Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1968 г. выпуск I.
УДК.519.95.

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ II

В.В. Леонов, Н.А. Вочкова

## § I Постановка задачи

В данной статье, которая является продолжением статьи [I], мы проиллюстрируем на конкретном классе задач асимптотического программирования [I,2] один из методов их решения, основанный на идеях принципа оптимальности Р. Беллмана [3].

Исследуемая задача может быть сформулирована следующим образом.

Предположим, что мы хотим только что смонтированное оборудование технологической линии эксплуатировать таким образом, чтобы суммарное количество продукции, производимой этой технологической линией, при неограниченном возрастании времени росло "самым оптимальным образом". Этот оптимальный рост должен быть обеспечен соответствующей организацией капитального и текущего ремонта оборудования.

Считаем, что за время $t$ после каждого очередного капитального ремонта*/ производится $f_0(t)$ единиц продукции, а после $i$ -го**/ текущего ремонта - $f_i(t)$ единиц, причем для $f_i(t)$ имеют место рекуррентные соотношения:

$$f_i(t)=f_{i-1}(t)\cdot\varphi_i(t_{i-1}) \quad (0\leq\varphi_i<1), \qquad /1/$$

где $t_i$ - время работы оборудования между $(i-1)$ -ым и $i$ -ым текущими ремонтами. Кроме того, считаем, что время, необходимое для проведения капитального и текущего ремонтов, постоянно и равно соответственно величинам $\tau_1$ и $\tau_0$, причем во время капитальных и текущих ремонтов продукция не производится.

Будем, исходя их соображений, изложенных в [I] /см. §§ I-3/, находить такое число $n^*\geq 1$ текущих ремонтов и последовательность $t_1^*,\dots,t_{n^*}^*$ времен работы оборудования между двумя очередными капитальными ремонтами оборудования, в случае которых достигается максимум

$$R^*=\max_{n\geq 1}\max_{t_1,\dots,t_n\geq 0}\frac{f_0(t_1)+\sum\limits_{k=2}^{n}\prod\limits_{i=1}^{k-1}\varphi_i(t_i)f_0(t_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}t_k+(n-1)\tau_0+\tau_1}, \qquad /2/$$

где в числителе /2/ стоит суммарное количество продукции, полученной между двумя очередными капитальными ремонтами оборудования, а в знаменателе - суммарное время работы оборудования, его текущих ремонтов

*/ Данное утверждение имеет место и для только что смонтированного оборудования.

**/ Здесь речь идет о текущем ремонте, $i$ -ом по счету после очередного капитального ремонта, причем сам капитальный ремонт считается нулевым текущим ремонтом.

и капитального ремонта.

Задачу отыскания максимума можно заменить следующей ей эквивалентной задачей.

Обозначим:

$$S_n(T)=\max_{\substack{\sum_{i=1}^{n} t_i=T \\ t_i\geq 0}}\{f_0(t_1)+\sum_{k=2}^{n}\prod_{i=1}^{k-1}\varphi_i(t_i)f_0(t_k)\}\ , \qquad /3/$$

$$F(n,T)=\max_{T\geq 0}\frac{S_n(T)}{T+(n-1)\tau_0+\tau_1}\ , \qquad /3'/$$

$$R_n=\max F(n,T). \qquad /3''/$$

Кроме того, обозначим через $t_i^n(T)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ те $t_i$, $\sum_{i=1}^{n} t_i=T$, $t_i\geq 0$, которые доставляют максимум /3/. Очевидно, что если мы найдем такие $T=\tilde{T}\geq 0$ и $n=\tilde{n}\geq 1$, в случае которых достигается

$$\tilde{R}=\max_{\substack{n\geq 1 \\ T\geq 0}} F(n,T), \qquad /4/$$

то тем самым мы получим $R^*=\tilde{R}$ и искомые $n^*=\tilde{n}$, $t_i^*=t_i^{\tilde{n}}(\tilde{T})$ $(i=1,2,\ldots,\tilde{n})$, где $t_i^{\tilde{n}}(T)$ находятся из /3/.

## § 2. Схема решения в общем случае

Пусть нам известно, что при $n\geq 1$, $T\geq 0$

$$\omega_n(T)\leq S_n(T)\leq \varphi_n(T), \qquad /5/$$

причем при $T>T_n^*$

$$\frac{\varphi_n(T)}{T+(n-1)\tau_0+\tau_1}\leq \max_{T'\geq 0}\frac{\omega_n(T')}{T'+(n-1)\tau_0+\tau_1}=\Omega_n. \qquad /6/$$

Если, кроме того, нами найдено такое $\hat{n}\geq 2$, что при $n\geq \hat{n}$

$$\Omega_n\leq R_1=\max_{0\leq T\leq T_n^*}F(1,T), \qquad /7/$$

то, построив на оси $T$ достаточно мелкую $\varepsilon$ -сеть $\Delta_\varepsilon$, мы можем с помощью известных методов /см. [4], стр. 201/ найти для $S_n(T)$ приближенное значение $S_n^\varepsilon(T)$ во всех узловых точках отрезка $[0,T_n^*]$, причем одновременно мы находим

$$\max_{T\in\Delta_\varepsilon\cap[0,T_n^*]} F(n,T)=R_n^\varepsilon, \qquad /8/$$

и то значение $T=T_\varepsilon^n\in\Delta_\varepsilon\cap[0,T_n^*]$, которое доставляет максимум /8/. Сравнив всевозможные $R_n^\varepsilon$ $(n=1,2,\ldots,\hat{n})$, можно найти такое $n=n_\varepsilon$, $1\leq n_\varepsilon\leq\hat{n}$, которое удовлетворяет условию:

$$R_{n_\varepsilon}^\varepsilon=\max_{1\leq n\leq\hat{n}}R_n^\varepsilon=R^\varepsilon. \qquad /9/$$

Очевидно, что при $\varepsilon\to 0$ $R^\varepsilon\to\tilde{R}$.

Предположим теперь, что $f_0(t)=1-e^{-\beta t}$. Оказывается, что если $\varphi_i(t)\leq e^{-\beta t}$, то максимум /4/ легко находится. Действительно, имеет место нижеследующее

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Если $f_0(t)=1-e^{-\beta t}, \varphi_i(t)< e^{-\beta t} (i=1,2,\ldots)$, то

$$\tilde{R}=R_1=\max_{T>0} F(1,T).$$

Справедливость /4/ следует из /3/, /3'/, /4/ и неравенств:

$$f_0(t_1)+\sum_{k=2}^{n}\prod_{j=1}^{k-1}\varphi_j(t_j)f_0(t_k)\leqslant 1-e^{-\beta t_1}+\sum_{k=2}^{n}e^{-\beta\sum_{j=1}^{k-1}t_j}(1-e^{-\beta t_k})=1-e^{-\beta\sum_{j=1}^{n}t_j}=S_1(\sum_{j=1}^{n}t_j);$$

$$\frac{S_n(T)}{T+(n-1)\tau_0+\tau_1}<\frac{S_1(T)}{T+(n-1)\tau_0+\tau_1}\leqslant F(1,T).$$

Пусть теперь $f_0(0)=0;\ f_0'(t)>0,\ f_0''(t)<0$ для $t\geqslant 0$ /условие /$\omega$/ /. При данных предположениях совершенно очевидным являются следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $\varphi_i(t)\equiv 1$, $f_0(t)$ удовлетворяет $(\omega)$, то при $\tau_1<\tau_0$ $\tilde{R}=R_1$, причем при $\tau_1\geqslant\tau_0$ необходимость в капитальных ремонтах отпадает, а текущие ремонты производятся через каждые $t^*$ единиц времени работы оборудования, где $t^*$ доставляет максимум

$$\max_{t>0}\frac{f_0(t)}{t+\tau_0}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $f_0(t)\equiv 1-e^{-\beta t}$, $\varphi_i(t)=a_i\equiv const$, причем $0<a_{n+1}<a_n<a_0=1\ (n=1,2,\ldots)$, то

$$\tilde{R}=\beta\max_{\substack{n\geqslant 0\\ A_n<1+B_n}} a_n e^{-\xi_n}, \qquad /10/$$

где

$$A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_n}>0,\quad B_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\ln\frac{a_i}{a_n}+\frac{\beta}{n}[(n-1)\tau_0+\tau_1], \qquad /11/$$

$\xi_n$ для $A_n<1+B_n$ является единственным положительным корнем уравнения

$$A_n e^{\xi}-\xi=1+B_n, \qquad /12/$$

причем при $A_n<1+B_n$ имеет место равенство $R_n=\beta a_n e^{-\xi_n}$, а при $A_n\geqslant 1+B_n$ справедливо неравенство $R_n<R_{n-1}$.

Кроме того, если в данном случае существует такое $n=\tilde{n}$, при котором достигается максимум /10/, то оптимальные $T=\tilde{T}$ и $t_i=t_i^{\tilde{n}}(\tilde{T})$ $(i=1,2,\ldots,\tilde{n})$, доставляющие максимум /2/, находятся с помощью формул:

$$\tilde{T}=\frac{\tilde{n}}{\beta}(B_{\tilde{n}}+\xi_{\tilde{n}})-(\tilde{n}-1)\tau_0-\tau_1,$$

$$t_i^{\tilde{n}}(\tilde{T})=\frac{1}{\beta}(\ln\frac{a_k}{a_{\tilde{n}}}-\xi_{\tilde{n}})\quad (i=1,\ldots,\tilde{n}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{a_n\{\sum_{i=1}^{n-1}\ln\frac{a_i}{a_n}+\beta[(n-1)\tau_0+\tau_1]\}}<1, \qquad /13/$$

то существует конечное $\tilde{n}$, доставляющее максимум /10/. В частности, условие /13/ выполняется, если либо ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ сходится, либо $a_i=\frac{q_i}{i}$,

где $0<\gamma_2\leq g_i\leq \gamma^*<\infty$, причем
$$\gamma^*< 2\gamma_*(\beta\tau_0-\ln\frac{\gamma_*}{\gamma^*}).$$

## § 3. Случай, когда $\varphi_i(t)=\theta e^{-\alpha t}$. Общие свойства $S_n(T)$.

Пусть $\varphi_i(t)=\theta e^{-\alpha t}\ (i=1,2,\dots)$, причем $0<\theta\leq 1$. Так как в данном случае
$$S_n(T)=\max_{\substack{\sum_{i=1}^{n} t_i=T\\ t_i\geq 0}}[f_0(t_1)+\sum_{k=2}^{n}\theta^{k-1}e^{-\alpha\sum_{j=1}^{k-1}t_j}f_0(t_k)], \tag{14}$$
то легко заметить, что для $n\geq 2$ имеет место равенство:
$$S_n(T)=\max_{\substack{\sum_{k=1}^{s} T_k=T\\ t_k\geq 0}}[S_{n_1}(T_1)+\sum_{k=2}^{s}\theta^{\sum_{j=1}^{k-1}n_j}e^{-\alpha\sum_{j=1}^{k-1}T_j}S_{n_k}(T_k)], \tag{15}$$
каковы бы ни были $s\geq 2$, $n_k\geq 1$, $\sum_{k=1}^{s}n_k=n$.

Из /15/ следует, что

1/ если $t_1^*,\dots,t_n^*$ доставляют максимум /14/, то для любого $i$ $1\leq i\leq n-1$, имеет место равенство
$$f_0(t_i^*)+\theta e^{-\alpha t_i}f_0(t_{i+1}^*)=\max_{\substack{t_i+t_{i+1}=t_i^*+t_{i+1}^*\\ t_i,t_{i+1}\geq 0}}[f_0(t_i)+\theta e^{-\alpha t_i}f_0(t_{i+1})]=S_2(t_i^*\ \ t_{i+1}^*); \tag{16}$$

2/ если $n=2^p+n_1$, где $0<n_1\leq 2^p$, то
$$S_n(T)=\max_{0\leq t\leq T}[S_{n_1}(t)+e^{-\alpha t}S_{2^p}(T-t)]; \tag{17}$$

3/ если $t_1^*,\dots,t_n^*$ доставляют максимум /14/, причем $t_{i_0}^*>0$, то $t_1^*,t_2^*,\dots,t_{i_0-1}^*,t_{i_0+1}^*,\dots,t_n^*,t_{i_0}^*$ также доставляют максимум /14/ /свойство $(\alpha)$ /;

4/ величины $t_i^n(T)$ и $t_{i+1}^n(T)$ либо связаны соотношением
$$e^{\alpha t_i^n(T)}f_0'(t_i^n(T))=\theta[\alpha f_0(t_{i+1}^n(T))+f_0'(t_{i+1}^n(T))], \tag{18}$$
либо
$$t_{i+1}^n(T)=0. \tag{18'}$$

Обозначим:
$$\left.\begin{aligned}
&X(t)=e^{\alpha t}f_0'(t),\\
&Y(t)=\theta[\alpha f_0(t)+f_0'(t)],\\
&\Psi(t)=f_0(t)+e^{-\alpha t}f_0(T\ \ t),\\
&Z_1(t)=X^{-1}(Y(t)),\\
&W_1(t)=Y^{-1}(X(t)),\\
&Z_k(t)=Z_1(Z_{k-1}(t))\quad (k=2,3,\dots),\\
&W_k(t)=W_1(W_{k-1}(t))\quad (k=2,3,\dots),\\
&T_k=\sum_{i=1}^{k-1}Z_i(0)\quad (k=2,3,\dots),\\
&T_1=0.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

ТЕОРЕМА I. Если $f_0(t)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию $(\omega)$, $\varphi_i(t)=\theta e^{-\alpha t}$, $0<\theta<1$, причем $Y'(t)<0$ при $t>0$, то, каково бы ни было $T\in(T_k, T_{k+1})$, где $k>2$, имеют место равенства:

$$t_i^n(T)=W_{i-1}(t_i^n(T)) \quad (i=2,\dots,\min[n,k], \qquad /20/$$

причем в случае $n\geq k+1$

$$t_i^n(T)=0 \quad (i=k+1,\dots,n). \qquad /20/$$

В случае же $k=1$, $n\geq 2$

$$t_1^n(T)=T,\ t_i^n(T)=0 \quad (i=2,\dots,n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из /19/ следует, что

$$X'(t)=\frac{e^{\alpha t}}{\theta}Y'(t), \qquad /21/$$

$$\Psi_\tau'(t)=[X(t)-Y(\tau-t)]e^{-\alpha t}, \qquad /21'/$$

$$\Psi_\tau''(t)=[X'(t)+Y'(\tau-t)]e^{-\alpha t}-\alpha\Psi_\tau'(t), \qquad /21''/$$

$$X(0)=f_0'(0),\ Y(0)=\theta f_0'(0). \qquad /21'''/$$

Так как $Y'(t)<0$, то, согласно /21/, $X'(t)<0$. Учитывая /21'/-/21''/, получим, что $\Psi_\tau'(t)$ может менять знак лишь в единственной точке $t^*\in(0,\tau)$, если $X(\tau)<Y(0)$, причем

$$\Psi_\tau'(0)=(X(0)-Y(\tau))>0,\ \Psi_\tau'(t^*)=0,\ \Psi_\tau''(t^*)<0.$$

Следовательно, ввиду справедливости /16/, $X(t_i^n(T))=Y(t_{i+1}^n(T))$, если $t_i^n(T)>Z_1(0)$, $t_{i+1}^n(T)=0$, если $t_i^n(T)\leq Z_1(0)$.

Легко доказывается по индукции, что если

$$t_i^n(T)>0\ (i=1,\dots,i_0),\ t_i^n(T)=0\ (i=i_0+1,\dots,n),$$

то

$$t_{i_0}^n(T)\leq Z_1(0),$$

$$Z_j(0)\leq t_{i_0-j}^n(T)\leq Z_{j+1}(0)\quad (j=1,\dots,i_0-1),$$

$$t_i^n(T)=W_1(t_{i-1}^n(T))=W_{i-1}(t_1^n(T))\ (i=2,\dots,i_0),$$

$$T_{i_0}<\sum_{i=1}^n t_i^n(T)\leq T_{i_0+1}.$$

Аналогично, если $t_i^n(T)>0\ (i=1,\dots,n)$, то $t_i^n(T)>Z_{n-i}(0)$

$$(i=1,\dots,n-1),\ t_i^n(T)=W_{i-1}(t_1^n(T))\ (i=2,\dots,n),$$

$$T_n<\sum_{i=1}^n t_i^n(T),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ I. I. Если $T\in[T_k, T_{k+1}]$, то

$$T=t_1^n(T)+\sum_{s=1} W_s(t_1^n(T))=\varphi_{k,n}(t_1^n(T)), \qquad /22/$$

причем

1/ $t_1^n(T)\in\Delta_{k,n}(T)$, /23/

2/ $\varphi_{k,n}(t)$ является монотонно возрастающей функцией от $t\in\Delta_{k,n}(T)$, где

$$\Delta_{k,n}(T)=\begin{cases}(Z_{k-1}(0),\ Z_k(0)) & \text{если } k<n,\\ (Z_{n-1}(0),\ T-T_n) & \text{если } k\geq n.\end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Имеют место неравенства:

$$v_s(T) \leq t_1^n(T) \leq w_s(T) \quad (s=0,1,2,\dots), \qquad /24/$$

$$w_s(T) - v_s(T) \leq \frac{w_{s-1}(T) - v_{s-1}(T)}{2} \quad (s=1,2,\dots), \qquad /24'/$$

где $v_s(T)$ и $w_s(T)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$v_s(T) = \begin{cases} \dfrac{v_{s-1}(T)+w_{s-1}(T)}{2}, & \text{если } \varphi_{k,n}\left(\dfrac{v_{s-1}(T)+w_{s-1}(T)}{2}\right) \leq T, \\ v_{s-1}(T), & \text{если } \varphi_{k,n}\left(\dfrac{v_{s-1}(T)+w_{s-1}(T)}{2}\right) > T; \end{cases}$$

/25/

$$w_s(T) = \begin{cases} \dfrac{v_{s-1}(T)+w_{s-1}(T)}{2} & \text{если } \varphi_{k,n}\left(\dfrac{v_{s-1}(T)+w_{s-1}(T)}{2}\right) \geq T, \\ w_{s-1}(T), & \text{если } \varphi_{k,n}\left(\dfrac{v_{s-1}(T)+w_{s-1}(T)}{2}\right) < T; \end{cases}$$

$$v_0(T) = \inf \Delta_{k,n}(T), \quad w_0(T) = \sup \Delta_{k,n}(T). \qquad /25'/$$

Из /24/, /24'/ следует, что для вычисления $t_1^n(T)$ с точностью до $\varepsilon$ достаточно проделать

$N(\varepsilon) = ]\log_2 \dfrac{w_0(T) - v_0(t)}{\varepsilon}[ - 1)$ шагов итерационной схемы /25/, /25'/, где $]x[$ – наименьшее целое число $\geq x$, и считать, что

$$t_1^n(T) \sim \frac{v N(\varepsilon) + w N(\varepsilon)(T)}{2}.$$

ПРИМЕР I.I. Если $\varphi_i(t) = \theta e^{-\alpha t}$, $0<\theta<1$, $f_0(t) = 1 - e^{-\beta t}$, $\beta > \alpha$, то $Y'(t) < 0$, причем $Z_k(0)$ определяются с помощью рекуррентных равенств:

$$Z_k(0) = \frac{\ln\theta + \ln[\chi(1-e^{-\alpha Z_{k-1}(0)}) + e^{-\beta Z_{k-1}(0)}]}{\alpha - \beta} \quad (k=2,3,\dots),$$

$$Z_1(0) = \frac{\ln\theta}{\alpha - \beta},$$

где $\chi = \frac{\alpha}{\beta}$.

ТЕОРЕМА 2. Если $f_0(t)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию $(\omega)$, $\varphi_i(t) = \theta e^{-\alpha t}$, $0<\theta\leq 1$, причем $Y'(t)>0$ при $t>0$, то $t_1^n(T) = T$, $t_i^n(T) = 0$ $(i=1,2,\dots,n)$, $S_n(T) \equiv S_1(T)$ при $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие справедливости равенства /16/ и свойства $\alpha$ максимума /14/, для доказательства теоремы достаточно проверить, что функция $\Psi_\tau(t)$ достигает максимума лишь на концах интервала $[0,\tau]$. Справедливость последнего утверждения следует из /21/, так как в данном случае $X'(t)>0$ для $t>0$ /согласно /21//, а тем самым $\Psi_\tau''(t)>0$ лишь только $\Psi_\tau'(t)=0$.

ТЕОРЕМА 3. Если $f_0(t)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию $(\omega)$ $\varphi_i(t) = e^{-\alpha t}$, причем $Y'(t)<0$ при $t>0$, то

$$t_i^n(T) = W_{i-1}(t_1^n(T)) \quad (i=2,3,\dots,n), \qquad /20^*/$$

где

$$t_i^n(T) \in (0, Z_{n-i}(\infty)) \quad (i=1,\dots,n-1), \qquad /26/$$

причем

$$t_i''(T)<t_{i+1}''(T) \quad (i=1,\dots,n-1), \qquad /26'/$$

$W_{i-1}(t)$ являются монотонно возрастающими функциями от $t\in(0,Z_{n-i}(\infty))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость следующих утверждений:

$\alpha_1$ / функция $\Psi_\tau(t)$ достигает максимума $t(\tau)$ внутри интервала $[0,\tau]$;

$\alpha_2$ / величины $t(\tau)$ и $\tau$ $t(\tau)$ удовлетворяют соотношению

$$\tau-t(\tau)=W_1(t(\tau)); \qquad /27/$$

$\alpha_3$ / $t(\tau)$ и $\tau-t(\tau)$ строго монотонно возрастают с ростом $\tau$;

$\alpha_4$ / для $t(\tau)$ справедливо неравенство

$$t(\tau)<\min[Z_1(\infty),\tau-t(\tau)). \qquad /28/$$

Докажем сначала $\alpha_1$ / . Из /21‴ / следует, что $X(0)=Y(0)$, причем $X'(t)<Y'(t)$ при $t=0$ , согласно /21/. Следовательно, $X(0)=Y(0)>Y(\tau)$, $Y(0)=X(0)>X(\tau)$, $\Psi_\tau'(0)=(X(0)-Y(\tau))<0$, $\Psi_\tau'(\tau)=(X(\tau)-Y(0))e^{\alpha\tau}<0$, то есть максимум $\Psi_\tau(t)$ достигается лишь внутри интервала $[0,\tau]$ . Тем самым пункт $\alpha_1$/ доказан.

Докажем теперь $\alpha_2$ /. Так как $\Psi_\tau'(0)>0, \Psi_\tau'(\tau)<0$, причем $X(t)$ и $Y(\tau-t)$ являются соответственно монотонно убывающей и монотонно возрастающей функциями от $t\in[0,\tau]$, то $\Psi_\tau'(t)$ равно нулю лишь в единственной точке $t(\tau)$ , удовлетворяющей /27/, которая и доставляет максимум $\Psi_\tau(t)$ в интервале $[0,\tau]$.

Справедливость $\alpha_3$/ следует из неравенств:

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau}=\frac{Y'(\tau-t(\tau))}{X'(t(\tau))+Y'(\tau-t(\tau))}>0,$$

$$\frac{d(\tau-t(\tau))}{d\tau}=\frac{X'(t(\tau))}{X'(t(\tau))+Y'(\tau-t(\tau))}>0,$$

которые являются следствием условий:

$$X(t(\tau))=Y(\tau-t(\tau)),$$
$$t(\tau)>0,\ X'(t),\ Y(t)<0. \qquad /29/$$

Для полного доказательства теоремы нам осталось проверить справедливость $\alpha_4$ /. Так как $X(t)<Y(t)$ для $t>0$ , то из /29/ следуют неравенства:

$$X(t(\tau))>X(\tau-t(\tau)),$$
$$t(\tau)<\tau-t(\tau), \qquad /28'/$$

причем, последнее неравенство вытекает из условия $X'(t)<0$ . Легко проверить, что выполнение условий $Y'(t)<0, f_0'(t)>0$ влечет за собой предельные соотношения:

$$\lim_{t\to\infty} f_0'(t)=0,$$
$$\lim_{t\to\infty} Y(t)=\lim_{t\to\infty}[\alpha f_0(t)+f_0'(t)]=\alpha\lim_{t\to\infty} f_0(t)=\alpha f_0(\infty), \qquad /29'/$$
$$Y(t)>Y(\infty)=\alpha f_0(\infty)>\alpha f_0(0)=0.$$

В результате сопоставления /29/ и /29' / получаем:

$$X(t(\tau)) > \alpha f_0(\infty) = Y(\infty),$$

$$0 < t(\tau) < X^{-1}(\alpha f_0(\infty)) = Z_1(\infty) < \infty. \qquad /29''/$$

Тем самым мы доказали $\alpha_4$ /.

Из /28/ и /29/ с помощью математической индукции легко выводятся условия /20*/, /26/ и /26'/. Следовательно, мы можем считать, что теорема доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если выполняются условия теоремы 3, то при любом $T>0$ справедливо соотношение

$$T = t_1^n(T) + \sum_{s=1}^{n-1} W_s(t_1^n(T)) = \varphi_n(t_1^n(T)), \qquad /22^*/$$

причем имеют место неравенства:

$$v_s^*(T) \leqslant t_1^n(T) \leqslant w_s^*(T), \qquad /24^*/$$

$$w_s^*(T) - v_s^*(T) \leqslant \frac{w_{s-1}^*(T) - v_{s-1}^*(T)}{2} \quad (s=1,2,\dots), \qquad /24^{**}/$$

где

$$v_s^*(T) = \begin{cases} \dfrac{v_{s-1}^*(T) + w_{s-1}^*(T)}{2}, \text{если } \varphi_n\left(\dfrac{v_{s-1}^*(T) + w_{s-1}^*(T)}{2}\right) \leqslant T, \\ v_{s-1}^*(T), \text{если } \varphi_n\left(\dfrac{v_{s-1}^*(T) + w_{s-1}^*(T)}{2}\right) > T; \end{cases}$$

$$w_s^*(T) = \begin{cases} \dfrac{v_{s-1}^*(T) + w_{s-1}^*(T)}{2}, \text{если } \varphi_n\left(\dfrac{v_{s-1}^*(T) + w_{s-1}^*(T)}{2}\right) \geqslant T, \\ w_{s-1}^*(T), \text{если } \varphi_n\left(\dfrac{v_{s-1}^*(T) + w_{s-1}^*(T)}{2}\right) < T; \end{cases} \qquad /25^*/$$

$$v_0^*(T),\ w_0^*(T) = min\left\{\frac{T}{n},\ Z_{n-1}(\infty)\right\}.$$

Следует заметить, что при $s=0$ выполняется строгое неравенство $v_0^*(T) < t_1^n(T) < w_0^*(T)$. Очевидно, что $\lim_{s\to\infty} v_s^*(T) = \lim_{s\to\infty} w_s^*(T) = t_1^n(T)$, причем

$$\left| \frac{v_{N(\varepsilon)}^*(T) + w_{N(\varepsilon)}^*(T)}{2} - t_1^n(T) \right| < \varepsilon,$$

лишь только

$$N(\varepsilon) \geqslant \log_2 \frac{w_0^*(T)}{\varepsilon} - 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. При выполнении условий теоремы 2 справедлива оценка:

$$S_n(T) < \lim_{T\to\infty} S_n(T) = S_n^* = f_0(Z_{n-1}(\infty)) + \sum_{k=1}^{n-2} e^{-\alpha\sum_{j=1}^{k} Z_{n-j}(\infty)} f_0(Z_{n-k-1}(\infty)) +$$
$$+ e^{-\alpha\sum_{j=2}^{n-1} Z_j(\infty)} f_0(Z_1(\infty)) + e^{-\alpha\sum_{j=1}^{n-1} Z_j(\infty)} f_0(\infty) < \infty, \qquad /30/$$

где

$$Z_k(\infty) = Z_1(Z_{k-1}(\infty)),$$
$$Z_1(\infty) = X^{-1}(\alpha f_0(\infty)), \qquad /31/$$

причем

$$0<Z_k(\infty)<Z_{k-1}(\infty), \qquad /32/$$

$$\lim_{k\to\infty} Z_k(\infty)=0. \qquad /33/$$

Если к тому же, $f_0(t)$ трижды непрерывно дифференцируема при $t\in[0,\delta]$, то каково бы ни было $\varepsilon>0$ найдутся такие $C\geq 0$ и $k(\varepsilon)>C$, что при $k\geq k(\varepsilon)$ будет справедливо неравенство

$$Z_k(\infty)<\frac{2}{\alpha(k\ \ C)}\ . \qquad /34/$$

Неравенство /34/ следует из /31/, /33/ и оценок $X(t)=Y'(0)+\frac{1}{2}[\beta Y'(0)+ +Y''(0)]t^2+O(t^3)$, $Y(t)=Y'(0)t+\frac{1}{2}Y''(0)t^2+O(t^3)$, справедливых при достаточно малых $t>0$ .

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Если выполняются условия теоремы 3, причем $f_0(t)$ трижды непрерывно дифференцируема при $t\in[0,\delta]$ , то, каково бы ни было $\varepsilon>0$ , найдется такое $N(\varepsilon)>k(\varepsilon)+1$, что при любом $n>N(\varepsilon)$ будет справедливо неравенство

$$S_n(T)<S^*_{N(\varepsilon)}+\frac{2(1-\varepsilon)}{\alpha}f_0'(0)\ln\frac{n-C}{N(\varepsilon)-\varepsilon}\ , \qquad /35/$$

где

$$S^*_n=\lim_{T\to\infty} S_n(T), \qquad /36/$$

$k(\varepsilon)$ и $C$ имеют смысл, указанный в следствии 3.2.

Справедливость /35/следует из /30/, /34/ и равенства $f_0(t)=f_0'(0)t+ +O(t^2)$, справедливого для достаточно малых $t>0$ .

ТЕОРЕМА 4. Если выполняются условия теоремы 2, то $S^*_n$ $(n=1,2,\dots)$ удовлетворяют условию

$$S^*_{n+1}+S^*_{n-1}<2S^*_n \quad (n=2,3,\dots). \qquad /37/$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства /37/ достаточно проверить, что при $n\geq 2$ имеют место неравенства:

$$S^*_{n+1}-S^*_n=G_{n+1}<G_n=S^*_n-S^*_{n-1}\ . \qquad /37'/$$

Из /30/ видно, что

$$S^*_n=f_0(Z_{n-1}(\infty))+e^{-\alpha Z_{n-1}(\infty)}S^*_{n-1}\,,$$

причем

$$S^*_{n-1}=[S^*_n-f_0(Z_{n-1}(\infty))]\,e^{-\alpha Z_{n-1}(\infty)}.$$

Так как

$$G_{n+1}=f_0(Z_n(\infty))-S^*_n(1-e^{-\alpha Z_n(\infty)}),$$

$$G_n=f_0(Z_{n-1}(\infty))e^{-\alpha Z_{n-1}(\infty)}+S^*_n(1-e^{-\alpha Z_{n-1}(\infty)}),$$

$$S^*_n>f_0(Z_i(\infty))\ (i=1,2,\dots),\quad f_0(Z_{n-1}(\infty))>f_0(Z_n(\infty)),$$

то

$$G_n-G_{n+1}=S^*_n(2-e^{-\alpha Z_n(\infty)}-e^{-\alpha Z_{n-1}(\infty)})-f_0(Z_n(\infty))+f_0(Z_{n-1}(\infty))e^{-\alpha Z_{n-1}(\infty)}>$$

$$>S^*_n(2-e^{-\alpha Z_n(\infty)}-e^{-\alpha Z_{n-1}(\infty)})-f_0(Z_{n-1}(\infty))(1-e^{-\alpha Z_{n-1}(\infty)})>0,$$

то есть справедливо /37/. Теорема доказана.

## § 4. Случай, когда $\varphi_i(t)=\theta e^{-\alpha t}$. Существование максимума /4/

Вышесформулированные теоремы I-4 позволяют нам установить некоторые свойства функций $F(n,T)$, значение которых в значительной мере облегчает отыскание максимума /4/.

Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi_i(t)=\theta e^{-\alpha t}$, $0<\theta<1$, $Y'(t)<0$. Для этого случая справедлива следующая

ТЕОРЕМА I'. Если выполняются условия теоремы I, то тогда[*/]

$$\tilde{R} = \max_{1\le n\le \tilde{N}}{}^{*} \max_{Z_{n-1}(0)<t<Z_{n-1}(\infty)} \Big[f_0(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\theta^k \times$$

$$\times e^{-\alpha(t+\sum_{j=1}^{k-1}W_j(t))} f_0(W_k(t))\Big] \Big/ \Big(t+\sum_{k=1}^{n-1}W_k(t)+(n-1)\tau_0+\tau_1\Big),$$

где

$$\tilde{N}=\max_{\Omega_n^*>R_1} n,$$

$$\Omega_n^*=\{f_0(Z_1(\infty))-\theta e^{-n\alpha Z_1(0)}f_0(\infty)+\theta^{n-1}e^{-(n-1)\alpha Z_{n-1}(0)}[f_0(\infty)-f_0(Z_1(\infty))]\}\times$$

$$\times\frac{1}{(1-\theta e^{-\alpha Z_{n-1}(0)})((n-1)\tau_0+\tau_1)}$$

$$Z_1(\infty)=X^{-1}(\theta\alpha f_0(\infty)),\quad Z_{n-1}(\infty)=Z_{n-2}(Z_1(\infty)),$$

знак „$\max^*$" означает, что максимум берется лишь по тем $n$, для которых внутренний максимум существует. Справедливость теоремы следует из неравенств:

$$S_n(T)<\lim_{T\to\infty} S_n(T)=S_n^*<\sum_{k=0}^{n-2}(\theta e^{-\alpha Z_{n-1}(0)})^k f_0(Z_1(\infty))+\theta^{n-1}e^{-\alpha(n-1)Z_{n-1}(0)}f_0(\infty)=$$

$$=((n-1)\tau_0+\tau_1)\Omega_n^*,\qquad R_n<\frac{S_n^*}{(n-1)\tau_0+\tau_1}<\Omega_n^*$$

и условия:

$$\tilde{R}=\max_{n\ge 1}{}^{*}\max_{T>T_n}\frac{S_n(T)}{T+(n-1)\tau_0+\tau_1},$$

которое вытекает из справедливости при $T\le T_n$. Тождества $S_n(T)\equiv S_{n-1}(T)$, согласно /20'/.

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Из доказательства теоремы I' видно, что искомая величина $\tilde{N}$ удовлетворяет неравенству

$$\tilde{N}\le \left]\frac{f_0(Z_1(\infty))+(\theta-\theta^2)f_0(\infty)-(1-\theta)R_1\tau_1}{(1-\theta)R_1\tau_0}\right[+1.$$

Случай, рассмотренный в теореме 2, является наиболее простым в смысле отыскания максимума /4/. Действительно, в данном случае справедлива следующая теорема 2'.

ТЕОРЕМА 2'. Если выполняются условия теоремы 2, то

---

*/ Здесь для общности обозначений принято, что $Z_0(t)=t$; $\sum_{i=1}^{m}=0$, если $m=0$.

$$\tilde{R}=R_1=\max_{T>0}\frac{f_o(T)}{T+\tau_1},$$

причем максимум /4/достигается при $T=T^*=t_1(T)$, удовлетворяющем уравнению

$$f_o'(T)(T+\tau_1)=f_o(T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при выполнении условий теоремы 2 $t^n_{nj}(T)\equiv 0$ для $n\geq 2, j\geq 1, T\geq 0$, то $S_{1+k}(T)\equiv S_1(T)$, каковы бы ни были $k\geq 1, T\geq 0$. Следовательно, при $k\geq 1$

$$R_{1+k}=\max_{T>0}\frac{S_n(T)}{T+k\tau_o+\tau_1}=\max_{T>0}\frac{S_1(T)}{T+k\tau_o+\tau_1}<$$

$$<\max_{T>0}\frac{S_1(T)}{T+\tau_1}=R_1=\tilde{R},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2'. I. Утверждения теоремы 2' остаются в силе, если $\varphi_i=e^{-\alpha t}$, $f_o(t)$ удовлетворяет условию /$\omega$/ и $Y'(t)\geq 0$ для $t\geq 0$. В частности, если $Y'(t)\equiv 0$, то $f_o(t)=f_o'(0)(1-e^{-\alpha t})$, откуда следует, что в данно.. случае

$$f_o(t_1)+\sum_{k=2}^{n}e^{-\alpha\sum_{j=1}^{k-1}}f_o(t_k)\equiv f_o'(0)(1-e^{-\alpha\sum_{j=1}^{n}t_j})=S_1(\sum_{j=1}^{n}t_j),$$

каковы бы ни были $t_j\geq 0$, то есть в общем случае при $Y'(t)\geq 0$ оптимальные $t^n_i(T)$, доставляющие максимум /3/, могут определяться неоднозначно, но сам максимум /4/ всегда определяется единственным образом.

Рассмотрим теперь последний случай, когда $\varphi_i(t)=e^{-\alpha t}$, $Y'(t)>0$. Для этого случая справедлива

ТЕОРЕМА 3'. Если выполняются условия теоремы 3 и существуют такие $N_1\geq 2$ и $N_2\geq N_1$, что $\Omega_{N_1-1}<\Omega_{N_1}$, $\Omega_{N_1}\geq\Omega_{N_1+1}$, $\Omega_{N_2}\leq Q_{N_2-1}$, где

$$\Omega_n=\frac{S_n^*}{(n-1)\tau_o+\tau_1},$$

$$Q_N=\max_{1<n<N}R_n, \qquad /38/$$

то

$$\tilde{R}=Q_{N_2-1}=\max_{1\leq n\leq N_2-1}R_n, \qquad /38'/$$

причем

$$R_n=\max_{0<t<z_{n-1}(\infty)}\{[f_o(t)+\sum_{k=1}^{n-1}e^{-\alpha(t+\sum_{j=1}^{k-1}w_j(t))}f_o(W_k(t)\frac{}{t+\sum_{k=1}^{n-1}W_k(t)+(n-1)\tau_o+\tau_1}\} \qquad /39/$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4 следует, что при $n>N_1+1$

$$\Omega_n\leq\Omega_{N_1+1}\leq\Omega_{N_1}. \qquad /40/$$

Кроме того, согласно условию теоремы,

$$\Omega_{N_2}\leq Q_{N_2-1}, \qquad /41/$$

причем

$$R_n<\Omega_n \qquad /41'/$$

для всех $n \geq 1$.

В результате сопоставления /38/, /40/, /4I/ и /4I′/ получаем /38′/. Справедливость /39/ следует из теоремы 3.

Тем самым теорема 3′ доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 3′ . I. Если при выполнении условий теоремы 3 имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \Omega_n = 0, \qquad /42/$$

то тогда справедлива теорема 3′ . В частности, если выполняются условия следствия 3.3, то

$$S_n^* < f_0(\infty) + c_1 \ln n, \qquad /35'/$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \Omega_n = \lim_{n \to \infty} \frac{f_0(\infty) + c_1 \ln n}{(n\ 1)\tau_0 + \tau_1} = 0.$$

Поступила в редакцию 20.10.1967г.

Л и т е р а т у р а

I. В.В. Леонов, Асимптотическое программирование. I,-Дискретный анализ, вып. 4, РИО СО АН СССР, Новосибирск, I965.

2. В.В. Леонов. Асимптотическое программирование и синтез устойчивых систем. "Второй метод Ляпунова и его применение в энергетике", часть I, Изд. "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, I966.

3. Р. Беллман. Динамическое программирование, ИЛ, I960.

4. В.В. Леонов. Задача динамического программирования для одномерных многошаговых процессов. -Проблемы кибернетики, вып. I7, Изд. "Наука", М., I966.