Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 10.
УДК.519.1.

О ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛАХ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ ГРАФОВ ПЕТЕРСЕНА

В.Э.Хенкин

При исследовании реберной раскраски графов в работе [2] были рассмотрены обобщенные графы Петерсена $G(n,k)$, где параметры n и k – натуральные числа, $n > k$.

В этой статье будет рассмотрен один их частный, но важный случай, когда n и k взаимно просты.

Пусть для произвольного неориентированного графа G S – наименьшее возможное число такое, что в графе G существует система из S не пересекающихся по вершинам простых циклов четной длины, покрывающих все вершины данного графа.

Тогда определим характеристику $\lambda(G)$ графа G, полагая

$$\lambda(G) = \begin{cases} 0, & \text{если в } G \text{ не существует описанной выше системы циклов}, \\ S & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

В этой статье дано полное описание характеристики $\lambda(G(n,k))$ для случая, когда n взаимно просто с k, $k = 2,3$.

Перейдем к математической формулировке задачи:

Пусть $X_n = \{x_0, x_1, \dots x_{n-1}\}$, $Y_n = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ – непересекающиеся n – элементные множества. Определим взаимно однозначное отображение $f_k : X_n \to Y_n$ следующим образом:

$$y_j = f_k(x_i), \quad 0 \le j, \ i \le n-1, \qquad /0.1/$$

тогда и только тогда, когда

$$j \equiv ki \pmod n. \qquad /0.2/$$

Когда n и k взаимно просты, отображение f_k определено. В дальнейшем будем иметь в виду только этот случай.

Обобщенным графом Петерсена назовем граф $G(n,k) = (V, E)$, где $V = X_n \cup Y_n$, $E = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, $U_1 = \{(x_i, x_{i+1}) / i = \overline{0, n-1}\}$,

$$U_2 = \{(y_j, y_{j+1}) / j = \overline{0, n-1}\},$$

$$U_3 = \{(x_i, y_j) / y_j = f_k(x_i); \ j, i = \overline{0, n-1}\}.$$

Как и всюду в этой статье, здесь суммы индексов рассматриваются по модулю n.

З а м е ч а н и е 1. $G(n,k)$ – связный, неориентированный, однородный степени 3 граф с числом вершин, равным $2n$.

Отметим, что для любых целых p и q в графе $G(n,k)$ существует автоморфизм $\varkappa_{pq} : G(n,k) \to G(n,k)$, где

$$\alpha_{pq}(x_i)=x_{i+p}, \quad \alpha_{pq}(y_j)=y_{j+q}.$$

В дальнейшем мы будем писать, что граф $G(n,k)$ обладает свойством Λ, если существуют такие целые p и q что граф $\alpha_{pq}(G(n,k))$ обладает свойством Λ. Например, в формулировке леммы 2 на стр. 59 гамильтонов цикл γ в графе $G(n,2)$ может и не обладать свойством /3.14/, но найдутся такие целые p и q, что гамильтонов цикл $\alpha_{pq}(\gamma)$ в графе $\alpha_{pq}(G(n,2))$ свойством /3.14/ обладает.

Пусть натуральное число m удовлетворяет соотношениям:

$$km \equiv 1 (mod\, n), \quad 0 < m < n, \qquad /0.3/$$

которыми оно определяется однозначно.

Рассмотрим отображение $g_m: Y_n \to X_n$ такое, что $x_i = g_m(y_j)$, где $i \equiv mj (mod\, n), 0 \le i, j \le n-1$. Покажем, что

$$g_m = f_k^{-1}. \qquad /0.4/$$

Действительно,

$$g_m(f_k(x_i)) = g_m(y_j) = g_m(y_{ki (mod\, n)}) = x_{mki (mod\, n)} = x_{mk (mod\, n) \cdot i} = x_i,$$

что и доказывает соотношение /0.4/.

Следуя Бержу [1], фактороидом $\varphi^{(t)}$ в произвольном неориентированном графе G назовем систему из t попарно не пересекающихся по вершинам простых циклов, покрывающих все вершины данного графа. В частности, при $t=1$ фактороид $\varphi^{(1)}$ называется гамильтоновым циклом в графе G. В случае, когда G - неориентированный, однородный степени 3 граф, система из t указанных выше циклов четной длины называется циклом Тэйта $\theta^{(t)}$ в графе G /см. [2] /. В работе [2] приведены такие соотношения для характеристики $\lambda(G(n,k))$:

$$\lambda(G(5,2)) = \lambda(G(5,3)) = 0 \qquad /0.5/$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(G(n,2)) = 1, \text{ если } n \not\equiv 5 (mod\, 6), \\ \lambda(G(n,2)) > 0, \text{ если } n \equiv 5 (mod\, 6), \\ n \text{ - нечетно, } n \geq 7 . \end{array}\right. \qquad /0.6/$$

В этой статье будут доказаны:

Т е о р е м а I.

$$\lambda(G(n,2)) = \begin{cases} 1, \text{ при } n \not\equiv 5 (mod\, 6), \\ 2, \text{ при } n \equiv 5 (mod\, 6), \end{cases}$$

для n и 2 взаимно простых, $n \geq 7$.

Т е о р е м а 2. $\lambda(G(n,3)) = 1$ для n и 3 взаимно простых, $n \geq 7$.

§ I. Простейшие свойства гамильтоновых циклов в $G(n,2)$

Пусть $k = 2$, $s \geq 2$ и $n = 2s+1$. /I.I/

Тогда из /0.3/ получим

$$m = s + 1 . \qquad /1.2/$$

Соотношения /0.1/ и /0.2/ при $k = 2$ примут вид:

$$y_j = f_2(x_i); \ j \equiv 2i \pmod{n}; \ 0 \le i, j \le n-1 \qquad /1.3/$$

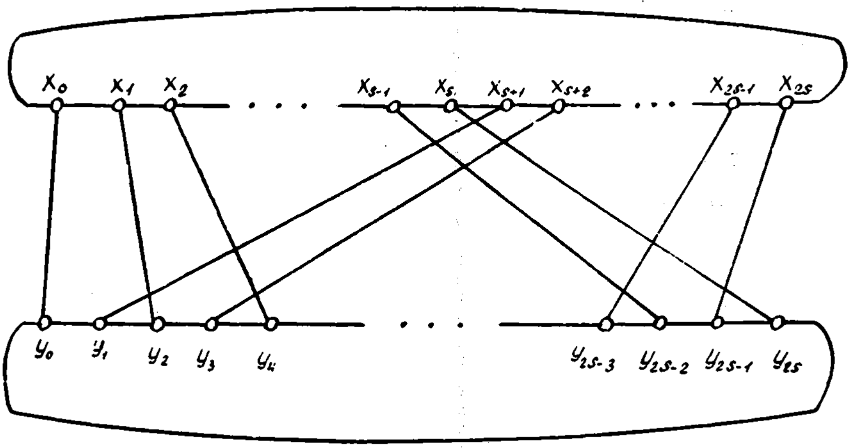


Рис. 1.

На рис. 1 изображен граф $G(n,2)$.

Пусть φ - некоторый фактороид в $G(n,2)$.

Рассмотрим последовательности:

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \qquad /1.4/$$
$$\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1, \dots, \overline{\varphi}_{n-1},$$

где

$$\varphi_i = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, f_2(x_i)) \in \varphi; \\ 0, & \text{если } (x_i, f_2(x_i)) \overline{\in} \varphi; \end{cases}$$

$$\overline{\varphi}_j = \begin{cases} 1, & \text{если } (f_2^{-1}(y_j), y_j) \in \varphi; \\ 0, & \text{если } (f_2^{-1}(y_j), y_j) \overline{\in} \varphi. \end{cases} \qquad /1.5/$$

Каждый элемент x_i из X_n пометим числом φ_i , а элемент y_j из Y_n числом $\overline{\varphi}_j$.

О п р е д е л е н и е 1. Сегменты вида

$$\delta_u = [x_u, x_{u+1}, \dots, x_{v-1}, x_v] \qquad /1.6/$$

либо вида

$$\Delta_{u'} = [y_{u'}, y_{u'+1}, \dots, y_{v'-1}, y_{v'}] \qquad /1.7/$$

назовем φ - сегментами, если для них имеют место соответсвенно соотношения:

$$\varphi_u = \varphi_v = 1,$$
$$(x_t, x_{t+1}) \in \varphi, \ u \le t \le v-1. \qquad /1.8/$$

$$\overline{\varphi}_{u'} = \overline{\varphi}_{v'} = 1,$$
$$(y_{t'}, y_{t'+1}) \in \varphi, \quad u' \leq t' \leq v'-1. \qquad /1.9/$$

Отметим некоторые свойства φ - сегментов:

1°. φ - сегменты попарно не пересекаются;

2°. В каждом φ - сегменте только два граничных элемента помечены единицей;

3°. Совокупность φ - сегментов вида /1.6/ покрывает множество X_n, а вида /1.7/ - множество Y_n;

4°. В X_n и Y_n нулем помечено нечетное число элементов.

Свойства 1°- 3° следуют из определения 1, а 4° следует из 1°-3° и /1.1/.

Пусть γ - гамильтонов цикл в $G(n,2)$. Через $|\Delta|$ обозначим число элементов сегмента Δ.

Предложение 1. Пусть Δ_0 - γ - сегмент такой,что $|\Delta_0| > 3$. Тогда $|\Delta_0|$ - четное число.

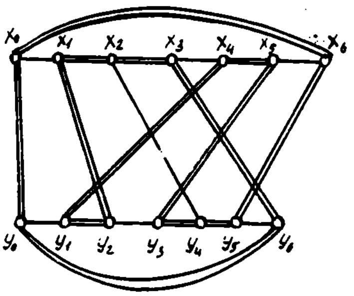
Доказательство. Пусть это не так, Тогда для некоторых γ и r, $2 \leq r \leq s$, где $n = 2s+1$, существует γ -сегмент вида $\Delta_0 = [y_0, y_1, \dots, y_{2r}]$. Из свойства 2° имеем $\overline{\gamma}_0 = \overline{\gamma}_{2r} = 1;$ $\overline{\gamma}_2 = \overline{\gamma}_4 = \dots = \overline{\gamma}_{2r-2} = 0.$

Тогда учитывая /1.3/ и /1.5/, получаем

$$\gamma_0 = \gamma_r = 1; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{r-1} = 0.$$

Отсюда следует, что сегмент $\delta_0 = [x_0, \dots, x_r]$ является γ - сегментом, причем элементы из $\delta_0 \cup \Delta_0$ образуют цикл длины, меньшей, чем $2n$, что противоречит гамильтоновости γ. Таким образом предложение 1 доказано.

Приведем примеры гамильтоновых циклов в графах $G(7,2)$ и $G(9,2)$ и цикла Тэйта $\theta^{(2)}$ в графе $G(11,2)$:



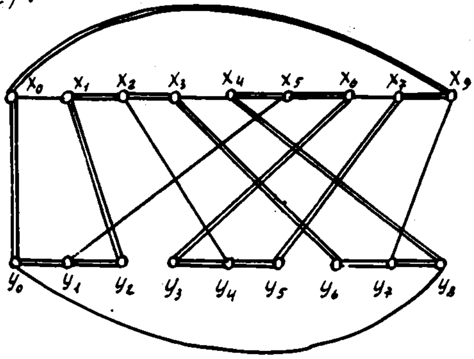


Рис. 2.

Соответствующие циклы показаны на этих рисунках двойной и волнистой линиями.

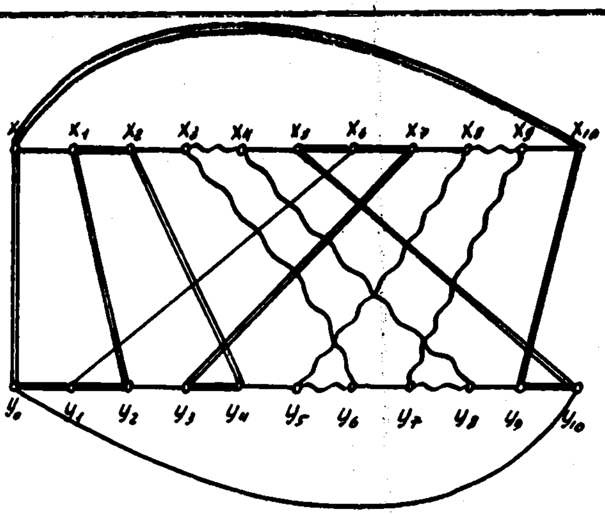


Рис. 3.

§ 2. Операции над графами $G(n, 2)$ и $G(n, 3)$

Пусть $k = 3$, n взаимно просто с k, $n \geq 7$, тогда для n возможно два выражения:

$$n = 3s + 1, \qquad /2.1/$$

$$n = 3s + 2, \qquad /2.2/$$

Отсюда, учитывая /0,3/, получим для m соответственно:

$$m = 2s + 1, \qquad /2.3/$$

$$m = s + 1. \qquad /2.4/$$

Определение 2. A_2 - операцией /при $n \geq 7$ /, B - операцией /при $n \geq 9$ / над графом $G(n, 2)$ и A_3 - операцией /при $n \geq 10$ / над графом $G(n, 3)$ назовем преобразование этих графов по следующим правилам:

A_2 - операция

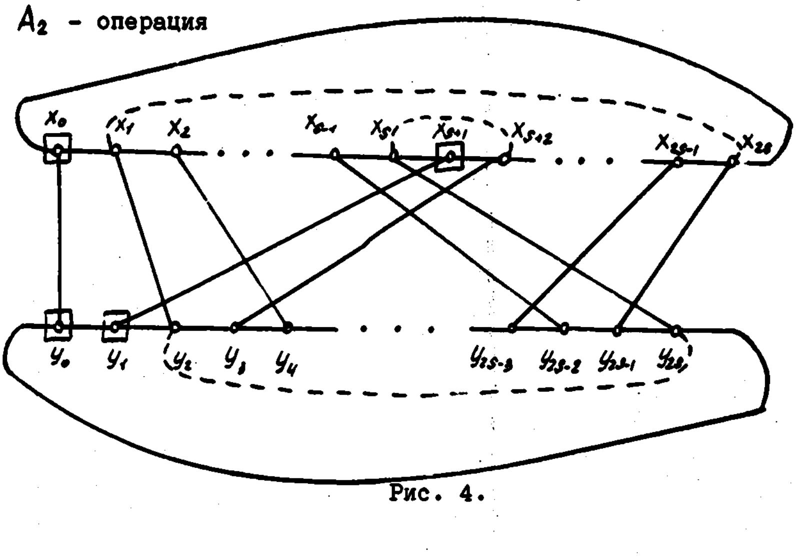


Рис. 4.

B - операция

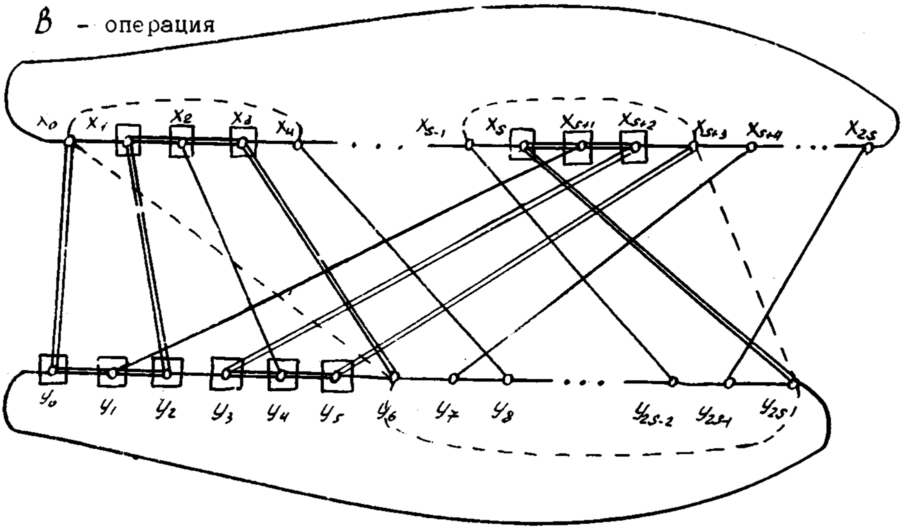


Рис. 5.

A_3 - операция
$n = 3s + 1$

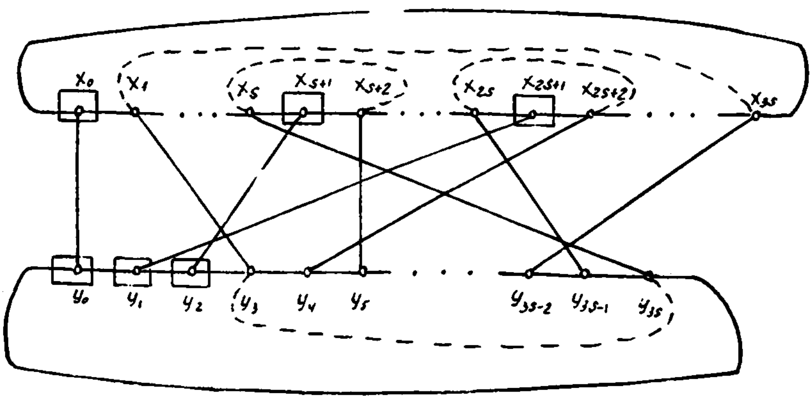


Рис. 6.

A_3 - операция
$n = 3s + 2$

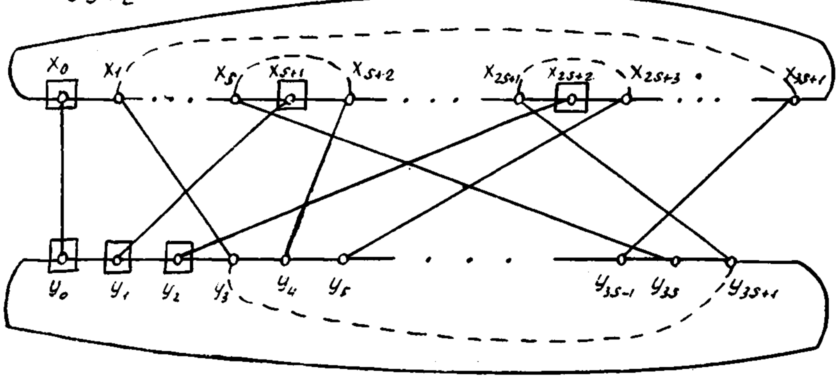


Рис. 7.

На этих рисунках те вершины, которые удаляются из графов при соответствующих операциях, заключены в рамки. Удаляются также ребра, инцидентные этим вершинам, а добавляются ребра, показанные пунктиром. Из приведенных рисунков нетрудно установить соотношения:

$$A_2(G(n,2)) = G(n-2,2); \quad B(G(n,2)) = G(n-6,2); \quad A_3(G(n,3)) = G(n-3,3) \tag{2.5}$$

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть $n \geqslant 7$ и в $G(n,2)$ существует гамильтонов цикл γ такой, что

$$\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}_1 = 0 \tag{2.6}$$

Тогда в $G(n-2,2)$ тоже существует гамильтонов цикл.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого факта следует из определения 2, поскольку, как видно из рис. 4, при A_2 - операции в этом случае удаляются внутренние элементы γ - сегментов. Все же связи между γ -сегментами остаются неизменными. Требуемое утверждение получаем применением /2.5/.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $n \geqslant 9$ и в $G(n,2)$ существует гамильтонов цикл γ такой, что сегменты $\Delta_0=[y_0, y_1, y_2]$ и $\Delta_3=[y_3, y_4, y_5]$ являются γ - сегментами. Тогда в $G(n-6,2)$ существует гамильтоное цикл.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения 2 следует, что B - операция над графом $G(n,2)$ заменяет связные цепи

$N_1 = x_0, y_0, y_1, y_2, x_1, x_2, x_3, y_6$ и $N_2 = x_{s+3}, y_5, y_4, y_3, x_{s+2}, x_{s+1}, x_s, y_{2s}$

гамильтонова цикла γ /показанные на рисунке 5 двойным контуром/ соответственно на ребра (x_0, y_6) и (x_{s+3}, y_{2s}). Отсюда, учитывая /2.5/, получаем доказательство предложения 3.

Операции B^{-1} и A_3^{-1}, обратные к B и A_3 определим соотношениями:

$$B^{-1}(B(G(n,2))) = G(n,2), \quad A_3^{-1}(A_3(G(n,3))) = G(n,3). \tag{2.8}$$

П р е д л о ж е н и е 4. Пусть $\theta^{(t)}$ - цикл Тэйта в $G(n,2)$, удовлетворяющей условию

$$\Delta_0 = [y_0, y_1, y_2] \text{ и } \Delta_{n-3} = [y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}] \text{ - } \theta^{(t)}\text{- сегменты.} \tag{2.9}$$

Тогда в $G(n+6,2)$ существует цикл Тэйта $\tilde{\theta}^{(t)}$, удовлетворяющий условию /2.9/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из определения 2, указанный цикл Тэйта можно получить из $\theta^{(t)}$ применением B^{-1} - операции к графу $G(n,2)$ при условии, что ребра (x_0, x_1) и (x_{s-1}, x_s) не принадлежат циклу Тэйта $\theta^{(t)}$. Но если бы например, ребро (x_{s-1}, x_s) принадлежало $\theta^{(t)}$ то, применяя /2.9/, получили бы, что цикл длины 5

$$y_{2s-2}, y_{2s-1}, y_{2s}, x_s, x_{s-1}$$

входит в состав $\theta^{(t)}$, а это противоречит предположению относительно $\theta^{(t)}$. Аналогичным образом показывается отсутствие у $\theta^{(t)}$ ребра (x_0, x_1), и предложение 4 полностью доказано.

Как нетрудно заметить, у гамильтоновых циклов и цикла Тэйта, приведенных на рис. 2 и 3, отсутствуют ребра (x_0, x_1) и (x_{s-1}, x_s), что позволяет применением B^{-1} - операции к указанным графам получить соответственно гамильтоновы циклы и цикл Тэйта $\theta^{(2)}$, удовлетворяющие /2.9/. А тогда, из предложения 4 последовательным применением B^{-1} - операции получим

Следствие

$$\lambda(G(n,2)) = 1, \quad \text{при } n \not\equiv 5 (mod 6);$$
$$0 < \lambda(G(n,2)) \leq 2, \quad \text{при } n \equiv 5 (mod 6); \qquad /2.10/$$
$$n \geq 7, \ n = 2s+1.$$

Предложение 5. Пусть γ - гамильтонов цикл в $G(n,3)$, удовлетворяющий условию

$$\bar{\gamma}_0 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0, \qquad /2.11/$$
$$\bar{\gamma}_{n-3} = \bar{\gamma}_{n-2} = \bar{\gamma}_{n-1} = 1.$$

Тогда в $G(n+3, 3)$ тоже существует гамильтонов цикл, удовлетворяющий условию /2.11/.

Доказательство. Из определения 2 следует, что указанный гамильтонов цикл можно получить из γ применением A_3^{-1} - операции к графу $G(n, 3)$ при условии, что

$$(x_{3s}, x_0), (x_s, x_{s+1}), (x_{2s}, x_{2s+1}) \in \gamma \qquad /2.12/$$
$$(n = 3s+1)$$

$$(x_{3s+1}, x_0), (x_s, x_{s+1}), (x_{2s+1}, x_{2s+2}) \in \gamma \qquad /2.13/$$
$$(n = 3s+2)$$

Из /2.11/ вытекает, что условия /2.12/ и /2.13/ при соответствующих n выполняются и предложение 5 полностью доказано. Приведем примеры гамильтоновых циклов в графах $G(7,3)$, $G(8,3)$ и $G(11,3)$.

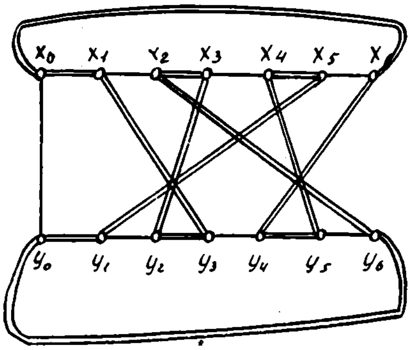


Рис. 8.

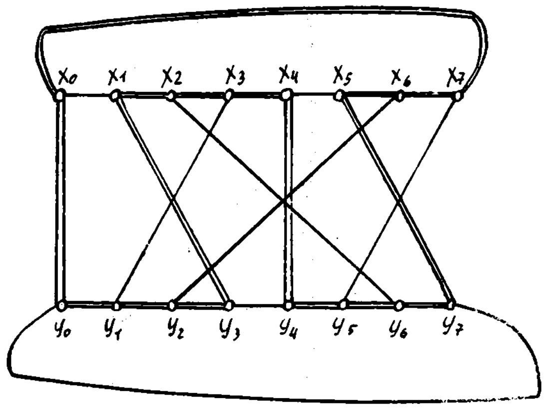


Рис. 9.

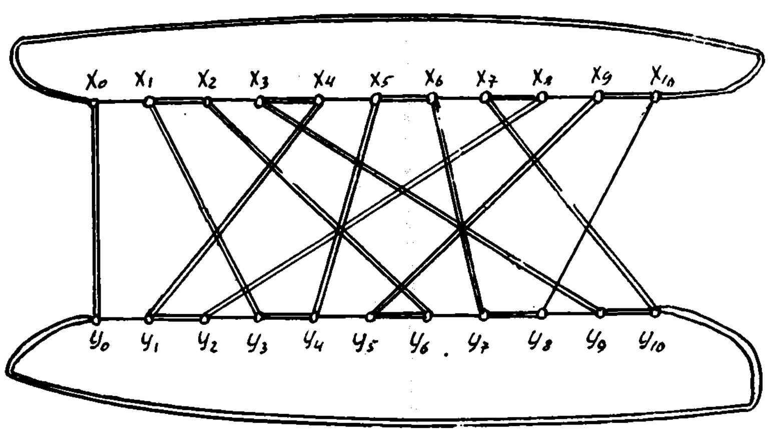


Рис. 10.

Гамильтоновы циклы показаны на рис. 8 – 10 двойным контуром. Как видно из приведенных рисунков, гамильтоновы циклы в $G(7,3)$ и $G(11,3)$ удовлетворяют условиям /2.12/ и /2.13/. А тогда из предложения 5 получим доказательство теоремы 2.

§ 3. Свойства гамильтоновых циклов в $G(n,2)$

Л е м м а 1. Пусть γ – произвольный гамильтонов цикл в $G(n,2)$ и τ – некоторый γ – сегмент. Тогда

$$|\tau| \leq 3. \qquad /3.1/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что лемма неверна, т.е. в $G(n,2)$ найдется гамильтонов цикл γ' такой, что среди γ' – сегментов существуют сегменты с числом элементов не меньше 4. Тогда из предложения 1 следует, что каждый из этих сегментов содержит четное число элементов. Из свойства 2° тогда получаем, что в подграфе (Y_n, U_2) можно выделить целое число ν пар, состоящих из соседних в этом подграфе элементов /т.е. пар вида $\{y_j, y_{j+1}\}$ /, которые помечены нулем, $\nu < \frac{n}{2}$. Если $\nu > 1$, то, полагая $\mu = \nu - 1$ и применяя к графу $G(n,2)$ последовательно A_2 - операцию μ раз, мы получаем по предложению 2, гамильтонов цикл в графе $G(n-2\mu, 2)$, для которого уже

$$\nu = 1. \qquad /3.2/$$

Поэтому с самого начала можно предположить, что γ' удовлетворяет соотношению /3.2/.

Пусть δ - γ' - сегмент вида /I.6/. Покажем, что

$$|\delta| \le 3. \qquad /3.3/$$

Пусть это не так. Не нарушая общности, предположим, что x_0 и x_1 - внутренние элементы δ. Тогда

$$\gamma'_0 = \gamma'_1 = 0 .$$

Учитывая /I.5/, получаем отсюда

$$\bar{\gamma}'_0 = \bar{\gamma}'_2 = 0 . \qquad /3.4/$$

Из /3.4/ и определения гамильтонова цикла следует, что $\bar{\gamma}'_1 = 0$. Но тогда из предложения I имеем, что $\nu > 1$, а это противоречит /3.2/.

Не нарушая общности, предположим теперь, что

$$\Delta_0 = [y_0, y_1, y_2, y_3] \quad - \gamma' - \text{сегмент} \qquad /3.5/$$

Тогда из /3.3/ следует, что

$$\delta_0 = [x_0, x_1, x_2] \quad \text{и} \quad \delta_s = [x_s, x_{s+1}, x_{s+2}] - \gamma' - \text{сегменты} \qquad /3.6/$$

Проверим равенство

$$\bar{\gamma}'_j = 1, \quad j = \overline{4, 2s} . \qquad /3.7/$$

Предположим, что /3.7/ неверно, тогда можно указать наименьший индекс j_0, для которого

$$\bar{\gamma}'_{j_0} = 0, \quad 4 \le j_0 \le 2s . \qquad /3.8/$$

Пусть $x_{i_0} = f_2^{-1}(y_{j_0})$. Тогда из /3.6/ следует, что либо $i_0 \in [3, s-1]$, либо $i_0 \in [s+3, 2s]$.

I. $i_0 \in [3, s-1]$. Положим $i_0 = 4 + 2r$, где $0 \le r < \frac{s-2}{2}$. Возможность такого представления для i_0 обусловлена /3.6/ и тем фактом, что $\gamma'_{i_0} = 0$. Имеем тогда

$$j_0 = 4r + 8 . \qquad /3.9/$$

Из /3.2/, /3.5/ и /3.8/ получаем, что

$$\Delta_{j_0-1} = [y_{j_0-1}, y_{j_0}, y_{j_0-1}] \quad - \gamma' - \text{сегмент} \qquad /3.10/$$

Подставляя вместо j_0 его значение из /3.9/ и учитывая /3.5/ и /3.8/, получим, что сегмент $[y_4, y_{4r+6}]$ есть объединение γ' - сегментов, содержащих по два элемента. Но это противоречит тому, что в $[y_4, y_{4r+6}]$ входит нечетное число элементов. Следовательно, $i_0 \bar{\in} [3, s-1]$.

2. $i_0 \in [s+3, 2s]$. Положим $i_0 = s+2z+4$, где $0 \leqslant z < \frac{s-5}{2}$. Тогда

$$j_0 = 2s+1+4z+7-(2s+1) = 4z+7. \qquad /3.11/$$

Из /3.10/ и /3.11/ имеем, что $\gamma'_{2z+3} = \gamma'_{2z+4} = 1$. Но ребро (x_{2z+3}, x_{2z+4}) не принадлежит γ', так как в противном случае его концы наряду с элементами из Δ_{i_0-1} образовывали бы цикл длины, меньшей, чем $2n$, а это противоречило бы гамильтоновости γ'. Следовательно, сегмент $[x_3, x_{2z+3}]$ есть объединение γ' - сегментов. Покажем, что все указанные γ' -сегменты содержат по два элемента. Действительно, пусть это не так, тогда найдется некоторое i, $3<i<2z+3\leqslant s$, такое, что $\gamma_i = 0$. Пусть $y_j = f_2(x_i)$, тогда $\bar{\gamma}_j = 0$. По самому выбору i

$$j = 2i < j_0 \leqslant 2s.$$

Но это противоречит выбору j_0, что и требовалось показать. Отсюда следует, что в $[x_3, x_{2z+3}]$ входит четное число элементов, чего не может быть, и, следовательно, $i_0 \bar{\in} [s+3, 2s]$. Из рассмотрений, приведенных выше, вытекает, что не существует такого i_0, что $x_{i_0} = f_2^{-1}(y_{j_0})$, а это противоречит тому, что f_2 - взаимно однозначное отображение X_n на Y_n. Следовательно, /3.8/ не имеет места и /3.7/ доказано.

Соотношение /3.7/ наряду с /3.5/ дает, что в Y_n нулем помечено четное число элементов, а это по свойству 4° противоречит гамильтоновости γ'. Таким образом лемма I доказана.

Предложение 6. Пусть φ - фактороид в $G(n,2)$ такой, что

а/ каждый φ - сегмент содержит не более трех элементов:

в/ каждая пара φ - сегментов вида /I.6/ /вида /I.7//, содержащих по три элемента, разделена в подграфе (X_n, U_1) /в подграфе (Y_n, U_2) /, по крайней мере, двумя φ - сегментами того же вида, содержащими по два элемента.

Тогда φ не является гамильтоновым циклом в $G(n,2)$

Доказательство. Пусть

$$\delta_0 = [x_0, x_1, x_2] \quad \varphi \text{ - сегмент} \qquad /3.12/$$

Из /3.12/, а/ и в/ получим тогда, что

$$\delta_3 = [x_3, x_4], \ \delta_5 = [x_5, x_6], \ \Delta_1 = [y_1, y_2, y_3], \qquad /3.13/$$
$$\Delta_4 = [y_4, y_5], \ \Delta_6 = [y_6, y_7] - \varphi \text{ - сегменты.}$$

Предположим, что φ - гамильтонов цикл в $G(n,2)$. Тогда $(x_{s+1}, x_{s+2}) \bar{\in} \varphi$, так как в противном случае имели бы цикл

$$x_{s+1}, x_{s+2}, y_3, y_2, y_1,$$

длина которого меньше, чем $2n$, что противоречит нашему предположению.

Поскольку $x_{s+3} = f_2^{-1}(y_5)$, то из /3.13/ вытекает, что

$$\delta_{s+2} = [x_{s+2}, x_{s+3}] \ - \varphi \text{ - сегмент.}$$

Далее, как следует из а/, возможно всего два случая:

1. $\delta_{s+4}=[x_{s+4}, x_{s+5}]$ - φ - сегмент / $n \geq 11$ /.

2. $\delta_{s+4}=[x_{s+4}, x_{s+5}, x_{s+6}]$ - φ - сегмент / $n \geq 13$ /.

Случай I.

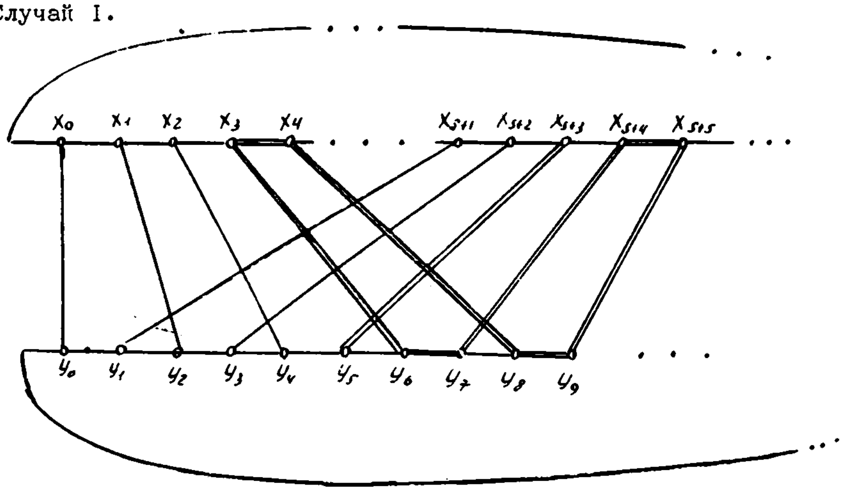


Рис. II.

Случай 2.

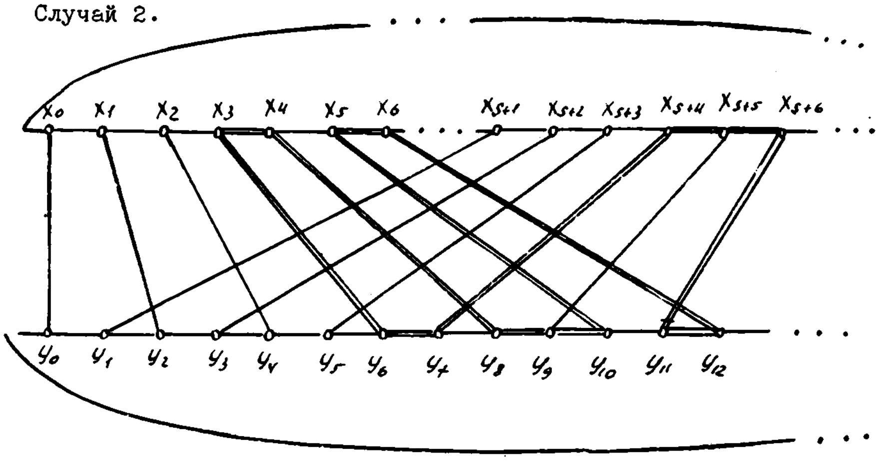


Рис. I2.

Из этих рисунков видно, что φ содержит циклы, длины которых меньше, чем $2n$ /эти циклы показаны двойным контуром/. Следовательно, φ не может быть гамильтоновым циклом, что и требовалось доказать.

Л е м м а 2. Пусть $n \geq 11$ и γ - гамильтонов цикл в $G(n,2)$ Тогда в подграфе (Y_n, U_2) существует пара соседних γ - сегментов, содержащих по три элемента

$$[y_0, y_1, y_2] ; [y_3, y_4, y_5] . \qquad /3.14/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть лемма 2 неверна. Тогда существует гамильтонов цикл γ', для которого /3.14/ не выполняется Покажем, что γ' удовлетворяет условиям а/ и в/ предложения 6.

В самом деле, условие а/ для γ' выполняется в силу леммы I.

Проверим сначала справедливость условия в/ для γ' - сегментов вида /I.7/. Действительно, если бы в/не имело места, то для γ'- сегментов вида /I.7/ по самому выбору γ' имели бы, что $\Delta_0 = [y_0, y_1, y_2]$, $\Delta_3 = [y_3, y_4]$, $\Delta_5 = [y_5, y_6, y_7]$- γ'- сегменты. Учитывая лемму I, получим тогда, что

$$\delta_5 = [x_5, x_{5+1}, x_{5+2}] \quad - \gamma' \text{ - сегмент.}$$

Но тогда $\delta_{5+3} = [x_{5+3}, x_{5+4}]$ - γ' - сегмент, причем элементы, входящие в него, вместе с элементами из Δ_5 образуют цикл длины, меньшей, чем $2n$. А это противоречит гамильтоновости γ'. Таким образом, условие в/ для γ' - сегментов вида /I.7/ проверено.

Используя этот факт, покажем теперь справедливость в/ и для γ' - сегментов вида /I.6/. Предположим, однако, что условие в/ для γ' - сегментов вида /I.6/ не имеет места. Тогда в подграфе (X_n, U_1) найдется пара γ'- сегментов, содержащих по три элемента, разделенных в этом подграфе не более чем одним γ' - сегментом, содержащим два элемента. Не нарушая общности, можно предположить, что могут иметь место такие два случая:

1. $\delta_0 = [x_0, x_1, x_2]$, $\delta_3 = [x_3, x_4, x_5]$ $-\gamma'$- сегменты $(n \geqslant 11)$ /3.15/

2. $\delta_0 = [x_0, x_1, x_2]$, $\delta_3 = [x_3, x_4]$, $\delta_5 = [x_5, x_6, x_7]$-$\gamma'$- сегменты $(n \geqslant 13)$ /3.16/

Из /3.16/, учитывая лемму I, получаем, что

$$\Delta_1 = [y_1, y_2, y_3] \quad \text{и } \Delta_{11} = [y_{11}, y_{12}, y_{13}] \text{- } \gamma' \text{- сегменты.}$$

По доказанному ранее между этими сегментами в подграфе (Y_n, U_2) больше нет γ' - сегментов, содержащих три элемента. Отсюда следует, что сегмент $[y_4, y_{10}]$ есть объединение γ' - сегментов, содержащих по два элемента, но это противоречит тому, что число элементов этого сегмента нечетно. Полученное противоречие показывает, что /3.16/ не имеет места. Аналогичным образом показывается, что и /3.15/ не имеет места. И справедливость условия в/ для γ' окончательно установлена. Согласно предложению 6 γ' не может быть гамильтоновым циклом, что противоречит предположению. Таким образом лемма 2 доказана.

С л е д с т в и е I. Произвольный гамильтонов цикл γ в графе $G(n, 2)$, $n \geqslant 11$, с помощью β^{-1} - операции можно продолжить до гамильтонова цикла в $G(n+6, 2)$, а с помощью β - операции можно сузить до гамильтонова цикла в $G(n-6, 2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы I и предложений 3 и 4.

С л е д с т в и е 2. Пусть $n = 6t + 5$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда в графе $G(n, 2)$ не существует гамильтонова цикла.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если бы в $G(n, 2)$ был гамильтонов цикл, то, учитывая следствие I, последовательным применением β - операции к графу $G(n, 2)$ t раз можно было бы получить гамильтонов цикл в графе $G(5, 2)$, а это противоречит /0.5/, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы I вытекает из следствия 2 из леммы 2 и соотношения /2.IO/.

Поступила в редакцию I9.IO.I97I г.

Литература

I. К.Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., I962.

2. Mark E .Watckins,A theorem on tait coloring with an application to the generalized Petersen graphs. J.Combin.Theory,1969, v.6,N2,152-164.