Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1968 г. выпуск I.
УДК. 62-50: 66-02.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССОВ В ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

В.И.Быков, В.В.Леонов, А.В.Федотов, М.Г.Слинько

Одной из основных задач расчета промышленных каталитических реакторов является определение оптимальных условий их работы. При этом важен учет конкретных особенностей управляемого процесса, протекающего в реакторе. Так, в работе [I] было показано, что оптимальный температурный режим обратимых экзотермических процессов зависит только от локальных условий и не зависит от длины реактора. Позднее такие режимы стали называть несвязными [2], и вопрос о существовании их возник в связи с задачами оптимизации сложных процессов.

Несвязность означает, что оптимум в целом слагается из оптимумов в каждый момент времени, то есть достижение наилучших результатов в какой-либо момент времени соответствует достижению наилучших результатов за весь рассматриваемый период. Ввиду простоты определения оптимальных условий для несвязного процесса представляет интерес выделить класс таких процессов, то есть найти необходимые и достаточные условия их существования.

Пусть управляемый процесс описывается системой n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\ldots,x_n,u,t),\quad (i=1,\ldots,n), \qquad /I/$$

где u является управляющим параметром процесса, $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ - вектор состояния, функции $f_i(\bar{x},u,t)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения. Кроме того, считаем, что управление удовлетворяет следующему условию:

$$u\in\{u:\ 0\leq a\leq u\leq b<+\infty\}=U. \qquad /2/$$

Допустимыми на интервале $[0,t_k]$ будем считать такие управления $u_{[0,t_k]}$, которые являются кусочно-непрерывными на $[0,t_k]$ и удовлетворяют при $t\in[0,t_k]$ условию /2/. Класс допустимых управлений обозначим через $K(U)$.

Рассмотрим следующую задачу: при заданном начальном состоянии $x_i(0)=x_i^0$ $(i=1,\ldots,n)$ управляемой системы /I/ требуется выбрать такое допустимое управление $u^*_{[0,t_k]}$, для которого достигает максимума критерий оптимизации:

$$Q(x_1)=\max_{u_{[0,t_k]}}\int_0^{t_k}x_1(\bar{x}^0,t,u_{[0,t_k]})dt, \qquad /3/$$

где x_1 - координата вектора $\bar{x}(\bar{x}^0,t,u_{[0,t_k]})$, являющегося решением системы /I/ с начальным условием $\bar{x}(0)=\bar{x}^0$ и управлением $u_{[0,t_k]}\in K(U)$. Очевидно, что оптимальное управление на $[0,t_k]$ для системы /I/ является функцией начального условия и длительности процесса $[0,t_k]$:

$$u_{[0,t_k]}=u_{[0,t_k]}(\bar{x}^0,t).$$

Выделим управляемые процессы, обладающие следующим свойством: если $u_{[0,t_k]}(\bar{x}^0,t)$, $u_{[0,t^*]}(\bar{x}^0,t^*)$ - оптимальные управления соответственно на отрезках $[0,t_k]$, $[0,t^*]$, $0\leq t^*\leq t_k$, то для всякого $t^*\in[0,t_k]$

$$u_{[0,t_k]}(\bar{x}^0,t)\equiv u_{[0,t^*]}(\bar{x}^0,t)\,. \qquad /\alpha/$$

В общем случае система /I/ α -свойством (несвязностью) не обладает, и для отыскания оптимального управления локальные алгоритмы неприменимы [3] .

Обозначим

$$S(t)=\{x_i(\bar{x}^0,t,u_{[0,t_k]}):\ u_{[0,t_k]}\in K(U)\};$$
$$S^*(t)=\{\varphi(t,u):\ a\leq u_{[0,t_k]}\leq b:\ u_{[0,t_k]}\equiv const\}; \qquad /4/$$
$$\varphi(t,u)=x_i(\bar{x}^0,t,u_{[0,t_k]}):\ u_{[0,t_k]}\equiv u\equiv const.$$

ТЕОРЕМА I. Если управляемая система имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t,u)x_j+b_j(t),\ (i=1,\dots,n) \qquad /5/$$

при начальных условиях

$$x_i(0)=x_i^0\ ,\qquad (i=1,\dots,n) \qquad /6/$$

и $a_{ij}(t,u)$ - монотонные функции по $u\in[a,b]$, то $S^*(t)\equiv S(t)$, $t\in[0,t_k]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любого управления $u_{[0,t_k]}\in K(U)$, $t^*\in[0,t_k]$ существует постоянное допустимое управление $\hat{u}_{[0,t^*]}$, то есть $\hat{u}_{[0,t^*]}(\bar{x}^0,t)\equiv const\in[a,b]$, при котором справедливо тождество: $x_i(\bar{x}^0,t^*,\hat{u}_{[0,t^*]}=x_i(\bar{x}^0,t^*,u_{[0,t_k]})$.

Докажем, что всякому допустимому управлению $u_{[0,t_k]}(x^0,t)$, $t\in[0,t_k]$ соответствует такое значение параметра $u\in[a,b]$, что для решения системы

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t,u)z_j+\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}(t,u)-a_{ij}(t,u(t))]x_j^*\,, \qquad /7/$$

где $z_i=x_i(\bar{x}^0,t^*,\hat{u}_{[0,t^*]})-x_i(\bar{x}^0,t^*,u_{[0,t_k]})$, $(i=1,\dots,n)$,

при начальных условиях

$$z_i(0)=0\,,\ (i=1,\dots,n), \qquad /8/$$

справедливо равенство $z_i(t_k)=0$.

Пусть $\varphi_{i,1}(t)$, $\varphi_{i,2}(t),\dots,\varphi_{i,n}(t)$ $(i=1,\dots,n)$ есть фундаментальная система решений однородной системы, соответствующей /7/, и пусть Δ_i означает определитель, который получается из определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_{1,1}&\dots&\varphi_{1,n}\\ \vdots&&\vdots\\ \varphi_{n,1}&\dots&\varphi_{n,n}\end{vmatrix}$$

заменой i -ой строки функциями:

$$g_i(t,u)=\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}(t,u)-a_{ij}(t,u(t))]x_j^*(t),\ (i=1,\dots,n).$$

Тогда, согласно [4],

$$z_1(t_k) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,1}(t_k) \int_0^{t_k} \frac{\Delta_i}{\Delta} dt.$$

Фундаментальную систему решений можно выбрать так, что

$$\varphi_{1,1}(t_k) = 1, \quad \varphi_{i,1}(t_k) = 0, \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

В этом случае

$$z_1(t_k) = \int_0^{t_k} \frac{\Delta_1}{\Delta} dt.$$

Применяя теорему о среднем, имеем:

$$z_1(t_k) = \frac{1}{\Delta(\xi)} \int_0^{t_k} \Delta_1 dt.$$

Здесь $\xi \in [0, t_k]$. Ясно, что $z_1(t_k) = F(u)$. Функция $F(u)$ непрерывна по u и на концах отрезка $[a, b]$ имеет разные знаки.

Действительно,

$$\Delta_1(t,a) = \begin{vmatrix} g_1(t,a) & g_2(t,a) & \ldots & g_n(t,a) \\ \varphi_{2,1}(t) & \varphi_{2,2}(t) & \ldots & \varphi_{2,n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n,1}(t) & \varphi_{n,2}(t) & \ldots & \varphi_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta_1(t,b) = \begin{vmatrix} g_1(t,b) & g_2(t,b) & \ldots & g_n(t,b) \\ \varphi_{2,1}(t) & \varphi_{2,2}(t) & \ldots & \varphi_{2,n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n,1}(t) & \varphi_{n,2}(t) & \ldots & \varphi_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

имеют разные знаки, так как в силу монотонности по u функций a_{ij} функции $g_i(t,u)$ меняют знак на отрезке $[a,b]$. Значит, $F(u)$ на отрезке $[a,b]$ обращается в нуль, то есть найдется такое значение параметра $u \in [a,b]$, что $F(u) = 0$. Таким образом, $z_1(t_1) = 0$.

Кривую

$$G: \ x_1 = f(t) = \sup_{a \le u \le b} \varphi(t,u) \qquad /9/$$

будем называть верхней огибающей семейства $\{\varphi(t,u)\}$, и эта кривая может частично или полностью совпадать на отрезке $[0, t_k]$ с одной из кривых семейства /4/. Из непрерывной зависимости $\varphi(t,u)$ от u следует, что

$$f(t) = \max_{a \le u \le b} \varphi(t,u). \qquad /9'/$$

Кроме того, из определения $\varphi(t,u)$ и справедливости тождества $S^*(t) = S(t)$ для рассматриваемой системы следует, что

$$f(t) = \max_{x_1 \in S(t)} x_1. \qquad /10/$$

Из этого непосредственно вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2. Система /2/ обладает α -свойством на промежутке $[0, t_k]$, если существует такое допустимое управление $\hat{u}_{[0,t_k]} \in K(U)$, что

$$x_1(\bar{x}^0, t, \hat{u}_{[0,t_k]}) \equiv f(t), \quad t \in [0, t_k]. \qquad /11/$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Управление $\hat{u}_{[0,t_k]}(\bar{x}^0, t)$, удовлетворяющее /11/, является оптимальным.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если верхние огибающие /9/ семейства /4/ принадлежат этому семейству при $u \in [a,b]$, то система /5/ обладает α-свойством.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для того, чтобы управление $\hat{u}_{[0,t_k]} \in K(U)$ удовлетворяло /11/, необходимо выполнение условий:

$$\frac{\partial \varphi(t, \hat{u}_{[0,t_k]})}{\partial u} \begin{cases} \geq 0 & \text{при } u_{[0,t_k]}(t) = b, \\ = 0 & \text{при } u_{[0,t_k]}(t) \in [a,b], \\ \leq 0 & \text{при } u_{[0,t_k]} = a. \end{cases} \qquad /12/$$

Если к тому же оптимальное на $[0,t_k]$ управление единственно, то условие /12/ является также и достаточным в случае системы /5/ для справедливости α-свойства.

Рассмотрим еще один класс процессов, которые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(u)\bar{x}, \qquad /13/$$

с начальными условиями $\bar{x}(0) = \bar{x}^0$, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор-функция состояния, u – управление. Система /13/ удовлетворяет условиям теоремы 1, и, кроме того, справедливо равенство

$$\varphi(t,u) = (e^{A(u)t}\bar{x}^0, \bar{c}_1), \qquad /14/$$

где вектор $\bar{c}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. При малых $t > 0$

$$\varphi(t,u) = x_1^0 + (A(u)\bar{x}^0, \bar{c}_1)t + O(t^2), \qquad /15/$$

следовательно, в случае

$$\min_{a \leq u \leq b} (A(u)\bar{x}_1^0, \bar{c}_1) > 0 \qquad /16/$$

имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &\equiv (e^{A(b)t}\bar{x}^0, \bar{c}_1) \\ \hat{u}(t) &\equiv b \end{aligned}\right\}, \quad t \in [0, t^+], \qquad /17/$$

где

$$t^+ = \inf_{f(t) > \varphi(t,b)} t > 0. \qquad /18/$$

Аналогично, если

$$\max_{a \leq u \leq b} (A(u)\bar{x}^0, \bar{c}_1) < 0, \qquad /19/$$

то для $t \in [0, t^-]$ справедливы равенства:

$$\left.\begin{aligned} f(t) &\equiv (e^{A(a)t}\bar{x}^0, \bar{c}_1 \\ u(t) &\equiv a \end{aligned}\right\}, \quad t \in [0, t^-], \qquad /20/$$

где

$$t^- = \inf_{f(t) > \varphi(t,a)} t > 0.$$

Все это обобщается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. Если для системы /5/ справедливо одно из неравенств

/16/ или /19/, тогда решение системы /13/, при начальных условиях $\overline{X}(0)=\overline{X}^0$, обладает α-свойством для любого интервала $[0,t]$, где t удовлетворяет одному из неравенств:

$$0 < t \leqslant t^+$$
$$0 < t \leqslant t^-.$$

Таким образом, теоремы 1,2 дают необходимые и достаточные условия несвязности оптимального управления на заданном интервале $[0,t_k]$ для процессов, описывающихся системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида /7/.

Теорема 3 устанавливает необходимые условия несвязности оптимального управления для особого случая, который возникает при решении задач, описываемых системами обыкновенных уравнений вида /13/. Причем, интервал времени, на котором ищется решение, при наличии ограничений на оптимальное управление, равен $[0,t_k]$, где $t_k=\varepsilon$, ε - мало, или удовлетворяет одному из равенств: $\varepsilon=t^+$, $\varepsilon=t^-$.

Применим получение условия существования несвязности оптимального управления для анализа некоторых задач оптимизации каталитических процессов.

Рассмотрим процесс с двумя последовательными реакциями первого порядка: $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$. Знаковая модель процесса

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=u x_2 - a u^b x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-u x_2 \end{cases} \qquad /21/$$

с начальными условиями $x_1(0)=x_{10}$, $x_2(0)=x_{20}$, где x_1,x_2 - концентрации B, A соответственно, u - управление, удовлетворяющее ограничению $u_* \leqslant u \leqslant u^*$.

Оптимальная задача заключается в том, чтобы выбрать такое управление $u(t)$, удовлетворяющее $u_* \leqslant u(t) \leqslant u^*$, которое бы обеспечивало достижение максимума $x_1(t_k)$.

Система /21/ удовлетворяет условиям теоремы 1, следовательно, рассматривая u как параметр, получим

$$x_1=f(t)=\left[\frac{u x_{20}}{a u^b - u}e^{(a u^b - u)t}+x_{10}\right]e^{-a u^b t}.$$

Однако, для того, чтобы система /21/ удовлетворяла α-свойству, достаточно выполнения условия теоремы 2, то есть

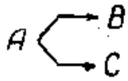
$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\begin{cases} \leqslant 0 & \text{при } u=u_*, \\ =0 & \text{при } u(t)\in[u_*,u^*], \\ \geqslant 0 & \text{при } u=u^*, \end{cases}$$

где

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}=\left[\frac{x_{20}}{(a u^b-u)^2}e^{(a u^b-u)t}\cdot(a u^b(1-b)-u t(a u^b-u))-x_{10}abu^{b-1}t\right]e^{-a u^b t}$$

при $a>0$, $b>1$.

Видно, что второе и третье условия не удовлетворяются ни при каком $u \in [u_*, u^*]$, следовательно, оптимальный режим не является несвязным. Аналогичный результат получается для достаточно больших t_k при рассмотрении процесса с двумя параллельными реакциями:



Рассмотренные схемы реакций являются частями более общих схем. Следовательно, в общем случае процессы со сложными схемами реакций не могут иметь несвязного оптимального управления, и применение локальных алгоритмов оптимизации в этом случае не является обоснованным.

Поступила в редакцию 10.9.1968г.

Литература

1. Г.К.Боресков, М.Г.Слинько, Основы расчета контактных аппаратов для обратимых экзотермических процессов, ЖПХ, 16, 377 /1943/.

2. Р.Арис, Оптимальное проектирование химических реакторов, Ин.-Лит., М.,1961.

3. В.В.Леонов, О численных методах построения оптимального управления, II Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике АН СССР, 1961.

4. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.,1965.