Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1971 г. выпуск 10.
УДК.519.95.

СИНТЕЗ L - СИСТЕМ С ДВУМЯ ЛИМИТИРУЮЩИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Г.А.Нудельман

При моделировании непрерывных процессов с лимитирующим фактором важно уметь строить динамическую систему по заданной заранее фазовой картине. Подобная задача для систем линейных в углах была решена в работе /I/ в случае, когда фазовое пространство двумерно.

Настоящая статья содержит алгоритм построения так называемой L - системы, фазовая картина которой тождественна данной, если процессы и потоки компонент в них заданы, а число лимитирующих компонент равно двум.

Мы будем использовать терминологию и обозначения, принятые в /I/ и /2/.

I. В двумерном случае L - система может быть записана в виде:

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \min(z_1, \beta_k z_2), \quad i = 1,2. \qquad /I/$$

Задача состоит в том, чтобы при фиксированных β_k подобрать a_{ik} так, чтобы фазовая картина системы /I/ была тождественна данной. При этом все рассмотрение ведется только в положительном ортанте.

Считаем, что $0<\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_N$. Положительный ортант разбивается лучами $z_1=\beta_k z_2$ $(k=1,\ldots,N)$ на конусы, которые мы обозначим через $U_1,\ldots,U_{N+1}$. В конусе U_k система /I/ представима в виде

$$\dot{\bar{z}} = A_k \bar{z},$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sum_{e=1}^{N} a_{1e} & 0 \\ \sum_{e=1}^{N} a_{2e} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_k = \begin{pmatrix} \sum_{e=k}^{N} a_{1e} & \sum_{e=1}^{k-1} a_{1e}\beta_e \\ \sum_{e=k}^{N} a_{2e} & \sum_{e=1}^{k-1} a_{2e}\beta_e \end{pmatrix} \text{ при } k=2,\ldots,N, \quad A_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{e=1}^{N} a_{1e}\beta_e \\ 0 & \sum_{e=1}^{N} a_{2e}\beta_e \end{pmatrix}$$

Обозначим

$$x_k = \sum_{e=k}^{N} a_{1e}, \quad y_k = \sum_{e=k}^{N} a_{2e} \quad (k=1,\ldots,N).$$

Тогда

$$A_1=\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_k=\begin{bmatrix} x_k & \sum_{e=1}^{k-1} \beta_e (x_e - x_{e+1}) \\ y_k & \sum_{e=1}^{k-1} \beta_e (y_e - y_{e+1}) \end{bmatrix} \quad (k=2,\dots,N),$$

$$A_{N+1} = \begin{bmatrix} 0 & \sum_{e=1}^{N-1} \beta_e (x_e - x_{e+1}) + \beta_N x_N \\ 0 & \sum_{e=1}^{N-1} \beta_e (y_e - y_{e+1}) + \beta_N y_N \end{bmatrix} \qquad /2/$$

Очевидно,

$a_{1k}=x_k-x_{k+1}$, $a_{2k}=y_k-y_{k+1}$ для $k=1,\dots,N-1$ и $a_{1N}=x_N$, $a_{2N}=y_N$. /3/

Если мы найдем параметры $x_k, y_k\ (k=1,\dots,N)$ так, что в конусе U_k система $\dot{\Xi}=A_k \Xi$ имеет нужную фазовую картину, то по формулам /3/ можно будет определить коэффициенты искомой L - системы.

2. Пусть $\lambda_{k1}, \lambda_{k2}$ собственные числа матрицы A_k, где $k=2,\dots,N$. Будем предполагать, что $\lambda_{k1} \neq \lambda_{k2}$ и $\lambda_{ki} \neq 0\ (i=1,2)$. Тогда при $k=2,\dots,N$ имеем

$$|A_k - \lambda_{ki} E| = \lambda_{ki}^2 - (x_k + \alpha_{k-1} - \beta_{k-1} y_k)\lambda_{ki} +$$
$$+ x_k(\alpha_{k-1} - \beta_{k-1} y_k) - y_k(\gamma_{k-1} - \beta_{k-1} x_k) = 0. \qquad /4/$$

Здесь используются обозначения:

$$\alpha_{k-1} = \beta_1 y_1 + (\beta_2 - \beta_1) y_2 + \dots + (\beta_{k-1} - \beta_{k-2}) y_{k-1} \ (k>2), \ \alpha_1 = \beta_1 y_1,$$
$$\gamma_{k-1} = \beta_1 x_1 + (\beta_2 - \beta_1) x_2 + \dots + (\beta_{k-1} - \beta_{k-2}) x_{k-1} \ (k>2), \ \gamma_1 = \beta_1 x_1.$$

Система /4/ представляет собой систему из $2(N-1)$ уравнений относительно x_k, y_k в предположении, что λ_{ki} известны. Фазовая картина в конусе U_k существенным образом определяется значениями корней λ_{ki}. Поэтому мы выберем в качестве управляющих параметров числа λ_{ki}. При этом x_k, y_k будут определены почти всегда однозначно через λ_{ki}, y_1, y_2, кроме определенных случаев, которые будут рассмотрены ниже. В самом деле, вычтем из уравнения $|A_k - \lambda_{k1} E| = 0$ уравнение $|A - \lambda_{k2} E| = 0$. Тогда

$$x_k = \lambda_{k1} + \lambda_{k2} - \alpha_{k-1} + \beta_{k-1} y_k \quad (k=2,\dots,N). \qquad /5/$$

Пусть $y_2 \neq 0$. Тогда из уравнения $|A_2 - \lambda_{21} E| = 0$ найдем x_1. Подставив $x_1,\dots,x_k\ (k \geqslant 3)$ в уравнения $|A_k - \lambda_{ki} E| = 0\ (i=1,2)$, получим

$$(-\gamma_{k-1} + \beta_{k-1}\alpha_{k-1}) y_k = (-\lambda_{k1} + \alpha_{k-1})(-\lambda_{k2} + \alpha_{k-1}) \quad (k \geqslant 3). \qquad /6/$$

Отсюда если $f_k = -\gamma_{k-1} + \beta_{k-1}\alpha_{k-1} \neq 0$ при $k \geqslant 3$, то y_k определяется однозначно через $\lambda_{ki}, x_1, \dots, x_{k-1}, y_1, \dots, y_{k-1} (k \geqslant 3)$. Таким образом, в случае, когда $f_3 \neq 0, \dots, f_N \neq 0$ все $x_k\ (k=1,\dots,N)$, $y_k\ (k=3,\dots,N)$ выразятся через $y_1, y_2, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{N1}, \lambda_{N2}$ /всего $2N$ параметров/.

Выясним геометрический смысл условия $f_k = 0$. Заметим, что

$$A_{k-1}\begin{pmatrix}\gamma_{k-1}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_{k-1}\\ \alpha_{k-1}\end{pmatrix},$$

т.е. $(\gamma_{k-1}, \alpha_{k-1})$ - направление траектории, проходящей в конусе U_{k-1}, в момент пересечения точки $(\beta_{k-1}, 1)$, лежащей на луче $z_1=\beta_{k-1}z_2$. Нормаль к этому лучу равна $(1,-\beta_{k-1})$. Поэтому $f_k=0$ тогда и только тогда, когда траектория, проходящая через конус U_{k-1} имеет в точке $(\beta_{k-1}, 1)$ направление, параллельное лучу $z_1=\beta_{k-1}z_2$. Если в конусе U_{k-1} задан центр, или фокус, то, очевидно, тогда, что $f_k\neq 0$.

3. Пусть данная фазовая картина удовлетворяет двум следующим условиям:

/а/ ни один из лучей $z_1=\beta_k z_2$ $(k=1,...,N)$ не является исключительным;

/б/ во всех конусах точки покоя седлового или центрального типа, кроме, быть может, второго конуса.

Из первого условия следует, что $f_k\neq 0$ для $k=3,...,N$ / тогда лучи $z_1=\beta_k z_2$, $k=2,...,N-1$ не исключительные/.

Рассмотрим конус U_k при $2\le k\le N$. Пусть $\bar z_i^{\,0}=(z_{1i}^0, z_{2i}^0)$ - собственный вектор матрицы A_k, отвечающий числу λ_{ki} $(i=1,2)$. Так как $A_k\bar z_i^{\,0}=\lambda_{ki}\bar z_i^{\,0}$, то $y_k z_{1i}^0+(\alpha_{k-1}-\beta_{k-1}y_k-\lambda_{ki})z_{2i}^0=0$. Если $y_k\neq 0$, то последнее равенство означает, что отличный от нулевого вектор $(y_k,\theta_{ki})=(y_k,\alpha_{k-1}-\beta_{k-1}y_k-\lambda_{ki})$ ортогонален вектору $\bar z_i^{\,0}$. С помощью этого вектора условие, выражающее тот факт, что исключительное направление, соответствующее λ_{ki}, лежит внутри, а направление, соответствующее λ_{kj}, лежит вне конуса U_k и не совпадает с лучами $z_1=\beta_k z_k$, $z_1=\beta_{k-1}z_2$, может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned}&(y_k\beta_k+\theta_{ki})(y_k\beta_{k-1}+\theta_{ki})<0,\\ &(y_k\beta_k+\theta_{kj})(y_k\beta_{k-1}+\theta_{kj})>0.\end{aligned}\qquad /7/$$

Л е м м а I. Для данной фазовой картины, удовлетворяющей условиям /а/ и /б/, существует L - система, фазовая картина которой тождественна данной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рекуррентные соотношения /5/,/6/ позволяют строить L - систему по шагам. Рассмотрим сначала конус U_2. Пусть в нем задан центр. Мы получим нужную картину, если зафиксируем y_1, $y_2\neq 0$ и выберем $\lambda_{21}=\alpha+i\beta$, $\lambda_{22}=\alpha-i\beta$ $(\beta\neq 0)$ Допустим в конусе U_2 задано седло или узел. Фиксируем $y_1>0$, $y_2>0$. Из условий /7/

$$\begin{aligned}&(\alpha_2-\lambda_{21})(\alpha_1-\lambda_{21})<0,\\ &(\alpha_2-\lambda_{22})(\alpha_1-\lambda_{22})>0.\end{aligned}$$

Отсюда $\lambda_{21}\in(\alpha_1,\alpha_2)(\alpha_1>0)$, и мы получаем узел в U_2, если выберем $\lambda_{22}\in(\alpha_2,\infty)=I$ /тогда $|\lambda_{21}|<|\lambda_{22}|$ и $\lambda_{21}\lambda_{22}>0$ /, и седло, если $\lambda_{22}\in(-\infty,0)=J$.

Рассмотрим теперь конус U_K, когда $2 < k \leq N$. Предположим, что матрицы $A_1, \ldots, A_{k-1}$ построены. Тогда если в конусе U_K задан центр, то мы получим требуемую картину, если выберем $\lambda_{K1} = \alpha + i\beta$, $\lambda_{K2} = \alpha - i\beta\ (\beta \neq 0)$. При этом из условия /а/ $f_K \neq 0$, т.е. соотношение /6/ однозначно определит y_K:

$$y_K = \frac{(-\lambda_{K1} + \alpha_{K-1})(-\lambda_{K2} + \alpha_{K-1})}{f_K}, \qquad /8/$$

а из /5/ найдем x_K.

Пусть теперь в конусе U_K задано седло. Подставляя /8/ в условие /7/, получаем

$$Z_{K1} = (y_K\beta_K + \theta_{K1})(y_K\beta_{K-1} + \theta_{K1}) = (\alpha_{K-1} - \lambda_{K1})^2[\lambda_0^K - \lambda_{K2}]\frac{\beta_K - \beta_{K-1}}{f_K},$$

$$Z_{K2} = (y_K\beta_K + \theta_{K2})(y_K\beta_{K-1} + \theta_{K2}) = (\alpha_{K-1} - \lambda_{K2})^2[\lambda_0^K - \lambda_{K1}]\frac{\beta_K - \beta_{K-1}}{f_K},$$

где обозначено

$$\lambda_0^K = \frac{f_K}{\beta_K - \beta_{K-1}} + \alpha_{K-1}.$$

Если $\lambda_{Ki} \neq \alpha_{K-1}\ (i = 1,2)$, то $y_K \neq 0$. Тогда условие $Z_{K1} < 0$, $Z_{K2} > 0$ /см. /7// эквивалентно тому, что

$$\begin{aligned} (\lambda_0^K - \lambda_{K2})f_K &< 0, \\ (\lambda_0^K - \lambda_{K1})f_K &> 0. \end{aligned} \qquad /9/$$

Если $f_K > 0$, то из /9/ следует, что мы получим седло в U_K, если выберем $\lambda_{K1} < \lambda_0^K$, а $\lambda_{K2} > \lambda_0^K$. При $\lambda_0^K \geq 0$ выбираем $\lambda_{K1} < 0$, $\lambda_{K2} > \lambda_0^K$. При $\lambda_0^K < 0$ выбираем $\lambda_{K1} < \lambda_0^K$, $\lambda_{K2} > 0$. В обоих случаях найдем бесконечные интервалы I_1, I_2, в которых выбираются $\lambda_{K1}, \lambda_{K2}$ соответственно так, чтобы $\alpha_{K1} \neq \alpha_{K-1}$, $\alpha_{K2} \neq \alpha_{K-1}$. Очевидно, что при $f_K < 0$ можно действовать аналогичным образом. Лемма доказана.

4. Пусть по-прежнему выполнено условие /а/ пункта 3,но ограничение /б/ снято. Для того чтобы в конусе $U_K\ (k \geq 3)$ можно было построить узел достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} &\lambda_{Ki} \neq \alpha_{K-1},\ f_K(\lambda_0^K - \lambda_{K2}) < 0,\ f_K(\lambda_0^K - \lambda_{K1}) > 0, \\ &\lambda_{K1} \cdot \lambda_{K2} > 0,\ |\lambda_{K1}| < |\lambda_{K2}|. \end{aligned} \qquad /10/$$

Для совместности совокупности условий /10/ необходимо и достаточно, чтобы $f_K \cdot \lambda_0^K > 0$. Тогда при $f_K > 0$ выбираем $\lambda_{K1} \in (0, \lambda_0^K)$, $\lambda_{K2} \in (\lambda_0^K, \infty)$, $\lambda_{Ki} \neq \alpha_{K-1}$, а при $f_K < 0$ выбираем $\lambda_{K1} \in (\lambda_0^K, 0)$, $\lambda_{K2} \in (-\infty, \lambda_0^K)$, $\lambda_{Ki} \neq \alpha_{K-1}$. Итак, на $(k-1)$ -м шаге должно быть выполнено условие $f_K \cdot \lambda_0^K > 0$.

Имеем

$$f_K \cdot \lambda_0^K = \frac{1}{\beta_K - \beta_{K-1}}(-\gamma_{K+1} + \beta_{K-1}\alpha_{K-1})(-\gamma_{K-1} + \beta_K\alpha_{K-1}).$$

Поэтому условие $f_k \cdot \lambda_0^k > 0$ эквивалентно неравенству

$$(-\gamma_{k-1} + \beta_{k-1}\alpha_{k-1})(-\gamma_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) > 0. \qquad /11/$$

Покажем, что условие /11/ можно удовлетворить в любом случае при $k=3$, а при $k > 3$ в том случае, когда в конусе U_{k-1} было задано седло или центр.

Рассмотрим сначала конус U_3. Пусть во втором конусе был задан центр и пусть $\beta' \geqslant \beta_2$, $\lambda_{21} = \alpha + i\beta$, $\lambda_{22} = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$. Нетрудно найти

$$-\gamma_2 + \beta'\alpha_2 = \frac{1}{y_2}\left[\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta_1 y_1 + \beta_1^2 y_1^2 - \beta_1^2 y_1 y_2\right] - \\ -(\beta_2 - \beta_1)(2\alpha + \beta_1 y_2 - \alpha_1) + \beta'\alpha_2. \qquad /12/$$

Фиксируем $y_1, y_2 \neq 0$ и выбираем $\beta \neq 0$ так, чтобы выражение /12/ при $\beta' = \beta_2$ и $\beta' = \beta_3$ имело один и тот же знак. Очевидно, это возможно. Тогда выполнено /11/, и в конусе U_3 можно построить узел.

Пусть теперь во втором конусе требуется построить седло или узел. В этом случае /см. лемму 1/ λ_{22} выбирается из бесконечного интервала I или $\mathcal{J}$, а $\lambda_{21} \in (\alpha_1, \alpha_2)$.

Подобно /12/, для $\beta' \geqslant \beta_2$ найдем

$$-\gamma_2 + \beta'\alpha_2 = \frac{1}{y_2}\left[\lambda_{21}\lambda_{22} - \lambda_{21}\beta_1 y_1 - \lambda_{22}\beta_1 y_1 + \beta_1^2 y_1^2 - \beta_1^2 y_1 y_2\right] - \\ -(\beta_2 - \beta_1)(\lambda_{21} + \lambda_{22} - \alpha_1 + \beta_1 y_2) + \beta'\alpha_2 = \frac{\lambda_{21} - \alpha_2}{y_2}\lambda_{22} + C(\beta', \lambda_{21}). \qquad /13/$$

Фиксируем $\lambda_{21} \in (\alpha_1, \alpha_2)$ и выбираем $\lambda_{22} \in I(\mathcal{J})$ так, чтобы $(-\gamma_2 + \beta_2\alpha_2) \times (-\gamma_2 + \beta_3\alpha_2) > 0$, что и требовалось.

Рассмотрим, наконец, конус U_k, $k > 3$. Пусть в конусе U_{k-1} был задан центр. Так же, как и ранее, для $\beta' \geqslant \beta_{k-1}$ найдем

$$-\gamma_{k-1} + \beta'\alpha_{k-1} = -\gamma_{k-2} + \beta'\alpha_{k-2} - (\beta_{k-1} - \beta_{k-2})(2\alpha - \alpha_{k-2}) + \\ + (\beta' - \beta_{k-2})(\beta_{k-1} - \beta_{k-2})\frac{\beta^2 + (-\alpha + \alpha_{k-2})^2}{f_{k-1}}. \qquad /14/$$

Здесь $\alpha = Re\,\lambda_{k-1,1}$, $\beta = Im\,\lambda_{k-1,1}$. Указав $\beta \neq 0$ такое, что /14/ имеет один и тот же знак для $\beta' = \beta_{k-1}$ и $\beta' = \beta_k$, мы, как и в предыдущем случае, сможем удовлетворить требуемому неравенству /11/.

Пусть в конусе U_{k-1} задано седло. Тогда

$$-\gamma_{k-1} + \beta'\alpha_{k-1} = -\gamma_{k-2} + \beta'\alpha_{k-2} - (\beta_{k-1} - \beta_{k-2})(\lambda_{k-1,1} + \lambda_{k-1,2} - \alpha_{k-2}) + \\ + (\beta' - \beta_{k-2})(\beta_{k-1} - \beta_{k-2})\frac{(-\lambda_{k-1,1} + \alpha_{k-2})(-\lambda_{k-1,2} + \alpha_{k-2})}{f_{k-1}}. \qquad /15/$$

Напомним /см. лемму 1/, что $\lambda_{k-1,i} \in I_i$. Пусть для определенности $I_1 \subset (-\infty, 0)$, $I_2 \subset (0, \infty)$. Если $f_{k-1} > 0$, то выберем $\lambda_{k-1,1} \in I_1$ так, что $-\lambda_{k-1,1} + \alpha_{k-2} > 0$. При этом коэффициент в /15/ при $\lambda_{k-1,2}$

$$\left[-(\beta_{k-1} - \beta_{k-2}) - (\beta' - \beta_{k-2})(\beta_{k-1} - \beta_{k-2})\frac{-\lambda_{k-1,1} + \alpha_{k-2}}{f_{k-1}}\right] < 0$$

для всех $\beta' \geq \beta_{k-1}$. Поэтому найдем $\lambda_{k-1,2} \in I_2$ такое, что $\lambda_{k-1,2} \neq \alpha_{k-2}$ и выполнено /II/.

При $f_{k-1} < 0$ поступаем аналогично.

Предположим теперь, что в конусе U_{k-1} был узел, причем на $(k-2)$-м шаге имело место неравенство $f_{k-2} \cdot \lambda_0^{k-2} > 0$. Здесь $k > 3$. Тогда для $\beta' \geq \beta_{k-1}$

$$-\gamma_{k-1} + \beta' \alpha_{k-1} = N_{\beta'}^{k-1} - K_{\beta'}^{k-1} \lambda_{k-1,1}, \qquad /16/$$

где

$$K_{\beta'}^{k-1} = Z(\beta')(\lambda_0^{k-1}(\beta') - \lambda_{k-1,2}), \quad N_{\beta'}^{k-1} = -\gamma_{k-2} + \beta' \alpha_{k-2} + Z(\beta') \lambda_0^{k-1}(\beta')(\alpha_{k-2} - \lambda_{k-1,2}),$$

$$Z(\beta') = \frac{(\beta' - \beta_{k-2})(\beta_{k-1} - \beta_{k-2})}{f_{k-1}}, \quad \lambda_0^{k-1}(\beta') = \frac{f_{k-1}}{\beta' - \beta_{k-2}} + \alpha_{k-2}.$$

Заметим, что $\lambda_0^{k-1}(\beta_{k-1}) = \lambda_0^{k-1}$. Допустим $f_{k-1} > 0$. Тогда $\lambda_0^{k-1} > 0$ и $\lambda_{k-1,1}$ выбиралось в интервале $(0, \lambda_0^{k-1})$ так, чтобы $\lambda_{k-1,1} \neq \alpha_{k-2}$, а $\lambda_{k-1,2}$ выбиралось в интервале $(\lambda_0^{k-1}, \infty)$, причем $\lambda_{k-1,2} \neq \alpha_{k-2}$. Так как $\lambda_0^{k-1}(\beta'') < \lambda_0^{k-1}(\beta')$ при $\beta'' > \beta' \geq \beta_{k-1}$, то $K_{\beta'}^{k-1} < 0$ для всех $\beta' \geq \beta_{k-1}$.

Ищем $\lambda_{k-1,1} \in (0, \lambda_0^{k-1})$, $\lambda_{k-1,1} \neq \alpha_{k-2}$ такое, что

$$(N_{\beta_k}^{k-1} - K_{\beta_k}^{k-1} \lambda_{k-1,1})(N_{\beta_{k-1}}^{k-1} - K_{\beta_{k-1}}^{k-1} \lambda_{k-1,1}) > 0. \qquad /17/$$

Ввиду того, что $K_{\beta_k}^{k-1} \cdot K_{\beta_{k-1}}^{k-1} > 0$ неравенство /17/ имеет решение в интервале $(0, \lambda_0^{k-1})$ лишь в том случае, если

$$\min\left(\frac{N_{\beta_k}^{k-1}}{K_{\beta_k}^{k-1}}, \frac{N_{\beta_{k-1}}^{k-1}}{K_{\beta_{k-1}}^{k-1}}\right) > 0 \text{ или } \max\left(\frac{N_{\beta_k}^{k-1}}{K_{\beta_k}^{k-1}}, \frac{N_{\beta_{k-1}}^{k-1}}{K_{\beta_{k-1}}^{k-1}}\right) < \lambda_0^{k-1},$$

Но

$$\frac{N_{\beta_{k-1}}^{k-1}}{K_{\beta_{k-1}}^{k-1}} = \frac{f_{k-1} + (\beta_{k-1} - \beta_{k-2})\alpha_{k-2} + Z(\beta_{k-1})\lambda_0^{k-1}(\alpha_{k-2} - \lambda_{k-1,2})}{Z(\beta_{k-1})(\lambda_0^{k-1} - \lambda_{k-1,2})} =$$

$$= \lambda_0^{k-1} \frac{\beta_{k-1} - \beta_{k-2} + Z(\beta_{k-1})(\alpha_{k-2} - \lambda_{k-1,2})}{Z(\beta_{k-1})(\lambda_0^{k-1} - \lambda_{k-1,2})} = \lambda_0^{k-1}.$$

Следовательно, необходимо требовать, чтобы $\frac{N_{\beta_k}^{k-1}}{K_{\beta_k}^{k-1}} > 0$. Но так как $K_{\beta_k}^{k-1} < 0$, то последнее эквивалентно неравенству $N_{\beta_k}^{k-1} < 0$. Однако

$$N_{\beta_k}^{k-1} = Z(\beta_k)\lambda_0^{k-1}(\beta_k)(\lambda_0^{k-1} - \lambda_{k-1,2})$$

и, значит, $N_{\beta_k}^{k-1} < 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda_0^{k-1}(\beta_k) > 0$.

При $f_{k-1} < 0$ аналогичным образом приходим к требованию $\lambda_0^{k-1}(\beta_k) < 0$. Итак, на $(k-2)$-м шаге должно было быть выполнено условие $f_{k-1} \times \lambda_0^{k-1}(\beta_k) > 0$. Заметим, что тогда неравенство $f_{k-1} \cdot \lambda_0^{k-1} > 0$ тем более выполняется. Условие $f_{k-1}\cdot\lambda_0^{k-1}(\beta_k)>0$ эквивалентно неравенству

$$(-\gamma_{k-2}+\beta_{k-2}\,\alpha_{k-2})(-\gamma_{k-2}+\beta_k\,\alpha_{k-2})>0,$$

которому в дальнейшем мы и будем удовлетворять.

Определение. Последовательность конусов $U_k,\dots,U_{k+i-1}$ $(i\geqslant 1,\ k\geqslant 3,\ i+k\leqslant N+1)$ назовем серией узлов, если:

(i) в данной фазовой картине в этих конусах точки покоя узлового типа;

(ii) при $k>3$ в конусе U_{k-1} седло или центр;

(iii) при $k+i\leqslant N$ в конусе U_{k+i} седло или центр.

Лемма 2. Для фазовой картины, удовлетворяющей условию /a/ существует L - система, фазовая катрина которой тождественна данной.

Доказательство. Как в лемме I, будем строить систему по шагам. Если в конусе U_3 требуется построить седло или центр, то поступаем так же, как и в лемме I. Если же $U_3,\dots,U_{2+i}$ -серия узлов $(i\geqslant 1)$, то в U_2 строим нужную картину, требуя выполнения условий

$$f_3\left(\frac{f_3}{\beta_{2+i}-\beta_2}+\alpha_2\right)=f_3\cdot\lambda_0^3(\beta_{2+i})>0. \qquad /18/$$

Рассуждения, приведенные выше, делают это возможным. Тогда $f_3\cdot\lambda_0^3>0$, т.е. в конусе U_3 можно построить узел. Более того, если $f_3>0$, то, выбирая $\lambda_{32}\in(\lambda_0^3,\infty)$, $\lambda_{32}\neq\alpha_2$,

$$\lambda_{31}\in\left(0,\min\left(\frac{N^3_{\beta_{2+i}}}{K^3_{\beta_{2+i}}},\lambda_0^3\right)\right),$$

$\lambda_{31}\neq\alpha_2$ получим

$$f_4\left(\frac{f_4}{\beta_{2+i}-\beta_3}+\alpha_3\right)>0.$$

Если же $f_3<0$, то этому неравенству можно удовлетворить, выбирая $\lambda_{32}\in(-\infty,\lambda_0^3)$, $\lambda_{32}\neq\alpha_2$,

$$\lambda_{31}\in\left(\max\left(\frac{N^3_{\beta_{2+i}}}{K^3_{\beta_{2+i}}},\lambda_0^3\right),0\right),\quad \lambda_{31}\neq\alpha_2.$$

Тогда $f_4\cdot\lambda_0^4>0$, и в U_4 можно построить узел. При этом требуем выполнения неравенства

$$f_5\left(\frac{f_5}{\beta_{2+i}-\beta_4}+\alpha_4\right)>0$$

и т.д.

Таким образом мы построим i узлов. В случае $k>2$ доказательство аналогично, а условие /18/ примет вид:

$$f_k\left(\frac{f_k}{\beta_{k+i-1}-\beta_{k-1}}+\alpha_{k-1}\right)>0. \qquad /19/$$

Лемма доказана.

Заметим, что условие /II/ позволяет разбить конус U_k на произвольное число новых конусов

$$U_k = \bigcup_{l=1}^{m} U_{kl} \quad ,$$

в которых возможно построение серии узлов.

Выясним геометрический смысл условия /11/. Это условие эквивалентно неравенству

$$[(\gamma_{k-1}, \alpha_{k-1})\cdot(1, -\beta_{k-1})]\cdot[(\gamma_{k-1}, \alpha_{k-1})\cdot(1, -\beta_k)] > 0,$$

где в квадратных скобках записаны скалярные произведения соответствующих векторов. Напомним, что $(1, -\beta_k)$ - нормаль к лучу $z_1 = \beta_k z_2$, а $(\gamma_{k-1}, \alpha_{k-1})$ - направление траектории в конусе U_{k-1} в момент прохождения луча $z_1 = \beta_{k-1} z_2$. Пусть M - произвольная точка луча $z_1 = \beta_{k-1} z_2$, отличная от начала координат. Построим вектор $(\gamma_{k-1}, \alpha_{k-1})$ с началом в точке M и проведем через M прямую, параллельную лучу $z_1 = \beta_k z_2$. Эта прямая вместе с лучом $z_1 = \beta_{k-1} z_2$ образует два вертикальных тупых угла V_1 и V_2 с вершиной в точке M. Тогда условие /11/ означает, что конец вектора $(\gamma_{k-1}, \alpha_{k-1})$ должен лежать строго внутри угла V_1 или угла V_2.

5. В заключение рассмотрим тот случай, когда луч $z_1 = \beta_k z_2$ является исключительным.

Предположим $3 \le k \le N$. Тогда

$$(x_k - \lambda_{k1})\beta_k + \gamma_{k-1} - \beta_{k-1} x_k = 0, \qquad /20/$$

$$y_k \beta_k + \alpha_{k-1} - \beta_{k-1} y_k - \lambda_{k1} = 0. \qquad /21/$$

Из /21/

$$y_k = \frac{\lambda_{k1} - \alpha_{k-1}}{\beta_k - \beta_{k-1}}. \qquad /22/$$

С помощью /5/ из /20/ с учетом /22/ найдем

$$\lambda_{k2} = \frac{f_k}{\beta_k - \beta_{k-1}} + \alpha_{k-1} = \lambda_0^k. \qquad /23/$$

Если $f_k \ne 0, \lambda_0^k \ne 0$, то $\lambda_{k2} \ne 0, \lambda_{k2} \ne \alpha_{k-1}$ и y_k, определяемое равенством /8/, совпадает с /22/. При этом для того, чтобы второе исключительное направление лежало вне U_k, λ_{k1} должно удовлетворять условиям:

$$\lambda_{k1} \ne \alpha_{k-1},$$

$$0 < (-\lambda_{k2} + \alpha_{k-1})^2(\lambda_0^k - \lambda_{k1})\frac{\beta_k - \beta_{k-1}}{f_k}. \qquad /24/$$

Предположим, что в U_k нужно построить узел. Тогда при $f_k > 0$ выберем $\lambda_{k1} < \lambda_0^k = \lambda_{k2}$, $\lambda_{k1} \ne \alpha_{k-1}$. Для того, чтобы нашлось $\lambda_{k1} < \lambda_{k2}$ такое, что $|\lambda_{k1}| < |\lambda_{k2}|$ и $\lambda_{k1}\lambda_{k2} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_0^k > 0$. При $f_k < 0$ аналогичным путем приходим к условию $\lambda_0^k < 0$.

Если в U_k требуется построить седло, то при $f_k > 0$ должно быть $\lambda_{k1} < \lambda_0^k$, $\lambda_{k1} \ne \alpha_{k-1}$ т.е. необходимо, чтобы $\lambda_0^k = \lambda_{k2} > 0$. Аналогично при $f_k < 0$ требуем, чтобы $\lambda_0^k < 0$.

Итак, на $(k-1)$ -м шаге должно было быть выполнено условие

$f_k \cdot \lambda_0^k > 0$. Тогда условия /24/ позволяют построить нужную картину в конусе U_k.

Переходим к конусу U_{k+1}. Пусть собственный вектор $(\beta_k, 1)$ матрицы A_{k+1} соответствует числу $\lambda_{k+1,1}$. Имеем

$$(x_{k+1} - \lambda_{k+1,1})\beta_k + \gamma_k - \beta_k x_{k+1} = 0, \qquad /25/$$

$$y_{k+1}\beta_k + \alpha_k - \beta_k y_{k+1} - \lambda_{k+1,1} = 0. \qquad /26/$$

Из /26/ $\lambda_{k+1,1} = \alpha_k$. Заметим, что

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + (\beta_k - \beta_{k-1})y_k = \alpha_{k-1} + (\beta_k - \beta_{k-1})\frac{\lambda_{k1} - \alpha_{k-1}}{\beta_k - \beta_{k-1}} = \lambda_{k1} \neq 0$$

в силу выбора λ_{k1}. Подставляя $\lambda_{k+1,1} = \alpha_k$ в /25/, приходим к тождеству /см. пункт 2/

$$\gamma_k - \beta_k \alpha_k = -f_{k+1} = 0.$$

С другой стороны, соотношение /6/ тоже превращается в тождество, т.е. y_{k+1} может быть выбрано произвольно. Фиксируем $y_{k+1} \neq 0$. Тогда применимо одно из неравенств /7/, соответствующее $\lambda_{k+1,2}$.

То есть

$$0 < (\alpha_k - \lambda_{k+1,2})(\alpha_{k+1} - \lambda_{k+1,2}),$$

и мы найдем бесконечный интервал I такой, что при $\lambda_{k+1,2} \in I$ получается требуемая картина в конусе U_{k+1}. Более того, можно выбрать $\lambda_{k+1,2} \in I$ так, чтобы выполнялось условие вида:

$$f_{k+2}\left(\frac{f_{k+2}}{\beta - \beta_{k+1}} + \alpha_{k+1}\right) > 0 \qquad (\beta \geqslant \beta_{k+2}).$$

Для этого достаточно рассмотреть при $\beta' \geqslant \beta_{k+1}$ выражение

$$-\gamma_{k+1} + \beta'\alpha_{k+1} = -\gamma_k + \beta'\alpha_{k+1} - (\beta_{k+1} - \beta_k)(\lambda_{k+1,2} + \beta_k y_{k+1})$$

и выбрать $\lambda_{k+1,2} \in I$ так, чтобы полученное выражение имело один и тот же знак для $\beta' = \beta_{k+1}$ и $\beta' = \beta$.

Проведенные рассуждения можно без труда перенести на случай, когда исключительными направлениями являются лучи $z_1 = \beta_1 z_2$, $z_1 = \beta_2 z_2$, $z_1 = \beta_N z_2$, сделав, там где это нужно, соответствующие изменения.

Т е о р е м а. Существует L - система, фазовая картина которой тождественна данной.

Мы не будем приводить здесь доказательство этой теоремы, так как она является простым следствием лемм I,2 и вышеизложенного. Заметим лишь, что для построения серии узлов $U_k, \ldots, U_{k+i-1}$, для которых лучи $z_1 = \beta_\ell z_2$ $(\ell = k-1, \ldots, k+i-1)$ не являются исключительными, вместо условия /I9/ в случае, когда в конусе U_{k+i} луч $z_1 = \beta_{k+i} z_2$ является исключительным, требуем выполнения неравенства

$$f_k\left(\frac{f_k}{\beta_{k+i} - \beta_{k-1}} + \alpha_{k-1}\right) > 0.$$

Затем, построив нужную картину в конусах $U_k, \ldots, U_{k+i}$, сразу переходим к построению в конусе U_{k+i+1}, запасаясь необходимыми ограничениями для дальнейшего построения.

Автор выражает искренню благодарность Ю.И.Гильдерману за полезные советы в ходе работы над статьей и при ее редактировании.

Поступила в редакцию II.II.1971г.

Литература

1. Ю.И.Гильдерман. Динамические системы на плоскости с непрерывными правыми частями, линейными в углах, - СМЖ, в печати.

2. Ю.И.Гильдерман, К.Н.Кудрина, И.А.Полетаев, Модели L - систем. - Сб. "Исследования по кибернетике" под редакцией А.А.Ляпунова, "Советское радио", Москва, 1970 г.