)$ полунепрерывны сверху по включению относительно изменения переменных $\{t,y,z\}$. Отсюда с учетом того, что подынтегральные выражения в /3.16/ - /3.19/ удовлетворяют условиям принципа максимума /3.20/ - /3.23/, следует справедливость равенств

$$\Delta y(t+\Delta t)=f^{(1)}(t,y[t])\Delta t+o(\Delta t), \qquad /3.24/$$

$$\Delta z(t+\Delta t)=f^{(2)}(t,z[t])\Delta t+o(\Delta t), \qquad /3.25/$$

$$\Delta y_*(t+\Delta t)=f_*^{(1)}(t,y[t])\Delta t+o(\Delta t), \qquad /3.26/$$

$$\Delta z_*(t+\Delta t)=f_*^{(2)}(t,z[t])\Delta t+o(\Delta t), \qquad /3.27/$$

где векторы $f^{(1)}(t,y[t])\in H^{(1)}(t,y[t]/U_t)$, $f^{(2)}(t,z[t])\in H^{(2)}(t,z[t]/V_t)$, $f_*^{(1)}(t,y[t])\in H_*^{(1)}(t,y[t]/U_t)$, $f_*^{(2)}(t,z[t])\in H_*^{(2)}(t,z[t]/V_t)$ удовлетворяют условиям принципа максимума

$$\ell^{0\prime}(t,y,z)\{S^{(1)}(\nu,t,y^0(\cdot),u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))f^{(1)}(t,y[t])\}_m=$$
$$=\max_{f^{(1)}}[\ell^{0\prime}(t,y,z)\{S^{(1)}(\nu,t,y(\cdot),u(\cdot),\ell^0(t,y,z))f^{(1)}\}_m],\ f^{(1)}\in F^{(1)}(t,y[t]/U_t), \qquad /3.28/$$

$$\ell^{0\prime}(t,y,z)\{S^{(2)}(\nu,t,z^0(\cdot),v^0(\cdot/t,z,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))f^{(2)}(t,y[t])\}_m$$
$$=\max_{f^{(2)}}[\ell^{0\prime}(t,y,z)\{S^{(2)}(\nu,t,z(\cdot),v(\cdot),\ell^0(t,y,z))f^{(2)}\}_m],\ f^{(2)}\in F^{(2)}(t,z[t]/V_t), \qquad /3.29/$$

$$\ell^{0\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(1)}(\nu,t,y_*^0(\cdot),u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t+\Delta t,y,z)),\ell^0(t+\Delta t,y,z))f_*^{(1)}(t,$$
$$y[t])\}_m=\max_{f^{(1)}}[\ell^{0\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(1)}(\nu,t,y_*(\cdot),u(\cdot),\ell^0(t+\Delta t,y,z))\cdot f^{(1)}\}_m],$$
$$f^{(1)}\in F^{(1)}(t,y[t]/U_t), \qquad /3.30/$$

$$\ell^{0\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(2)}(\nu,t,z_*^0(\cdot),v^0(\cdot/t,z,\ell^0(t+\Delta t,y,z)),\ell^0(t+\Delta t,y,z))\cdot f_*^{(2)}(t,$$
$$z[t])\}_m=\max_{f^{(2)}}[\ell^{0\prime}(t+\Delta t,y,z)\{S^{(2)}(\nu,t,z_*(\cdot),v(\cdot),\ell^0(t+\Delta t,y,z))\cdot f^{(2)}\}_m],$$
$$f^{(2)}\in F^{(2)}(t,z[t]/V_t), \qquad /3.31/$$

$o(\Delta t)$ – величина высшего порядка малости относительно Δt. В соотношениях /3.28/ – /3.31/ символами $F^{(1)}(t,y[t]/U_t)$, $F^{(2)}(t,z[t]/V_t)$ обозначены выпуклые множества, которые пробегают соответственно векторами $f^{(1)}(t,y[t],u[t])$, $f^{(2)}(t,z[t],v[t])$ в позиции $\{t,y[t],z[t]\}$, когда векторы $u[t],v[t]$ пробегают множества U_t, V_t.

Из /3.2/, /3.3/, /3.24/ – /3.27/ получим для частного приращения $\Delta\varepsilon^0$, отвечающего приращению Δt, оценки

$$\Delta\varepsilon^0\geqslant\ell^{0\prime}(t,y,z)\{[S^{(1)}(\nu,t+\Delta t,y^0(\cdot),u^0(\cdot/t+\Delta t,y,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))\times$$
$$\times f^{(1)}(t,y[t])-S^{(2)}(\nu,t+\Delta t,z^0(\cdot),v^0(\cdot/t+\Delta t,z,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))\times$$
$$\times f^{(2)}(t,z[t])]\}_m\Delta t+o(\Delta t), \qquad /3.32/$$

$$\Delta\varepsilon^0\leqslant\ell^{0\prime}(t+\Delta t,y,z)\{[S^{(1)}(\nu,t+\Delta t,y_*^0(\cdot),u^0(\cdot/t+\Delta t,y,\ell^0(t+\Delta t,y,z)),$$
$$\ell^0(t+\Delta t,y,z))f_*^{(1)}(t,y[t])-S^{(2)}(\nu,t+\Delta t,z_*^0(\cdot),v^0(\cdot/t+\Delta t,z,\ell^0(t+\Delta t,$$
$$y,z)),\ell^0(t+\Delta t,y,z))f_*^{(2)}(t,z[t])]\}_m\Delta t+o(\Delta t). \qquad /3.33/$$

Отметим, что оценки /3.32/, /3.33/ равномерны по $y(\cdot)$, $z(\cdot)$ и $\tau\in[t,t+\Delta t]$. Разделив неравенства /3.32/, /3.33/ на Δt, переходя к пределу при $\Delta t\to 0$ и учитывая непрерывную зависимость $\ell^0(t,y,z)$ от начальных данных $\{t,y,z\}$ /которая проверяется так же, как и в линейном случае [I] /, матриц $S^{(1)}(\nu,\tau,y^0(\cdot),u^0(\cdot),\ell^0)$, $S^{(2)}(\nu,\tau,z^0(\cdot),v^0(\cdot),\ell^0)$ от начальных данных и от ℓ^0, получаем для частной производной $\partial\varepsilon^0/\partial t$ соотношение

$$\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial t}=\ell^{0\prime}(t,y,z)\Big\{\big[S^{(1)}(\nu,t,y^0(\cdot),u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))\times$$
$$\times f^{(1)}(t,y[t])-S^{(2)}(\nu,t,z^0(\cdot),v^0(\cdot/t,z,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))\times$$
$$\times f^{(2)}(t,z[t])\big]\Big\}_m. \qquad /3.34/$$

Аналогичным образом могут быть получены выражения для частных производных $\partial\varepsilon^0/\partial y_i$, $\partial\varepsilon^0/\partial z_j$:

$$\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial y_i}=-\ell^{0\prime}(t,y,z)\Big\{S_i^{(1)}(\nu,t,y^0(\cdot),u^0(\cdot/t,y,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))\Big\}_m; \qquad /3.35/$$
$$(i=1,2,\dots,n^{(1)};\ j=1,2,\dots,n^{(2)}).$$
$$\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial z_j}=\ell^{0\prime}(t,y,z)\Big\{S_j^{(2)}(\nu,t,z^0(\cdot),v^0(\cdot/t,z,\ell^0(t,y,z)),\ell^0(t,y,z))\Big\}_m, \qquad /3.36/$$

Из соотношений /3.34/ - /3.36/ следует непрерывная зависимость $\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial t}$, $\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial y_i}$, $\frac{\partial\varepsilon^0}{\partial z_j}$ от позиции $\{t,y,z\}$. Теорема доказана.

Отметим, что, как и в линейном случае [I], в рассматриваемой игре /2.I/-/2.4/ частные производные $\partial\varepsilon^0/\partial t$, $\partial\varepsilon^0/\partial y_i$, $\partial\varepsilon^0/\partial z_j$ можно получить формальным дифференцированием выражения /3.I/, игнорируя зависимость ℓ^0 от $\{t,y,z\}$.

Обозначим через U_e, V_e экстремальные стратегии первого и второго игроков соответственно, которые задаются множествами $U_e(t,y,z)_\nu$, $V_e(t,y,z)_\nu$ следующим образом. Если $\varepsilon^0(t,y,z)=0$, то $U_e(t,y,z)_\nu=U_t$, $V_e(t,y,z)_\nu=V_t$, если же $\varepsilon^0(t,y,z)>0$, то множества $U_e(t,y,z)_\nu$ складываются из всех векторов u_e, удовлетворяющих условию

$$\ell^{0\prime}(t,y,z)S^{(1)}(\nu,t,z^0(\cdot),u_e(\cdot),\ell^0(t,y,z))\cdot f^{(2)}(t,z(t),u_e)=\max_{u\in U_t}[\ell^{0\prime}(t,y,z)S^{(1)}(\nu,$$
$$t,z(\cdot),u(\cdot),\ell^0(t,y,z))f^{(1)}(t,z(t),u)]. \qquad /3.37/$$

множества $V_e(t,y,z)_\nu$ из всех векторов v_e, удовлетворяющих условию

$$\ell^{0\prime}(t,y,z)S^{(2)}(\nu,t,z^0(\cdot),v_e(\cdot),\ell^0(t,y,z))\cdot f^{(2)}(t,z(t),v_e)=$$
$$=\max_{v\in V_t}[\ell^{0\prime}(t,y,z)S^{(2)}(\nu,t,z(\cdot),v(\cdot),\ell^0(t,y,z))f^{(2)}(t,z(t),v)]. \qquad /3.38/$$

Учитывая дифференцируемость функции $\varepsilon^0(t,y,z)$, можно аналогично [I] доказать следующую теорему о седловой точке.

Т е о р е м а 3.2. Пусть в рассматриваемой игре /2.I/-/2.4/ выполнены условия /I°/ - /3°/. Тогда экстремальные стратегии

$U_e(t,y,z)_\nu$, $V_e(t,y,z)_\nu$, заданные соотношениями /3.37/, /3.38/, составляют пару оптимальных стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$, которые разрешают задачу /2.I/ - /2.4/ и доставляют ей седловую точку, причем

$$\| \{y[\nu]\}_m - \{z[\nu]\}_m \| = \varepsilon^\circ(t_0, y_0, z_0),$$

т.е. оптимальная плата игры $\gamma^\circ(t_0, y_0, z_0)$ для всякой исходной позиции равна гипотетическому рассогласованию $\varepsilon^\circ(t_0, y_0, z_0)$.

Отметим, что при доказательстве теоремы 3.2 уравнения /2.I/ - - /2.3/ трактуются как дифференциальные уравнения в контингенциях [4].

Опираясь на свойство дифференцируемости функции $\varepsilon^\circ(t, y, z)$ можно также доказать справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а 3.3. Пусть в рассматриваемой игровой задаче /2.I/ - /2.4/ выполнены условия /I°/ - /3°/ и при этом начальная позиция игры $\{t_0, y_0, z_0\}$ такова, что в некоторый момент времени $\nu = \nu^\circ$ /момент программного поглощения/ имеет место вложение

$$G^{(2)}(t_0, \nu^\circ, z_0) \subset G^{(1)}(t_0, \nu^\circ, y_0).$$

Тогда экстремальная стратегия $U_e(t,y,z)_\nu$ первого игрока, определенная условием /3.37/, гарантирует приведение системы /2.I/ - /2.3/ на заданное множество P /область влияния/ к моменту программного поглощения ν° при любой допустимой реализации $v[t]$ $(t_0 \le t \le \nu^\circ)$ управления v.

Автор благодарен Н.Н.Красовскому за внимание к работе и ценные советы.

Поступила в ред.-изд.отдел
29 июля I97I г.

Л и т е р а т у р а

I.Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. Наука, I970.

2.А.Ф.Филиппов. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, серия матем.,мех.,астрон.,физики,химии, I959, № 2.

3. Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко Математическая теория оптимальных процессов. М. Физматгиз, I96I.

4. А.Ф.Филиппов. Дифференциальные уравнения с многозначной разрывной правой частью. ДАН СССР, I963, т.I5I, № I.