Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 10.
УДК.66.021.21.

СХОДИМОСТЬ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИТИЧЕСКОГО ТИПА

В.П.Гаевой

Рассмотрим краевую задачу:

$$p(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+f(u)=\frac{\partial u}{\partial t};$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\beta_0 u\right]_{x=0}=-\beta_0 v_0(t);\ \left[\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_1 u\right]_{x=1}=\beta_1 v_1(t); \qquad /1/$$

$$u(x,t)|_{t=0}=u^0(x),$$

где функции $p(x,t)$, $q(x,t)$ определены и непрерывны для всех $x\in[0,1]$ и $t\in[0,\infty)$; $p(x,t)>0$ ограничена и имеет ограниченные производные по x до второго порядка включительно; $q(x,t)$ ограничена и имеет ограниченную производную по x; $f(u)$ непрерывна для $-\infty<u<\infty$ и имеет ограниченные первую и вторую производные; $v_0(t)$ и $v_1(t)$ ограничены; β_0 и β_1 - неотрицательные константы.

Требуется найти решение задачи /1/ в замкнутой области $0\le t\le T$ $0\le x\le 1$, где T - любая ограниченная положительная величина.

Разобьем временной интервал $[0,T]$ на N равных частей точками $t^k=k\Delta t$, где $\Delta t=\frac{T}{N}$. Отрезок $0\le x\le 1, t=t^k$ будем называть k - временным слоем. Введем следующие обозначения:

$$p^k(x)=p(x,t^k),\ q^k=q(x,t^k),\ u^k=u(x,t^k);$$
$$v_0^k=v_0(t^k),\ v_1^k=v_1(t^k),\ f^k=f(u^k).$$

Заменяя для каждого $k+1$ -го временного слоя производную по времени разностным соотношением:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t^{k+1}}=\frac{u^{k+1}-u^k}{\Delta t}$$

и сносящая нелинейный член на предыдущий временной слой $f=f^k$, получаем краевую задачу для системы, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с N неизвестными:

$$L^{k+1}u^{k+1}-\frac{1}{\Delta t}u^{k+1}=-\frac{1}{\Delta t}F^k,$$

$$B_0 u^{k+1}|_{x=0}=-\beta_0 v_0^{k+1},\ B_1 u^{k+1}|_{x=1}=\beta_1 v_1^{k+1}, \qquad /2/$$

где $\quad L^{k+1}=p^{k+1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+q^{k+1}\frac{\partial}{\partial x};\ F^k=u^k+\Delta t f^k$

и $\quad B_0=\frac{\partial}{\partial x}-\beta_0,\ B_1=\frac{\partial}{\partial x}+\beta_1$

Эта система уравнений решается последовательно для $k=1,2,..$

Решение находится по рекуррентной формуле:

$$u^{K+1}=-\frac{1}{\Delta t}\int_0^1 G^{K+1}(x,\xi)F^K(\xi)d\xi-\beta_0\gamma_0^{K+1}V_0^{K+1}+\beta_1\gamma_1^{K+1}V_1^{K+1}, \qquad /3/$$

где $G^{K+1}(x,\xi)$ - функция Грина краевой задачи:

$$L^{K+1}u-\frac{1}{\Delta t}u=0;\quad B_0u\,|_{x=0}=B_1u\,|_{x=1}=0;$$

функции $\gamma_0^{K+1}(x)$ и $\gamma_1^{K+1}(x)$ удовлетворяют однородному уравнению

$$L^{K+1}\gamma^{K+1}-\frac{1}{\Delta t}\gamma^{K+1}=0$$

и следующим граничным условиям:

$$B_0\gamma_0^{K+1}\Big|_{x=0}=B_1\gamma_1^{K+1}\Big|_{x=1}=1,$$

$$B_0\gamma_1^{K+1}\Big|_{x=0}=B_1\gamma_0^{K+1}\Big|_{x=1}=0.$$

Разобьем интервал $[0,1]$ на M частей точками $\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_M$. На каждом интервале $[\xi_i,\xi_{i+1}]$ $(i=0,\dots,M-1)$ заменим функцию F^K линейной:

$$\tilde{F}_i^K=F_i^K+\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}(F_{i+1}^K-F_i^K),$$

где $F_i^K=F^K(\xi_i)$, $\xi_i\le\xi\le\xi_{i+1}$.

Тогда рекуррентная формула /3/ перепишется в виде:

$$u^{K+1}=-\frac{1}{\Delta t}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{F_i^K\xi_{i+1}-F_{i+1}^K\xi_i}{\xi_{i+1}-\xi_i}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}G(x,\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\sum_{i=0}^{M-1}\frac{F_{i+1}^K-F_i^K}{\xi_{i+1}-\xi_i}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\xi G^{K+1}(x,\xi)d\xi-\beta_0\gamma_0^{K+1}V_0^{K+1}+\beta_1\gamma_1^{K+1}V_1^{K+1}, \qquad /4/$$

где все интегралы вычисляются аналитически.

Л е м м а I. Для решения краевой задачи

$$p(x)\frac{d^2u}{dx^2}+q(x)\frac{du}{dx}-cu=-f(x);$$

$$\left[\frac{du}{dx}-\beta_0u\right]_{x=0}=-\beta_0V_0;\ \left[\frac{du}{dx}+\beta_1u\right]_{x=1}=\beta_1V_1,$$

где $p(x)>0,\ c>0,\ \beta_0>0,\ \beta_1>0$

имеет место следующая оценка:

$$|u|\le\max\left\{\frac{1}{c}\max_x|f(x)|;\ |V_0|;\ |V_1|\right\}. \qquad /5/$$

Действительно, если $u(x)$ достигает своего максимального значения внутри области, то в точке максимума $\frac{du}{dx}=0$, $\frac{d^2u}{dx^2}\le0$ и из уравнения следует неравенство:

$$u(x) \le \frac{1}{c} \max_x f(x) \le \frac{1}{c} \max_x |f(x)| .$$

Если $u(x)$ достигает своего наибольшего значения в точке $x=0$, то $\frac{du}{dx} \le 0$ и из граничного условия следует неравенство:

$$u(x) \le v_0 \le |v_0| .$$

Если наибольшее значение достигается при $x=1$, то $\frac{du}{dx} \geqslant 0$ и $u(x) \le v_1 \le |v_1|$.

Объединяя эти неравенства, получаем:

$$u(x) \le \max\left\{\frac{1}{c}\max_x |f(x)|,\ |v_0|,\ |v_1|\right\}.$$

Если $u(x)$ достигает своего минимального значения внутри области, в точке минимума $\frac{du}{dx}=0$, $\frac{d^2u}{dx^2} \geqslant 0$ и из уравнения следует:

$$u(x) \geqslant \frac{1}{c}\min_x f(x) \geqslant -\frac{1}{c}\max_x |f(x)| .$$

Если $u(x)$ достигает своего минимального значения в точке $x=0$ или $x=1$, то

$$u(x) \geqslant -\max\{|v_0|,\ |v_1|\} .$$

Из последних двух неравенств вытекает следующее неравенство:

$$u(x) \geqslant -\max\left\{\frac{1}{c}\max_x |f(x)|,\ |v_0|,\ |v_1|\right\}, \qquad /6/$$

а из неравенств /5/ и /6/ следует утверждение леммы

$$|u(x)| \le \max\left\{\frac{1}{c}\max_x |f(x)|,\ |v_0|,\ |v_1|\right\},$$

Для удобства рассуждений введем следующие обозначения:

u^k $(k=0,1,\dots,N)$ – значения решения задачи /1/ для $t^k = k\Delta t$;

$\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^N$ – решения системы /2/;

$\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \dots, \tilde{u}^N$ – функции, найденные по рекуррентной формуле /4/;

$$V^k(x) = u^k(x) - \bar{u}^k(x) ;\quad U^k(x) = \bar{u}^k(x) - \tilde{u}^k(x) ;$$
$$W^k(x) = u^k(x) - \tilde{u}^k(x) ;\quad \|V^k\| = \max_x |V^k(x)|$$

$$\|U^k\| = \max_x |U^k(x)| ;\quad \|W^k\| = \max_x |W^k(x)| ;$$
$$\Delta\xi = \max_i (\xi_{i+1} - \xi_i) .$$

Т е о р е м а. Пусть на функции $p(x,t), q(x,t), f(u)$, $v_0(t)$, $v_1(t)$ краевой задачи /1/ наложены следующие ограничения:

$p(x,t)$ – непрерывна и ограничена вместе с производными

$$\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial p}{\partial t},\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} ;$$

$q(x,t)$ – непрерывна и ограничена вместе с производными

$$\frac{\partial q}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial q}{\partial x}\ ;$$

$V_0(t), V_1(t)$ - непрерывные ограниченные функции, имеющие ограниченные первые производные;

$f(u)$ - представима в виде $Ku + f_1(u)$,где K - ограниченная константа, а $f_1(u)$ ограничена и непрерывна вместе с производными до второго порядка включительно.

Кроме того, пусть выполнены условия согласования:

$$B_0\left[L^0 u^0 + f(u^0)\right]_{x=0} = -\beta_0 \frac{dV_0}{dt}\ ;$$

$$B_1\left[L^0 u^0 + f(u^0)\right]_{x=1} = \beta_1 \frac{dV_1}{dt}\ ;$$

тогда при Δt и $\Delta \xi$, стремящихся к нулю так, что отношение $\frac{\Delta \xi^2}{\Delta t}$ тоже стремится к нулю, $\|W^k\|$ стремится к нулю равномерно для всех $k=0,1,\dots,N$.

Поскольку

$$\|W^k\| = \max_x |u^k(x) - \tilde{u}^k(x)| \le \max_x |u^k(x) - \bar{u}^k(x)| + \\ + \max_x |\bar{u}^k(x) - \tilde{u}^k(x)| = \|V^k\| + \|U^k\|, \qquad /7/$$

то достаточно доказать равномерное по k стремление к нулю величин: $\|V^k\|$, $\|U^k\|$.

Вычитая из уравнения /I/, записанного для k + I-го временного слоя, уравнение системы /2/, получаем равенство:

$$p^{k+1}\frac{d^2V^{k+1}}{dx^2} + q^{k+1}\frac{dV^{k+1}}{dx} + f(u^{k+1}) - f(\bar{u}^k) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=(1+k)\Delta t} - \frac{\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^k}{\Delta t}.$$

Учитывая следующие равенства

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t^{k+1}} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=\tau}\Delta t$$

$$f(u^{k+1}) = f(u^k) + f'(\theta)(u^{k+1} - u^k) = f(u^k) + f'(\theta)\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=\alpha}\Delta t$$

$$f(u^k) - f(\bar{u}^k) = f'(\gamma)(u^k - \bar{u}^k)$$

Где θ и γ принимают некоторые промежуточные значения между u^{k+1} и u^k ,и между u^k и $\bar{u}^k$ соответственно. $t^k \le \alpha$, $\tau \le t^{k+1}$

получаем краевую задачу для $V^{k+1}(x)$:

$$p^{k+1}\frac{d^2V^{k+1}}{dx^2} + q^{k+1}\frac{dV^{k+1}}{dx} - \frac{1}{\Delta t}V^{k+1} = -\frac{1}{\Delta t}\left[(1+\Delta t f')V^k - (f'u_t - \frac{1}{2}u_{tt})\Delta t^2\right],$$

$$\left[\frac{dV^{k+1}}{dx} - \beta_0 V^{k+1}\right]_{x=0} = \left[\frac{dV^{k+1}}{dx} + \beta_1 V^{k+1}\right]_{x=1} = 0.$$

Применяя лемму I, получаем оценку:

$$\|V^{k+1}\| \le (1 + \Delta t\cdot S_1)\|V^k\| + \Phi\Delta t^2\ , \qquad /8/$$

где

$$S_1 = \max_{u} |f'(u)| ; \quad \Phi = \max_{x,t} \left[S_1 |u_t| + \frac{1}{2} |u_{tt}| \right].$$

Применяя оценку /8/ последовательно для $k-1$, $k-2,\ldots,1,0$, получаем

$$\|V^{k+1}\| \le (1+\Delta t \cdot S_1)^{k+1} \|V^0\| + \Phi \Delta t \left[1 + (1+\Delta t \cdot S_1) + \ldots + (1+\Delta t S_1)^k\right].$$

Так как $k+1 \le N \le \frac{T}{\Delta t}$; $(1+\Delta t S_1)^{k+1} \le e^{S_1 T}$ и

$$1 + (1+\Delta t \cdot S_1) + \ldots + (1+\Delta t S_1)^k \le \frac{(1+\Delta t S_1)^N}{S_1 \Delta t} \le \frac{e^{S_1 T}}{S_1 \Delta t},$$

то получаем оценку, справедливую для всех k.

$$\|V^k\| \le \left(\|V^0\| + \frac{\Phi}{S_1} \Delta t\right) e^{S_1 T} \qquad /9/$$

Легко проверить, что функции $\tilde{u}^k(x)$, полученные по рекуррентной формуле /4/, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$L^{k+1} \tilde{u}^{k+1} - \frac{1}{\Delta t} \tilde{u}^{k+1} = -\frac{1}{\Delta t} \tilde{F}^k(\tilde{u}^k) \qquad /10/$$

с граничными условиями:

$$B_0 \tilde{u}^{k+1}|_{x=0} = -\beta_0 V_0^{k+1} ; \quad B_1 \tilde{u}^{k+1}|_{x=1} = \beta_1 V_1^{k+1}.$$

Вычитая из $k+1$-го уравнения системы /2/ $k+1$-е уравнение системы /10/, получаем следующее уравнение относительно U^{k+1}

$$LU^{k+1} - \frac{1}{\Delta t} U^{k+1} = -\frac{1}{\Delta t}\left[F^k(\bar{u}^k) - \tilde{F}(\tilde{u}^k)\right] \qquad /11/$$

с однородными граничными условиями:

$$B_0 U^{k+1}|_{x=0} = B_1 U^{k+1}|_{x=1} = 0.$$

Применяя лемму I к решению краевой задачи /11/, получаем оценку для $\|U^{k+1}\|$:

$$\|U^{k+1}\| \le \max_x |F(\bar{u}^k) - \tilde{F}(\tilde{u}^k)| = \|F(\bar{u}^k) - \tilde{F}(\tilde{u}^k)\| . \qquad /12/$$

Так как

$$\|F(\bar{u}^k) - \tilde{F}(\tilde{u}^k)\| \le \|F(\bar{u}^k) - \tilde{F}(\bar{u}^k)\| + \|\tilde{F}(\bar{u}^k) - \tilde{F}(\tilde{u}^k)\|, \qquad /13/$$

то достаточно оценить слагаемые, стоящие с правой стороны неравенства

$$\|F(\bar{u}^k) - \tilde{F}(\bar{u}^k)\| \le \max_i \max_x \left| F^k(x) - F_i^k - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}(F_{i+1}^k - F_i^k) \right|.$$

Представляя $F^k(x)$ и F_{i+1}^k в следующем виде

$$F^k(x) = F_i^k(x) + \frac{dF}{dx}\Big|_{x=x_i}(x - x_i) + \frac{1}{2} F_{xx}(x - x_i)^2,$$

$$F_{i+1}^k = F_i^k + F_x\Big|_{x=x_i}(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} F_{xx}(x_{i+1} - x_i)^2$$

и подставляя в последнее неравенство, получаем

$$\|F(\bar u^k)-\tilde F(\bar u^k)\| \le \max_i \max_x \frac{1}{2}|F^k_{xx}(x_{i+1}-x_i)(x-x_i)| \le$$
$$\le \frac{1}{2}\max_x [F^k_{xx}|\Delta\xi^2 \le$$
$$\le \frac{1}{2}[(1+\Delta t S_1)\max_k |u^k_{xx}| + \Delta t\cdot S_2 \max \|u_x^k\|]\,\Delta\xi^2,$$

где $S_1 = \max_u |f'(u)|$; $S_2 = \max_u |f''(u)|$; т.е.

$$\|F(\bar u^k)-\tilde F(\bar u^k)\| \le R_1\Delta\xi^2 \qquad /14/$$

равномерно для всех $k = 0,1,\ldots, N$.

$$\|\tilde F(\bar u^k)-\tilde F(\tilde u^k)\| = \max_i \max_x |F^k_i - \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}(F^k_{i+1}-F^k_i)|,$$

где $F^k_i = F_i(\bar u^k) - F_i(\tilde u^k)$.

Так как

$$\left|\frac{(x_{i+1}-x_i)F_i^k + (x-x_i)F^k_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}\right| \le \max_i |F^k_i|$$

и

$$\max_i |F^k_i| \le (1+\Delta t S_1)\|U^k\|,$$

то

$$\|\tilde F(\bar u^k)-\tilde F(\tilde u^k)\| \le (1+\Delta t\cdot s_1)\|U^k\|. \qquad /15/$$

Учитывая /12/,/13/, /14/, /15/, получаем оценку:

$$\|U^{k+1}\| \le (1+\Delta t\cdot S_1)\|U^k\| + R_1\Delta\xi^2. \qquad /16/$$

Применяя оценку /16/ последовательно для $k-1, k-2,\ldots, 0$, получаем

$$\|U^{k+1}\| \le (1+\Delta t\cdot S_1)^{k+1}\|U^0\| + [1+(1+\Delta t S_1)+\ldots+$$
$$+(1+\Delta t S_1)^k]R_1\Delta\xi^2 \le (\|U^0\| + \frac{R_1}{S_1}\frac{\Delta\xi^2}{\Delta t})e^{S_1T}. \qquad /17/$$

Подставляя оценки /9/, /17/ в неравенство /7/, получаем оценку, не зависящую от k :

$$\|W^k\| \le [\|V^0\| + \|U^0\| + \frac{R_1}{S_1}\frac{\Delta\xi^2}{\Delta t} + \frac{\Phi}{S_1}\Delta t]e^{S_1T}.$$

Погрешности в начальных условиях могут быть выбраны точно, т.е.

$$\|V^0\| = \|U^0\| = 0$$

Величины $\max|u_t|$ и $\max|u_{xx}|$ ограничены в силу предположений теоремы [I] . Ограниченность $\|\bar u^k_x\|$, $\|u^k_{xx}\|$ доказана в [2] . Таким образом, равномерное относительно k стремление $\|W^k\|$ к нулю доказано.

Поступила в редакцию 7.9.1971 г.

Литература

1. А.Фридман. Уравнения в частных производных параболического типа,- "Мир", Москва, 1968.

2. А.М.Ильин, А.С.Калашников, О.А.Олейник, У,М,Н, т. 17, вып. 3/105/, 1968.