Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1968 г. выпуск I.
УДК. 90С-30

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В.С.Кривопуцкий

В данной статье рассматривается задача на оптимум для системы /I.I/ с распределенными параметрами. Находятся необходимые, а также достаточные условия оптимальности управления при различных предположениях о виде системы /I.I/. Проводится качественное исследование оптимального управления для линейных систем второго порядка с постоянными коэффициентами.

## § I. Постановка задачи

Пусть дана система:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} + c_i\frac{\partial x_i}{\partial l} = f_i(x_1,\dots,x_n,t,l,u_1,u_2,\dots,u_m)$$
$$(i=1,2,\dots,n), \qquad /I.I/$$

которая решается в области $t\in[0,T]$, $l\in[M_1,M_2]$ при начальных условиях:

$$x_i(0,l)=\varphi_i(l),(i=1,\dots,n). \qquad /I.2/$$

В системе /I.I/ $u_j=u_j(t)$ $(j=1,2,\dots,m)$ являются управляющими функциями, $c_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ - постоянные, $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2\neq 0$, причем $f_i$ $(i=1,\dots,n)$ - непрерывные функции от $t$ и $l$ при $(t,l)\in D=$ $=\{(t,l): 0\leq t\leq T;\ M_1\leq l\leq M_2\}$, а $\varphi_i(l)$ $(i=1,2,\dots,n)$ непрерывны при $l\in[M_1,M_2]$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ $(i,k=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m)$ непрерыны при $(x_1,\dots,x_n,l,t,u_1,\dots$ $\dots,u_m)\in D\cap E_n\cap U$.

Константы $M_1, M_2$ выбираются таким образом, чтобы решение задачи Коши /I.I/, /I.2/ существовало в области $D_0=\{(t,l): 0\leq t\leq T; 0\leq l\leq L\}$, где $L$ - верхний предел интегрирования в нижерассматриваемом функционале /I.3/. В частности, можно положить

1/ $M_1=-T\max\limits_{1\leq i\leq k} c_i$, $M_2=(L-T\min\limits_{1\leq j\leq n-k} c_{k+j})$ при $c_i>0,(i=1,\dots,k)$, $c_{k+j}=0,(j=1,\dots,n-k)$;

2/ $M_1=-T\max\limits_{1\leq i\leq n} c_i$, $M_2=L$ при $c_i>0,(i=1,\dots,n)$;

3/ $M_1=0$, $M_2=(L-T\max\limits_{1\leq i\leq n} c_i)$ при $c_i<0,(i=1,\dots,n)$.

В качестве допустимых управлений [I] считаем вектор-функции $\bar{u}(t)=$ $=(u_1(t),\dots,u_m(t))$ удовлетворяющие условиям:

1/ $\bar{u}(t)\in U$ при $t\in[0,T]$, где $U\in E_m$ есть замкнутая выпуклая область;

2/ $\bar{u}(t)$ - кусочно-непрерывная функция от $t\in[0,T]$. Требуется найти допустимое управление $\bar{u}(t)=\bar{u}^*(t)$, максимизирующее функционал:

$$S=\int_0^L\Big[\sum_{i=1}^n b_i(l)x_i(T,l)\Big]dl. \qquad /1.3/$$

$b_i(l)$ - непрерывные функции от $l\in[0,L]$

## § 2. Необходимые условия оптимальности

Введем обозначения:

$$\bar{z}\bar{v}=\sum_{i=1}^n z_i v_i,$$
$$[\bar{z},\bar{v}]=\int_0^T\int_0^L \bar{z}\bar{v}\,dl\,dt. \qquad /2.1/$$

Систему /1.1/, /1.2/ представим в виде:

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}+C\frac{\partial\bar{x}}{\partial l}=\bar{f}(\bar{x},t,l,\bar{u}), \qquad /2.2/$$

$$\bar{x}(0,l)=\bar{\varphi}(l), \qquad /2.3/$$

где $C=\|c_i\,\delta_{ki}\|$, $\delta_{ki}=\begin{cases}1 & \text{при } k=i\\ 0 & \text{при } k\neq i\end{cases}$ Очевидно, что

$$S=\neq[\bar{b}(l),\bar{x}(T,l)]. \qquad /2.4/$$

Введем в рассмотрение систему:

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}+C\frac{\partial\bar{x}}{\partial l}=\bar{f}(\bar{x},t,l,\bar{u}),$$
$$\frac{\partial\bar{z}}{\partial t}+C\frac{\partial\bar{z}}{\partial l}=-\,\Omega, \qquad /2.5/$$

которая решается при всевозможных допустимых управлениях и краевых условиях:

$$\bar{x}(0,l)=\bar{\varphi}(l),$$
$$\bar{z}(T,l)=\neq\bar{b}(l), \qquad /2.6/$$

а также функцию:

$$G=[\bar{z}(t,l),\bar{f}(\bar{x},t,l,\bar{u})]-[C\bar{z},\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}]. \qquad /2.7/$$

В системе /2.5/

$$\Omega=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}z_1+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_1}z_n\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}z_1+\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}z_n\end{pmatrix}$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы управление $\bar{u}(t)$ было оптимальным, необходимо, чтобы оно в каждый момент времени $t$ доставляло максимум функции $G$ в предположении, что $\bar{x}(t,l),\bar{z}(t,l)$ являются решением системы /2.5/, /2.6/ при том же самом управлении.

Теорема доказывается аналогично доказательству подобных же результатов, полученных в работе [2], с помощью рассмотрения малых вариаций $\varepsilon\bar{\theta}(t)$ управления $u(t)$, где $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ и $\bar{\theta}$ - вектор, который по модулю равен 1 и направлен внутрь области $U$.

Легко показать, что теорема эквивалентна условию:

$$\int_0^L H(\bar{z}^*(t,l),\bar{x}^*(t,l),\bar{u}^*(t))dl=\max_{\bar{u}\in U}\int_0^L H(\bar{z}^*(t,l),\bar{x}^*(t,l),\bar{u})dl, \qquad /2.8/$$

где $\bar{z}^*(t,l), \bar{x}^*(t,l)$ - решение системы /2.5/, /2.6/ при оптимальном управлении $\bar{u}^*(t)$, $H(\bar{z}^*, \bar{x}^*, \bar{u}^*)=\bar{z}^*\bar{f}(\bar{x}^*,t,l,\bar{u}^*)$.

Очевидно, что в случае, когда управление зависит одновременно от $t$ и $l$, необходимое условие оптимальности принимает вид:

$$H(\bar{z}^*(t,l),\bar{x}^*(t,l),\bar{u}^*(t,l))=\max_{\bar{u}\in U} H(\bar{z}^*(t,l),\bar{x}^*(t,l),\bar{u}). \qquad /2.9/$$

§ 3. Линейная задача оптимального управления

В этом параграфе рассматривается система /I.I/ вида:

$$\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}+C\frac{\partial\bar{x}}{\partial l}=A\bar{x}+B\bar{u}, \qquad /3.1/$$

$$\bar{x}(0,l)=\bar{\varphi}(l), \qquad /3.2/$$

где $A$ и $B$ - постоянные матрицы соответственно размерностей $n\times n$ и $n\times m$. При этом предполагается, что область $U$ является выпуклым многогранником и имеет точку „$\bar{0}$" своей внутренней точкой. Основываясь на результатах, содержащихся в работах [3 , 4], мы можем доказать, что в данном случае для оптимальности управления необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\bar{z}'(t,l)B\bar{u}^*(t,l)=\max_{\bar{u}\in U}\bar{z}'(t,l)B\bar{u}, \qquad /3.3/$$

где $'$ означает транспонирование матрицы,

и $\bar{z}$ удовлетворяет системе:

$$\frac{\partial\bar{z}}{\partial t}+C\frac{\partial\bar{z}}{\partial l}=-A'\bar{z}, \qquad /3.4/$$

решаемой при условиях: $\bar{z}(T,l)=\frac{1}{T}\bar{b}(l)$.

§ 4. Численное решение задачи

Для численного отыскания аппроксимации оптимального управления можно использовать метод динамической бидихотомии, предложенный в [5 , 6]. Например, в случае системы вида:

$$\frac{\partial x}{\partial t}+c_1\frac{\partial x}{\partial l}=f(x,y,u), \qquad /4.1/$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}+c_2\frac{\partial y}{\partial l}=g(x,y,u),$$

решаемой в области $D=[0\leq t\leq T,\ 0\leq l\leq L+T-\frac{L}{T}t]$

при начальных условиях:

$$x(0,l)=\psi(l),\quad y(0,l)=\varphi(l), \qquad /4.2/$$

было получено, что функционал вида /I.3/ достигает своего максимального значения при $u(t)\equiv 1$, $t\in[0,T]$. Система решалась на ЭВМ "М-20" в предположении, что $c_1=c_2=-1$,

$f(x,y,u)=(1+1{,}2u)x+(1{,}4+1{,}6u)y$, $g(x,y,u)=(2+2{,}2u)x+(2{,}4+2{,}6u)y$,

$b_1(l)=\sin\frac{\pi}{2}l$, $b_2(l)=\cos\frac{\pi}{2}l$, $\psi(l)=\sqrt{l}$, $\varphi(l)=l^2$, $T=1$, $L=2$, $U=\{1,0,-1\}$.

При счете для аппроксимации системы дифференциальных уравнений/4.I/ использовалась разностная схема:

$$\frac{x_n^{m+1}-x_n^m}{\tau}-\frac{x_{n+1}^m-x_n^m}{h}=f_n^m,\quad \frac{y_n^{m+1}-y_n^m}{\tau}-\frac{y_{n+1}^m-y_n^m}{h}=g_n^m, \qquad /4.3/$$

$$x_n^0=\psi_n,\quad y_n^0=\varphi_n,$$

причем полагалось $\tau/h\leqslant 1$. Сходимость и условная устойчивость схемы /4.3/ следует из [7].

## § 5. Некоторые качественные исследования

Рассмотрим управляемую систему:

$$\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial l}=a_{11}x+a_{12}y+c_{11}u(t,l),$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial l}=a_{21}x+a_{22}y+c_{21}u(t,l), \qquad /5.1/$$

с начальными условиями:

$$x(0,l)=\psi_1(l),\quad y(0,l)=\psi_2(l). \qquad /5.2/$$

Функции $\psi_1(l),\psi_2(l)$ непрерывны в $D_0\ [-T\leqslant l\leqslant L]$ , а $b_1(l)$ и $b_2(l)$ непрерывны и дифференцируемы при $l\in[-T,\ L+T]$

Очевидно, что система /5.I/ при помощи неособенного преобразования может быть сведена к одному из видов:

$$\text{I/}\quad \frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial l}=\lambda_1 w+c_1 u,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial l}=\lambda_2 v+c_2 u; \qquad /5.3/$$

$$\text{II/}\quad \frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial t}=\lambda w+v+c_1 u,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial l}=\lambda v+c_2 u. \qquad /5.4/$$

Для простоты будем считать, что система /5.I/ уже имеет один из этих видов. Исследуем задачу синтеза оптимального управления. Используя результат § 3, получим оптимальное управление для системы /5.3/:

$$u^*(t,l)=\mathrm{Sign}\left(\frac{c_1}{T}e^{\lambda_1(T-t)}b_1(T-t+l)+\frac{c_2}{T}e^{\lambda_2(T-t)}b_2(T-t+l)\right).$$

Из /5.5/ следует, что уравнения линий переключения имеют вид:

$$c_1b_1(T-t+l)+c_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)(T-t)}b_2(T-t+l)=0. \qquad /5.6/$$

На основании /5.6/ заключаем, что линий переключения нет, если $c_1$ и $b_1$ , $c_2$ и $b_2$ соответственно одного и того же знака. Рассмотрим пример. Пусть $c_2=-c_1$ , $b_1(l)=e^{k_1l}$, $b_2(l)=e^{k_2l}$ , где $k_1$, $k_2$ - вещественные постоянные, не равные между собой. В этом случае из /5.6/ получаем уравнение линии переключения:

$$l=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)+(k_2-k_1)}{k_1-k_2}(T-t). \qquad /5.7/$$

Если $\lambda_2=k_1$ и $\lambda_1=k_2$ , то уравнение /5.7/ вырождается в прямую $l=0$ , которая делит плоскость на две полуплоскости. При этом легко показать, что в нижней полуплоскости $u^*(t,l)\equiv 1$ , а в верхней $u^*(t,l)\equiv -1$ , при $k_1<k_2$. Положим $\lambda_1=\lambda_2$ в уравнении /5.6/:

$$c_1 b_1(T-t+l)+c_2 b_2(T-t+l)=0 \qquad /5.8/$$

Если в этом случае линии переключения существуют, то они имеют вид:

$$l=t+(\zeta_i-T), \qquad /5.9/$$

где $\zeta_i$ - точки, в которых выполняется равенство /5.9/. В данном примере линии переключения для оптимального управления в системе /5.4/ определяется с помощью уравнения:

$$[c_1+c_2(T-t)]e^{k_1(T-t+l)}+c_2 e^{k_2(T-t+l)}=0. \qquad /5.10/$$

Как видно, это уравнение не зависит от $\lambda$ .

Поступила в редакцию 8.7.1968 г.

Литература

1. А.Г.Бутковский. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. Изд. "Наука", М.,1962.

2. Stanley Katz. A general minimum principle for end-point control problems. "J. Electronic and Control", 1964, vol.16,N 2.

3. В.Г.Болтянский. Математические методы оптимального управления. Изд. "Наука",М., 1966.

4. Л.И.Розоноэр. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем Автоматика и телемеханика 1959,т.XX, № 10.

5. В.В.Леонов О численных методах последовательной оптимизации процессов. В сб. "Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике", аннотации докладов. Изд. АН СССР, М., 1965.

6. В.В.Леонов. Метод динамической $(k_0,\dots,k_s)$ -хотомии решения задач на оптимум. Дискретный анализ, Новосибирск, 1968, вып. 13.

7. С.К.Годунов, В.С.Рябенький. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1962.