Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1968 г. выпуск I.
УДК.519.95.

# ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ПО ВРЕМЕНИ.II

В.А.Евстигнеев

## § I. Многополюсные транспортные сети. Вывод формулы для $T_{min}$

Напомним вначале, что для любой задачи о перевозках, в которой для каждой дуги ограничивается объем перевозимого груза /например, транспортная задача по стоимости, по минимуму потерь/, многополюсная сеть сводится к двухполюсной, так называемой "расширенной" сети / [1], см. также [2] /, путем введения фиктивных входа и выхода. Для транспортной задачи по времени подобное сведение многополюсной сети к двухполюсной в общем случае невозможно, так как количество груза, которое может быть доставлено в полюс сети /или вывезено из него/, определяется только строением сети и заданным временем $T$ , в течение которого осуществляются перевозки. Поэтому мы выделяем многополюсные транспортные сети в качестве отдельного объекта исследования. Докажем здесь, что формула /9/ [3] справедлива для многополюсных сетей при выполнении ряда дополнительных условий.

Пусть дана сеть $G_{nm}$ с входами $a_i$, $1 \leq i \leq n$ , и выходами $z_j$ , $1 \leq j \leq n$ . Известно, что запас груза в $a_i$ есть $P_i$, $0 < P_i < \infty$ , а потребность $z_j$ есть $Q_j$, $\sum_i P_i = \sum_j Q_j$ .

ЛЕММА I. Максимальное количество $V(G_{nm}, T)$ груза, перевозимое по сети $G_{nm}$ за время $T$ , равно максимальному количеству $V(\tilde{G}_{nm}, T)$ груза, перевозимому за тот же интервал времени $T$ по расширенной сети $\tilde{G}_{nm}$, если только $T \geq T(\tilde{G}_{nm})$.*)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для расширенной сети максимальное количество груза определяется по формуле /3/ [3]; доказательство леммы немедленно следует из того, что время пробега по фиктивным дугам равно нулю, следовательно, количество груза, перевезенное по любой дуге, определяется только строением сети и временем перевозки.

Пусть $\varphi(u)$ - оптимальный поток по сети $\tilde{G}_{nm}$ и $g$ - подсеть сети $\tilde{G}_{nm}$ с оптимальным потоком $\varphi_g(u)$ . Если через $H$ обозначить сеть, получающуюся из $G_{nm}$ заменой пропускных способностей $c(u)$ на $c_H(u) = c(u) - \varphi_g(u)$ , то подсеть $g$ будем называть статической, если величина $\varphi_H(u)$ оптимального для $H$ потока на дуге $u$ равна $\varphi(u) - \varphi_g(u)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. I. Подсеть $g$ со входом $a(g)$ и выходом $z(g)$ называется: $(a,z)$ - фиксированной, если $g$ - статическая подсеть сети $G$ ;
$a$ - фиксированной, если перевозки из $a(g)$ возможны только в один выход $z$ ;
$z$ - фиксированной, если перевозки в $z(g)$ возможны только из одного входа $a$ .

x/ Т.е. $T$ таково, что в сети $\tilde{G}_{nm}$ имеет место стационарный режим

ТЕОРЕМА I. Время $T$ перевозки грузов $P_i$ по сети $G$, вычисляемое по формуле

$$T = \left[\frac{\sum_i P_i - 1 + \sum \varphi(u) t(u)}{\Phi}\right], \qquad /I/$$

где $\varphi(u)$ - наибольший оптимальный поток по расширенной сети $\tilde{G}_{nm}$, есть минимальное время тогда и только тогда, когда

а/ $\sum_i P_i = \sum_j Q_j > V(T-1, G_{nm})$;

б/ количество $Q(g)$ груза, перевозимое за время $T$ по $(a, z)$ - фиксированной подсети, удовлетворяет неравенству:

$$Q(g) \geq V(T-1, g);$$

в/ $P(a(g)) \leq V(T, g) \leq Q(z(g))$, если сеть $g$ $a$- фиксированна;

г/ $V(T, g) \geq Q(z, g)$ и $P(a(g)) \geq V(T, g)$, если подсеть $g$ $z$- фиксированна;

д/ если условие а/ выполнено, то хотя бы для одной совокупности $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ входов сети

$$V(T, G^{(a)}_{i_1, \ldots, i_k}) \geq \sum_{j=1}^{k} P_{i_j} \geq V(T-1, G^{(a)}_{i_1, \ldots, i_k}), \quad 1 \leq k \leq n, \qquad /2/$$

где $G^{(a)}_{i_1, \ldots, i_k}$ - подсеть сети $\tilde{G}_{nm}(x_0, z)$, у которой $x_0$ соединен только с входами $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$; или хотя бы для одной совокупности $z_{j_1}, \ldots, z_{j_k}$ выходов сети

$$V(T, G^{(z)}_{j_1, \ldots, j_e}) \geq \sum_{i=1}^{e} Q_{j_r} > V(T-1, G^{(z)}_{j_1, \ldots, j_e}), \quad 1 \leq r \leq m, \qquad /3/$$

где $G^{(z)}_{j_1, \ldots, j_e}$ - подсеть сети $\tilde{G}_{nm}(x_0, z)$, у которой $z$ соединен только с выходами $z_{j_1}, \ldots, z_{j_k}$ и для любого входа и выхода выполняется левое неравенство в /2/ и /3/.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. <u>Необходимость</u>. Поскольку формула /I/есть минимальное время перевозки груза $P = \sum_i P_i$, то условие а/ выполняется автоматически. Допустим, что не выполнено одно из условий б/, в/или г/. Поскольку каждая $(a, z)$ - фиксированная подсеть статическая, то при невыполнении условия б/ формула /I/ неверна, так как она выводилась из предположения о максимальной загрузке всех статических подсетей; невыполнение условий в/ и г/ влечет за собой невозможность либо вывезти весь груз $P(a(g))$ из входа $a(g)$ /условие в/ /, либо удовлетворить спрос $Q(z(g))$ в полюсе $z(g)$ /условие г/ /, т. е. $T$ при этом не будет минимальным временем. Необходимость выполнения условия д/ очевидна.

<u>Достаточность</u>. Если условия а/ - д/ выполнены, то $T$ есть минимальное время, так как за время $T$ перевозится достаточное количество груза /условие а/ /, весь груз вывозится из входов $a_i$ и удовлетворяются все потребности $Q_j$ /условия б/ - д/ /.

Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Транспортная сеть $G$ называется <u>допустимой</u> для некоторого $T$, если для нее выполнены условия а/ - д/ теоремы I.

СЛЕДСТВИЕ. Для оптимальности по времени плана перевозок по допустимой сети $G_{nm}$ достаточно, чтобы

$$\max_{i,j}|T_i-T_j|\le 1,\quad i,j=1,2,\dots,m, \qquad /4/$$

где $T_i$ – время прибытия последней порции груза на выход $Z_i$ .

ПРИМЕР I. Рассмотрим сеть $G_{22}=(a_1,a_2;X;Z_1,Z_2)$ / рис. I/, $P_1=7;\ P_2=10;\ q=2;\ q=15$ ; пропускные способности дуг $c(u)=2$ для всех $u$ ; $t(u)=1$.

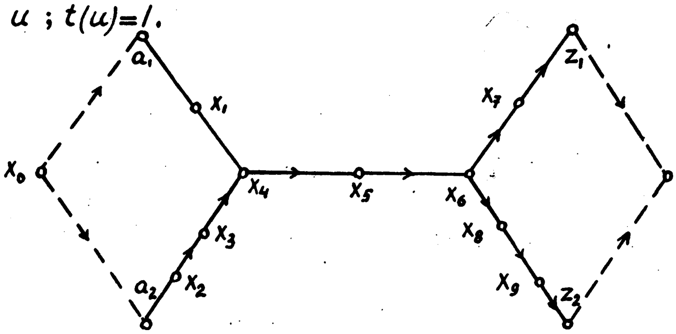


Рис. I. Сеть $G_{22}$.

Легко видеть, что поток $\varphi(u)$/оптимальный для расширенной сети $\tilde{G}_{22}(x_0,Z)$ / отличен от нуля только на пути $\mu=[a_1,x_1,x_4,x_5,x_6,x_7,Z_1]$ , величина его $\Phi=2$, $t(\mu)=6$ . По /I/ имеем

$$T=\left[\frac{17-1+6\cdot 2}{2}\right]=14.$$

Чтобы убедиться, является ли $T=14$ минимальным временем перевозки грузов $P_i$ по сети $G_{22}$ , проверим выполнимость для нашего случая условий а/ – д/ теоремы I.

а/ $V(T-1,G_{22})=2\cdot(13-6+1)=16<\sum_i P_i=17;$

условия б/– г/проверять не нужно,так как фиксированных подсетей нет;

д/ $V(T,G_1^{(a)})=2(14-6-1)=18>P_1=7;\ P_1<V(T-1,G_1^{(a)})=16;$

$V(T,G_2^{(a)})=16>P_2=10;\ P_2<V(T-1,G_2^{(a)})=14;$

$V(T,G_1^{(z)})=18>q_1=2;\ q_1<V(T-1,G_1^{(z)})=16;$

$V(T,G_2^{(z)})=16>q_2=15>V(T-1,G_2^{(z)})=14,$

поскольку условие д/ выполнено для $Z_2$ , то ясно, что $T=14$ есть минимальное время перевозки грузов $P_1=7,\ P_2=10$ .

## § 2. Общий метод

Для решения поставленной задачи в общем случае, когда сеть $\tilde{G}_{nm}$ недопустима для $T$ , определяемого из формулы /I/, рассмотрим метод, основанный на теории оптимальных потоков, развитой Хоанг Туем и Меноном.

Поскольку функция $\rho(u)$ , определенная на всех $u\in U$ сети $G_{nm}$ и равная количеству груза, перевозимого по дуге при реализации некоторого плана перевозок, есть поток удовлетворяющий заданной системе спросов $\{P_i,Q_j\},\ i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,m$ , то имеет место следующий результат.

ЛЕММА 2. Функция $\rho(u)$ для сети $G_{nm}$ есть наибольший поток в расширенной сети $\tilde{G}_{nm}(x_0,Z)$ с пропускными способностями дуг $c(u,T)$, равными максимальному количеству груза, перевозимого по дуге $u$ за время $T$.

Лемма очевидна, так как расширенная сеть получается из исходной сети введением фиктивного входа $x_0$, соединенного с каждым входом $a_i$ дугой $(x_0, a_i)$, у которой $c(x_0, a_i) = p_i$ и $t(x_0, a_i) = 0$, и фиктивного выхода $Z$, соединенного с каждым выходом $z_j$ дугой $(z_j, Z)$, у которой $c(z_j, Z) = q_j$ $t(z_j, Z) = 0$. Кроме того, если перевозки длятся $T$ моментов времени, то величина груза, перевозимого по любой дуге $u$ не превышает максимального количества груза, перевозимого по этой дуге за время $T$.

Пусть $m(u)$ - совокупность всех элементарных путей из $A$ в $Z$, проходящих через дугу $u$. Обозначим через $g(u)$ подсеть, образованную всеми путями из $m(u)$. Тогда легко видеть, что

$$c(u,T) = \psi(u)(T+1) - \sum_{v \in g(u)} \varphi_u(v)\, t(v), \qquad /5/$$

где $\psi(u)$ - величина оптимального потока $\varphi_u(v)$ по подсети $g(u)$.

Пусть $p(u)$ - количество груза, перевозимое по дуге $u$; тогда из /5/ имеем

$$T(u) = \left[ \frac{p(u) - 1 - \sum_{v \in g(u)} \varphi_u(v)\, t(v)}{\psi(u)} \right], \qquad /6/$$

следовательно, время $T$ перевозки грузов $P_i$ равно

$$T = \max_{u \in U} T(u),$$

где максимум берется по всем дугам сети.

Пусть $K$ - цикл в сети $G_{nm}$ с потоком $p(u)$. Назовем временем $T(K)$ цикла $K$ величину $\max_{u \in K} T(u)$. Если на цикле $K$ произвести сдвиг потока $p(u)$ на величину $\Delta P$, то при этом /если $\Delta P \geq \max_{u \in K} \varphi(u)$/ $T(K)$ уменьшается или увеличивается в зависимости от направления сдвига и величины потока на цикле. Поскольку $T(u)$ принимает значения из дискретной подгруппы действительной прямой, то, как доказано Меноном [4], конечным числом сдвигов на циклах можно от потока $p(u)$ с временем перевозки $T$ перейти к потоку $p'(u)$ с временем $T' \leq T$, откуда и следует применимость графо-аналитического метода [4 - 6] к решению транспортной задачи по времени.

В заключение сформулируем простое, но важное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы $T = \max_{u \in U} T(u)$ было минимальным временем перевозки, достаточно, чтобы или

а/ дуга $u$, для которой $T(u) = T$, не входила бы ни в один цикл, или

б/ в сети существовал бы цикл $K$, у которого $T(K) = T$ и любой сдвиг потока на $K$ время $T(K)$ только увеличивал.

Теорема 2 сформулирует признак, по которому можно судить о конце вычислений потока $p(u)$, обеспечивающего минимальное время перевозки грузов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $c(u,T)$ записано в виде

$$c(u,T) = \psi(u)T - A(\varphi), \qquad /7/$$

то при известном $p(u)$ $T(u)$ вычисляется по формуле

$$T(u)=\begin{cases}\left[\dfrac{p(u)-1+A(\varphi)}{\psi(u)}+1\right], & p(u)\neq 0,\\ 0, & p(u)=0.\end{cases} \qquad /8/$$

Действительно, если $p(u)-A(\varphi)=n\cdot\psi(u)$, то $T(u)=n$ и $p(u)=\psi(u)\cdot n-A(\varphi)$; если $(n-1)\psi(u)<p(u)+A(\varphi)<n\cdot\psi(u)$, тогда $T(u)$ также равно $n$ и $(n-1)\psi(u)-A(\varphi)<p(u)<\psi(u)\cdot n-A(\varphi)$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим сеть $G_{16}$ /рис. 2/,

$$p=116,\ q_1=14,\ q_2=21,\ q_3=18,\ q_4=22,\ q_5=15,\ q_6=26.$$

Все необходимые данные сведены в таблицу I.

Найдем наибольший оптимальный /в смысле минимума функционала $\Sigma\varphi(u)+(u)$/поток в расширенной сети $\tilde{G}_{nm}(a,Z)$. Величины $\varphi(u)$ подставлены на рис. 2 возле соответствующих дуг. По формуле /I/ имеем

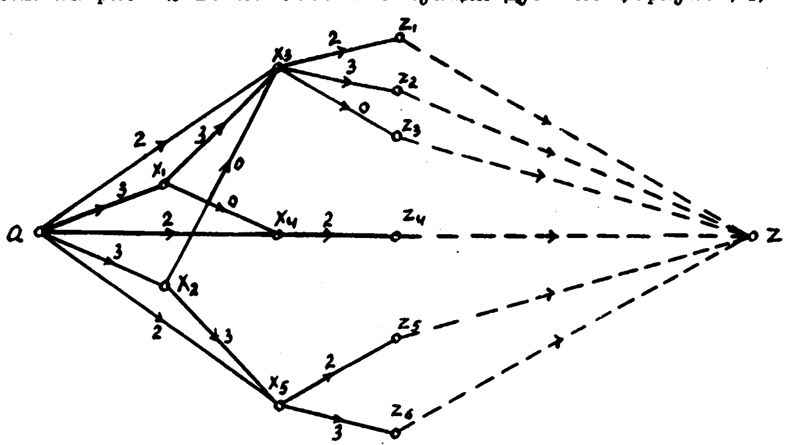

Рис. 2. Сеть $G_{16}$

$$T=\left[\frac{\Sigma_i P_i-1+\Sigma\varphi(u)t(u)}{\Phi}\right]=\left[\frac{116-1+75}{12}\right]=15.$$

Проверяем допустимость сети $G_{16}$ для $T=15$.

а/ $\Sigma_i P_i=116>V(T-1,G_{16})=12\cdot(15-1+1)-75=105.$

Так как все подсети являются $Z$ - фиксированными, из условий б/-г/ проверяем г/. Имеем

Таблица I

| № п/п | Дуга | $c(u)$ | $t(u)$ | $\varphi(u)$ | $\psi(u)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $(a_1,x_1)$ | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 | $(a_1,x_2)$ | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | $(a_1,x_3)$ | 2 | 4 | 2 | 2 |
| 4 | $(a_1,x_4)$ | 2 | 4 | 2 | 2 |
| 5 | $(a_1,x_5)$ | 2 | 4 | 2 | 2 |
| 6 | $(x_1,x_3)$ | 3 | 2 | 3 | 3 |
| 7 | $(x_1,x_4)$ | 3 | 2 | 0 | 3 |
| 8 | $(x_2,x_3)$ | 3 | 4 | 0 | 3 |
| 9 | $(x_2,x_5)$ | 3 | I | 3 | 3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I0 | $(x_3, z_1)$ | 3 | 2 | 2 | 3 |
| II | $(x_3, z_2)$ | 3 | 2 | 3 | 3 |
| I2 | $(x_3, z_3)$ | 3 | 2 | 0 | 3 |
| I3 | $(x_4, z_4)$ | 3 | 2 | 2 | 3 |
| I4 | $(x_5, z_5)$ | 3 | 2 | 2 | 3 |
| I5 | $(x_5, z_6)$ | 3 | 2 | 3 | 3 |

$i$ / для подсети $g(a, z_1)$ :

$$V(T,g)=2\cdot(15-6+1)-1(15-7+1)=29>Q(z_1)=q=14;$$

$ii$ / для подсети $g(a, z_2)$ :

$$V(T,g)=29>Q(z_2)=q_2=21;$$

$iii$ / для подсети $g(a, z_3)$ :

$$V(T,g)=29>Q(z_3)=q_3=18;$$

$iv$ / для подсети $g(a, z_4)$ :

$$V(T,g)=29>Q(z_4)=22;$$

$v$ / для подсети $g(a, z_5)$ :

$$V(T,g)=30>Q(z_5)=15;$$

$vi$ / для подсети $g(a, z_6)$ :

$$V(T,g)=30>Q(z_6)=26;$$

д/ Из неравенств $i)-vi)$ видно, что левое неравенство /2/ имеет место для всех $z_i$, $i=1,2,\dots,6$ . Рассмотрим подсеть $G^{(z)}_{1,2,3}$ Для нее

$$V(15, G^{(z)}_{1,2,3})=68>q_1+q_2+q_3=53$$

и

$$q_1-q_2-q_3=53<V(14, G^{(z)}_{1,2,3})=60.$$

Аналогично, для подсети $G^{(z)}_{1,2,3,4}$

$$V(15, G^{(z)}_{1,2,3,4})=88>\sum_{i=1}^{4} q_i=75;\quad \sum_{i=1}^{4} q_i<V(14, G^{(z)}_{1,2,3,4})=78.$$

Проверяя далее, убеждаемся, что условие д/ выполняется только для подсети $G^{(a)}_1=G_{16}$ . Оно в данном случае совпадает с условием а/.

Значит, $T=15$ есть минимальное время перевозки груза $P=$ II6 по сети $G_{16}$ .

Применим для решения этой же задачи общий метод.

Подсчитаем величины $\varphi(u)$ /они приведены в табл. I /. С их помощью вычислим величины $c(u,T)$ . Например, для дуги $(x_4, z_4)$ $c(u_{13},T)$ равна по определению максимальному количеству груза, перевозимого за время $T$ по подсети, образованной всевозможными путями из $a$ в $z_4$ , и, следовательно, равна

$$c(u_{13},T)=2(T-6+1)+1(T-7+1)=3T-16.$$

Величины $c(u,T)$ помещены в табл. 2.

Возьмем какой-либо поток $p_0(u)$ , удовлетворяющий системе спросов $\{$II6; I4, 2I, I8, 22, I5, 26$\}$ , и подсчитаем для каждой дуги величину $T_0(u)$ по формуле /8/, так как $c(u,T)$ записаны в виде $\varphi(u)T-A(\varphi)$.

Для дуги $u_{13}$ $(x_4, z_4)$ имеем, например, $p_0(u_{13})=q_4=22$ и $T_0(u_{13})=\left[\frac{22-1+16}{3}+1\right]=13$ и т.д. /см. табл. 2/. Для потока $\max\limits_u T_0(u)= = T(u_3)=23$. Выделим цикл, в который входит $u_3$ и в котором $T_0(u)<T$, если только $u\neq u_3$.

Таблица 2

| № п/п | $c(u,T)$ | $p_0(u)$ | $T_0(u)$ | $p_1(u)$ | $T_1(u)$ | $p_2(u)$ | $T_2(u)$ | $p_3(u)$ | $T_3(u)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 3T-I8 | 20 | I3 | 3I | I7* | 25 | I5 | 26 | I5 |
| 2 | 3T-I5 | 26 | I4 | 26 | I4 | 36 | I7* | 30 | I5 |
| 3 | 2T-I0 | 35 | 23* | 24 | I7* | 20 | I5 | 20 | I5 |
| 4 | 2T-I0 | 20 | I5 | 20 | I5 | 20 | I5 | 20 | I5 |
| 5 | 2T-I0 | I5 | I3 | I5 | I3 | I5 | I3 | 20 | I5 |
| 6 | 3T-I8 | I8 | I2 | 29 | I6 | 23 | I4 | I4 | I4 |
| 7 | 3T-I8 | 2 | 7 | 2 | 7 | 2 | 7 | 2 | 7 |
| 8 | 3T-24 | 0 | 0 | 0 | 0 | I0 | I2 | 9 | II |
| 9 | 3T-I5 | 26 | I4 | 26 | I4 | 26 | I4 | 2I | I2 |
| I0 | 3T-I6 | I4 | I0 | | | | | | |
| II | 3T-I6 | 2I | I3 | | | | | | |
| I2 | 3T-I6 | I8 | I2 | | | | | | |
| I3 | 3T-I6 | 22 | I3 | | | | | | |
| I4 | 3T-I5 | I4 | I0 | | | | | | |
| I5 | 3T-I5 | I5 | I0 | | | | | | |

Пусть это будет цикл $K\,[u_1, u_6, u_3]$. Сдвинем поток на нем на $\Delta P=$II так, что величина потока на $u_3$ уменьшится. Получим новый поток $p_1(u)$ :

$$p_1(u)=\begin{cases} p(u), & u\bar{\in} K,\\ p_0(u_1)-\Delta P, & u=u_3,\\ p_0(u_4)+\Delta P & \text{для } u=u_1, u_6\end{cases}$$

и для него $T_1(u_3)=17$; $T_1(u_1)=17$; $T_1(u_6)=16$. Выделяем дуги с максимальными значениями $T_1(u)$ и повторяем описанную процедуру. Результаты последовательных вычислений приведены в табл.2. Из теоремы 2 видно, что $p_3(u)$ есть оптимальный поток, обеспечивающий перевозку груза $P=$ II6 за время $T=$ I5, что совпадает с ранее полученным решением. Зная $p(u)$, нетрудно построить оптимальный план перевозок.

Поступила в редакцию 20.2.1968 г.

Литература

I. К. Шеннон, П. Элиас, А. Файнстейн. О максимальном потоке через сеть. В сб. "К.Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике", М., ИЛ, I963.

2. Л. Форд, Д. Фалкерсон. Потоки на сетях. М., Изд. "Мир" I966.

3. В. А.Евстигнеев. Транспортная задача по времени I.Дискрет-

ный анализ, вып. 13, Новосибирск. Изд. "Наука", Сибирское отделение, 1968.

4. V.V. Mennon, The minimal cost flow problem with convex costs, "Naval Research Logistics, Quarterly", v. 12, N 2, 1965, pp 163-172.

5. Хоанг Туй. Графы и транспортные задачи. Сиб. мат.журнал, 1963, т.IУ, № 2.

6. М.Л. Цетлин. О некоторых свойствах конечных графов в связи с задачей о перевозках. ДАН СССР, 1959, т. 129, № 4.