Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1968 г. выпуск I.
УДК.519.95.

АЛГОРИТМ СОСТАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ ДЛЯ ДВУХ РАБОТ

Н.И.Глебов

В статье автора [I] рассматривалась задача составления оптимального расписания для выполнения двух работ в следующей постановке. Работа I состоит из m операций $p_i\ (i=1,2,\dots,m)$, а работа 2 - из n операций $q_j\ (j=1,2,\dots,n)$. Выполнение операции $p_i\ (q_j)$ может быть начато лишь после завершения операции $p_{i-1}\ (q_{j-1})$. Продолжительности операций p_i и q_j известны и равны a_i и b_j , соответственно. Задано множество запретов $G\ (G\subset M\times N)$, где $M=\{1,2,\dots,m\}$, $N=\{1,2,\dots,n\}$. Если $(i,j)\in G$, то операции p_i и q_j не могут выполняться одновременно. Требуется составить расписание для выполнения данных работ за минимальное время. Расписание с таким свойством называется оптимальным, а затрачиваемое при этом время на выполнение работ - длиной оптимального расписания.

В статье [I] была получена верхняя оценка длины оптимального расписания. В несколько иной формулировке подобная задача рассматривалась в работе [2] , где составление оптимального расписания сводилось к отысканию кратчайшего пути между дьумя полюсами некоторой конечной сети. В настоящей заметке предлагается более эффективный алгоритм решения поставленной задачи.

Приведем необходимые для дальнейшего изложения некоторые определения и результаты из [I] .

Введем дополнительные операции p_{m+1} и q_{n+1} с продолжительностями $a_{m+1}=b_{n+1}=\infty$ и рассмотрим положительный квадрант плоскости xy , точками которого будем характеризовать состояния системы /степень завершенности данных работ/. Для этого состояние системы, при котором операции $p_1,p_2,\dots,p_{i-1}$ и $q_1,q_2,\dots,q_{j-1}$ выполнены, а операции p_i и q_j выполнялись в течение $a_i'\ (0\le a_i'<a_i)$ и $b_j'\ (0\le b_j'<b_j)$ единиц времени соответственно, изображается точкой (x,y) , где $x=\sum_{k=1}^{i-1}a_k+a_i'$ и $y=\sum_{s=1}^{j-1}b_s+b_j'$.

Ниже рассматриваются два варианта задачи.

1/ Всякая операция, будучи начатой, не может прерываться до полного завершения.

2/ Процесс выполнения любой операции может быть прерван произвольное число раз.

В первом случае некоторые состояния системы оказываются недопустимыми, поскольку в них система не сможет находиться ни при каком порядке выполнения работ, удовлетворяющем наложенным ограничением. Если положить $A_0=0,\ A_i=\sum_{k=1}^{i}a_k\ (i=1,2,\dots,m)$ и $B_0=0,\ B_j=\sum_{s=1}^{j}b_s\ (j=1,2,\dots,n)$, то внутренние точки прямоугольников $[A_{i-1}, A_i; B_{j-1}, B_j],\ (i,j)\in G$: и только они, соответствуют недопустимым состояниям /эти точки также называются недопустимыми/. Во втором случае эти точки мы будем называть особыми, поскольку соответствующие им состояния системы допустимы, но одновременное выполнение обеих работ при этом невозможно. Всякому способу выполнения работ, допустимому относительно рассматриваемых ограничений, в плоскости xy соответствует некоторая траектория, исходящая из начала координат /такая траектория называется допустимой/.

В первом случае допустимая траектория не проходит через недопустимые точки и представляет собой связную ломаную линию, состоящую из горизонтальных и вертикальных звеньев и звеньев, составляющих с осями координат углы, равные 45^o. Причем каждое горизонтальное звено лежит на некоторой прямой вида $y = B_j$, а каждое вертикальное звено – на прямой вида $x = A_i$. Во втором случае допустимая траектория также представляет собой связную ломаную линию, состоящую из горизонтальных, вертикальных и наклоненых под углом 45^o звеньев. Дополнительное ограничение в этом случае состоит в том, что наклонные звенья не должны содержать особых точек. В обоих случаях при движении по допустимой траектории от её начала ни одна из координат не может убывать.

"Длина" горизонтального /вертикального/ звена траектории считается равной его обычной длине, а под "длиной" наклонного звена понимается длина его проекции на ось координат. Общая "длина" траектории равняется сумме "длин" всех её звеньев. В таком случае задача составления оптимального расписания сводится к нахождению допустимой траектории, оканчивающейся в точке (A_m, B_n) и имеющей минимальную "длину".

Траектория, оканчивающаяся в точке (x,y), называется (x,y) – траекторией. Точка (x,y) называется t – достижимой, если существует допустимая (x,y) – траектория, "длина" которой не превосходит t. Через E_t обозначается множество всех t – достижимых точек. Точка (x,y) называется t – квазидостижимой, если существует t – достижимая точка (x',y') такая, что $x \leq x'$, $y \leq y'$. Множество всех t -квазидостижимых точек обозначается через H_t.

Для первого варианта рассматриваемой задачи в [I] была установлена

ЛЕММА I. Если $(A_i, B_j) \in H_t$, то $(A_i, B_j) \in E_t$. Из этого факта, в частности, следует, что для второго варианта задачи $H_t = E_t$. Таким образом, в обоих случаях задача определения "длины" оптимального расписания сводится к нахождению минимального значения t_0, для которого $(A_m, B_n) \in H_{t_0}$.

Перейдем теперь непосредственно к вопросу о построении алгоритма составления оптимального расписания. С этой целью введем в рассмотрение плоскость переменных u, v и установим соответствие

$$\varphi : (x,y) \to (u,v),$$

где $u = x - t$, $v = y - t$, $t = min\{\tau : (x,y) \in H_\tau\}$. Заметим, что если $\varphi(x,y) = (u,v)$, то $x - y = u - v$.

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений. Если (c_i, d_i), $i=1,2,\dots,s$, $(s\geq 2)$, - некоторые точки плоскости xy или uy, то посредством $\langle (c_1,d_1), (c_2,d_2),\dots,(c_s,d_s)\rangle$ будем обозначать ломаную линию, звеньями которой являются отрезки с концами в точках (c_i,d_i) и (c_{i+1},d_{i+1}), $i=1,2,\dots,s-1$.

$$L'_{ij}=\langle (A_{i-1},B_j),(A_{i-1},B_{j-1}),(A_i,B_{j-1})\rangle,$$
$$L''_{ij}=\langle (A_{i-1},B_j),(A_i,B_j),(A_i,B_{j-1})\rangle,$$
$$(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n).$$

Рассмотрим сначала первый вариант задачи и укажем для этого случая некоторые свойства отображения φ .

1/ Если точки отрезка $\langle (x,y),(x+\tau,y+\tau)\rangle$ являются допустимыми, то $\varphi(x+\tau,y+\tau)=\varphi(x,y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(x,y)=(x-t,y-t)$, $\varphi(x+\tau,y+\tau)=(x+\tau-t',y+\tau-t')$, $\tau\geq 0$, $t=\min\{\tau':(x,y)\in H_{\tau'}\}$, $t'=\min\{\tau':(x+\tau,y+\tau)\in H_{\tau'}\}$. Требуется показать, что $t'=t+\tau$.

Поскольку $(x+\tau,y+\tau)\in H_{t'}$, то $(x,y)\in H_{t'-\tau}$ и $t\leq t'-\tau$. С другой стороны, из $(x,y)\in H_t$ следует, что для некоторой точки (x',y'), $x'\geq x$, $y'\geq y$, существует допустимая (x',y') - траектория ξ , "длина" которой равна t . Очевидно, либо $x'=x$, либо $y'=y$. Пусть имеет место второй случай /при $x'=x$ рассуждения носят аналогичный характер/. Предположим, что существует номер i , для которого $x<A_i<x'$. Тогда на траектории ξ найдется точка вида $(A_i,\bar y)$, $\bar y\leq y$. Нетрудно видеть, что $(A_i,\bar y)\in E_{\bar t}$ при $\bar t=t-y+\bar y$ и $(A_i,y+\tau)\in E_{t''}$ при $t''=\bar t+y+\tau-\bar y=t+\tau$. Кроме того, если $A_i\leq y+\tau$, то $(x+\tau,y+\tau)\in E_{t''}$. Следовательно, $(x+\tau,y+\tau)\in H_{t''}$ и $t'\leq t''=t+\tau$. Если номера i с указанным свойством не существует, то при некотором i будем иметь $A_{i-1}\leq x$, $x'\leq A_i$. В этом случае отрезок $\langle (x',y),(A_i,y+A_i-x')\rangle$ не содержит недопустимых точек, и в зависимости от расположения рассматриваемых точек имеем:

а/ если $x+\tau\geq A_i$, то $(x+\tau,y+\tau)\in E_{t+\tau}$;

в/ если $x+\tau<A_i$ и $\tau\geq A_i-x'$, то $(A_i,y+\tau)\in E_{t+\tau}$;

с/ если $\tau<A_i-x'$, то $(x'+\tau,y+\tau)\in H_{t+\tau}$.

Таким образом, в любом случае $(x+\tau,y+\tau)\in H_{t+\tau}$ и $t'\leq t+\tau$. Утверждение доказано.

2/ Пусть $(i,j)\in G$, $\varphi(A_{i-1},B_j)=(u_1,v_1)$, $\varphi(A_i,B_{j-1})=(u_2,v_2)$ и $(x,y)\in L''_{ij}$. Тогда $\varphi(x,y)=(u,v)$, где $u=x-t$, $v=y-t$
$t=\min(x-u_1,\ y-v_2)$.

В самом деле, если при некотором t $(A_{i-1},B_j)\in H_t$, то по лемме 1 $(A_{i-1},B_j)\in E_t$, откуда при $x\geq A_{i-1}$ и $t'=t+x-A_{i-1}$ имеем $(x,B_j)\in E_{t'}$. Наконец, учитывая неравенство $y\leq B_j$, получаем $(x,y)\in H_{t'}$. Аналогичным образом из $(A_i,B_{j-1})\in H_t$ следует $(x,y)\in H_{t''}$, где $t''=t+y-B_{j-1}$.

С другой стороны, если $(x,y)\in H_t$, то для некоторой точки (x',y'), $x'\geq x$, $y'\geq y$, существует допустимая (x',y') - траектория, "длина" которой не превосходит t . На этой траектории имеется точка вида $(A_{i-1},\bar y)$, $\bar y\geq B_j$, либо $(\bar x,B_{j-1})$, $\bar x\geq A_i$. Тогда в первом случае имеем $(A_{i-1},\bar{y})\in E_{t'}$, $t'=t-x+A_{i-1}$, а во втором случае - $(\bar{x},B_{j-1})\in E_{t''}$, $t''=t-y+B_{j-1}$. Следовательно, если $(x,y)\in H_t$, то либо $(A_{i-1},B_j)\in H_{t'}$, либо $(A_i,B_{j-1})\in H_{t''}$.

Таким образом, если $t_1=min\{\tau:(A_{i-1},B_j)\in H_\tau\}$, $t_2=min\{\tau:(A_i,B_{j-1})\in H_\tau\}$ и $t=min\{\tau:(x,y)\in H_\tau\}$, то в силу приведенных выше рассуждений, имеем $t\leq t_1+x-A_{i-1}$, $t\leq t_2+y-B_{j-1}$ и либо $t_1\leq t-x+A_{i-1}$, либо $t_2\leq t-y+B_{j-1}$, откуда $t=min(x-A_{i-1}+t_1,\ y-B_{j-1}+t_2)=min(x-u_1,\ y-v_2)$.

При $x-y\leq u_1-v_2$ имеем $u=u_1$, $v=y-x+u_1$, в противном случае $u=x-y+v_2$, $v=v_2$. Следовательно, образом ломаной L''_{ij} при отображении φ служит $\langle(u_1,v_1),(u_1,v_2),(u_2,v_2)\rangle$.

Отметим теперь соответствующие свойства отображения φ для второго варианта задачи.

1/ Если отрезок $\langle(x,y),(x+\tau,\ y+\tau)\rangle$ не содержит особых точек, то $\varphi(x+\tau,\ y+\tau)=\varphi(x,y)$.

2/ Пусть $(i,j)\in G$, $\varphi(A_{i-1},y)=(u',v')$, $\varphi(x,B_{j-1})=(u'',v'')$ и $\varphi(L'_{ij})=\langle(u_1,v_1),(u_1,v_2),(u_2,v_2),\dots,(u_{\mu-1},v_\mu),(u_\mu,v_\mu)\rangle$,

где $u_1\leq u_2\leq\dots\leq u_\mu$, $v_1\geq v_2\geq\dots\geq v_\mu$, $\varphi(A_{i-1},B_j)=(u_1,v_1)$, $\varphi(A_i,B_{j-1})=(u_\mu,v_\mu)$. Тогда, как и в первом варианте, нетрудно показать, что для $(x,y)\in L''_{ij}$ имеем $\varphi(x,y)=(u,v)$, где $u=x-t$, $v=y-t$, $t=min(x-u',\ y-v'')$.

Чтобы выяснить, что представляет собой $\varphi(L''_{ij})$, рассмотрим несколько случаев, отметив предварительно справедливость следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned}&v_1-u_1=B_j-A_{i-1},\ v_\mu-u_\mu=B_{j-1}-A_i,\\&v'-u'=y-A_{i-1},\ v''-u''=B_{j-1}-x,\\&v'\leq v_1,\ \ u''\leq u_\mu.\end{aligned}\right\}\qquad /1/$$

A/ $v_\mu-u_1=B_j-A_i$.

a/ $A_{i-1}\leq x\leq A_i,\ y=B_j$. В этом случае в силу соотношений /1/ имеем $x-u_1=x-v_\mu+B_j-A_i=x-u_\mu+B_j-B_{j-1}\leq x-u''+B_j-B_{j-1}=B_j-v''$.

Следовательно, $u=x-min(x-u_1,\ B_j-v'')=u_1$, $v=B_j-min(x-u_1,\ B_j-v'')=B_j+u_1-x$.

в/ $x=A_i,\ B_{j-1}\leq y\leq B_j$. В данном случае $A_i-u'=A_i+y-v'-A_{i-1}\geq A_i+y-v_1-A_{i-1}=A_i+y-u_1-B_j=y-v_\mu$, т.е. $u=A_i-min(A_i-u',\ y-v_\mu)=A_i+v_\mu-y$, $v=y-min(A_i-u',y-v_\mu)=v_\mu$. Окончательно имеем $\varphi(L''_{ij})=\langle(u_1,v_1),(u_1,v_\mu),(u_\mu,v_\mu)\rangle$.

B/ $v_\mu-u_1>B_j-A_i$.

a/ $A_{i-1}\leq x\leq A_i,\ y=B_j$. Если $u''\leq B_j-B_{j-1}+u_1$, то $x-u_1=u''+B_{j-1}-u_1-v''\leq B_j-v''$ и $u=u_1$, $v=B_j+u_1-x$. Если $u''>B_j-B_{j-1}+u_1$, то $x-u_1>B_j-v''$ и $u=x-B_j+v''=u''-B_j+B_{j-1}=u''-b_j$, $v=v''$.

в/ $x=A_i,\ B_{j-1}\leq y\leq B_j$. Как и в случае A,в / имеем $A_i-u'>y-v_\mu$, т.е. $u=A_i+v_\mu-y$, $v=v_\mu$.

Таким образом, если α, $1<\alpha\leq\mu$, такое, что $u_{\alpha-1}-u_1\leq b_j<u_\alpha-u_1$, то $\varphi(L''_{ij})=\langle(u'_1,v'_1),(u'_1,v'_2),(u'_2,v'_2),\dots,(u'_{\lambda-1},v'_\lambda),(u'_\lambda,v'_\lambda)\rangle$,

где $u'_1=u_1$, $u'_2=u_\alpha-b_j$, $u'_3=u_{\alpha+1}-b_j,\dots,u'_{\lambda-1}=u_{\mu-1}-b_j$,
$u'_\lambda=u_\mu$; $v'_1=v_1$, $v'_2=v_\alpha$, $v'_3=v_{\alpha+1},\dots,v'_\lambda=v_\mu$, $(\lambda=\mu-\alpha+2)$.

C/ $v_\mu-u_1<B_j-A_i$.

a/ $A_{i-1}\leq x\leq A_i,\ y=B_j$. В этом случае $x-u_1<x-v_\mu+B_j-A_i=x-u_\mu+B_j-B_{j-1}\leq x-u''+B_j-B_{j-1}=B_j-v''$, так что $u=u_1$, $v=B_j+u_1-x$.

b/ $x=A_i,\ B_{j-1}\le y\le B_j$.

Если $v'\ge A_i-A_{i-1}+v_\mu$, то $A_i-u'=A_i+y-v'-A_{i-1}<y-v_\mu$ и $u=u'$; $v=y+u'-A_i=v'-A_i+A_{i-1}=v'-a_i$.

Если $v'\le A_i-A_{i-1}+v_\mu$, то $A_i-u'\ge y-v_\mu$ и $u=A_i+v_\mu-y$, $v=v_\mu$.

Следовательно, если α, $k\le\alpha<\mu$ такое, что $v_\alpha-v_\mu>a_i\ge v_{\alpha+1}-v_\mu$, то $\varphi(L''_{ij})=\langle(u'_1,v'_1),(u'_1,v'_2),(u'_2,v'_2),\dots,(u'_{\lambda-1},v'_\lambda),(u'_\lambda,v'_\lambda)\rangle$, где $u'_1=u_1$, $u'_2=u_2,\dots,$ $u'_{\lambda-1}=u_\alpha$, $u'_\lambda=u_\mu$; $v'_1=v_1$, $v'_2=v_2-a_i,\dots,v'_{\lambda-1}=v_\alpha-a_i$, $v'_\lambda=v_\mu$, ($\lambda=\alpha+1$).

Из отмеченных свойств отображения φ следует, что для нахождения $\varphi(x,y)$ при $(x,y)\in L''_{ij}$ в обоих вариантах рассматриваемой задачи достаточно иметь значения φ в точках ломаной L'_{ij}. Причем если $\varphi(L'_{ij})$ представляет собой ломаную линию вида $\langle(u_1,v_1),(u_1,v_2),(u_2,v_2),\dots,(u_{\mu-1},v_\mu),(u_\mu,v_\mu)\rangle$, $u_1\le u_2\le\dots\le u_\mu$, $v_1\ge v_2\ge\dots\ge v_\mu$, то и $\varphi(L''_{ij})$ является ломаной линией того же вида. Это обстоятельство позволяет предложить эффективный способ нахождения значений $\varphi(x,y)$ и построения в конечном счете оптимального расписания.

В процессе выполнения описываемого ниже алгоритма для $\nu=0,1,2,\dots,k$, / к - число элементов множества G / будут строиться:

a/ упорядоченное множество $P_\nu=\{(u_\alpha,v_\alpha):\alpha=0,1,2,\dots,s_\nu\}$, $u_\alpha<u_{\alpha+1}$, $v_\alpha>v_{\alpha+1}$; $\alpha=0,1,\dots,s_\nu-1$; $(u_0,v_0)=(-\infty,0)$, $(u_{s_\nu},v_{s_\nu})=(0,-\infty)$.

в/ множество $Q_\nu=\bigcup_{\beta=0}^{\nu} P_\beta\setminus\{(-\infty,0),(0,-\infty)\}$.

c/ множество $R_\nu\subset Q_\nu\times Q_\nu$.

d/ отображение $\psi(u,v)=(x,y)$, $(u,v)\in Q_\nu$.

Перейдем непосредственно к описанию алгоритма для первого варианта задачи.

1/ Перенумеруем элементы множества G в алфавитном порядке $\{(i_1,j_1),(i_2,j_2),\dots,(i_k,j_k)\}$, так что при $\beta<\gamma$ либо $i_\beta<i_\gamma$, либо $i_\beta=i_\gamma$, $j_\beta<j_\gamma$.

2/ При $\nu=0$ полагаем $P_0=\{(-\infty,0),(0,0),(0,-\infty)\}$, $Q_0=\{(0,0)\}$, $R_0=\Phi$ и $\psi(0,0)=(0,0)$.

3/ Увеличиваем значение ν на единицу.

4/ Полагаем $i=i_\nu$, $j=j_\nu$ и находим α и μ такие, что $v_\alpha-u_\alpha\ge B_j-A_{i-1}>v_{\alpha+1}-u_{\alpha+1}$, $v_\mu-u_\mu>B_{j-1}-A_i\ge v_{\mu+1}-u_{\mu+1}$, $(u_\alpha,v_\alpha),(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1}),(u_\mu,v_\mu),(u_{\mu+1},v_{\mu+1})\in P_{\nu-1}$.

Пусть $t'=\min(A_{i-1}-u_\alpha,\ B_j-v_{\alpha+1})$, $t''=\min(A_i-u_\mu,\ B_{j-1}-v_{\mu+1})$, $u'=A_{i-1}-t'$, $v'=B_j-t'$, $u''=A_i-t''$, $v''=B_{j-1}-t''$. Посредством Z_ν обозначим подмножество множества $\{(u',v'),(u'',v'')\}$, такое, что $(u',v')\in Z_\nu$, если $v_{\alpha+1}-u_\alpha>B_j-A_{i-1}$ и $(u',v')\notin Z_\nu$ в противном случае; аналогично, $(u'',v'')\in Z_\nu$, если $v_{\mu+1}-u_\mu<B_{j-1}-A_i$, и $(u'',v'')\notin Z_\nu$ в противном случае. Кроме того, пусть

$$W_\nu=\{[(u',v'),(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1})],[(u'',v''),(u_\mu,v_\mu)]\}\cap(Z_\nu\times Q_{\nu-1}).$$

Если $\mu=\alpha$, то $P_\nu=P_{\nu-1}$, $Q_\nu=Q_{\nu-1}$, $R_\nu=R_{\nu-1}$. При $\mu>\alpha$ полагаем $Q_\nu=Q_{\nu-1}\cup Z_\nu$, $R_\nu=R_{\nu-1}\cup W_\nu$, и P_ν получаем, упорядочивая должным образом объединение множеств $P_{\nu-1}\setminus\{(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1}),\dots,(u_\mu,v_\mu)\}$ и Z_ν. Отображение ψ доопределяем на Z_ν, считая $\psi(u',v')=(A_{i-1},B_j)$, $\psi(u'',v'')=(A_i,B_{j-1})$.

5/ Если $\nu<k$, то возвращаемся к шагу 3/; Если $\nu=k$, то процедура заканчивается.

В результате будут построены множества P_k, Q_k, R_k и отображение ψ, обладающие следующими свойствами.

Если $P_k=\{(u_\alpha,v_\alpha):\ \alpha=0,1,\dots,s_k\}$, то ломаная
$$W=\bigcup_{\alpha=0}^{s-1}\langle(u_\alpha,v_\alpha),(u_\alpha,v_{\alpha+1}),(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1})\rangle$$
служит образом ломаной $L=\langle(0,\infty),(0,B_n),(A_m,B_n),(A_m,0),(\infty,0)\rangle$ при отображении φ. Это нетрудно установить индукцией по ν, опираясь на отмеченные ранее свойства отображения φ. Следовательно, образом точки (A_m,B_n) при отображении φ служит точка пересечения ломаной W с прямой $v-u=B_n-A_m$.

Если (u,v) - элемент множества Q_k, отличный от $(0,0)$, то существует единственный элемент $(u',v')\in Q_k$, такой, что $[(u,v),(u',v')]\in R_k$; причем, $\min(u'-u;\ v'-v)=0$, поскольку либо $u=u'$, $v<v'$, либо $u<u'$, $v=v'$.

Если $(u,v)\in Q_k$ и $\psi(u,v)=(x,y)$, то $u-v=x-y$.

Пусть $[(u,v),(u',v')]\in R_k$, $\psi(u,v)=(x,y)$, $\psi(u',v')=(x',y')$; тогда $x'\le x$, $y'\le y$. Обозначим посредством $\langle\psi(u,v)-\psi(u',v')\rangle$ ломаную линию $\langle(x,y),(\bar{x},\bar{y}),(x',y')\rangle$, где $\bar{x}=x'+\min(x-x',y-y')$, $\bar{y}=y'+\min(x-x',y-y')$.
Очевидно, отрезок $\langle(x,y),(\bar{x},\bar{y})\rangle$ лежит на некоторой прямой вида $x=A_i$, либо $y=B_j$. В то же время отрезок $\langle(\bar{x},\bar{y}),(x',y')\rangle$ не содержит недопустимых точек, что может быть легко доказано от противного. Следовательно, если к любой допустимой (x',y') - траектории присоединить ломаную $\langle\psi(u,v)-\psi(u',v')\rangle$, то получим допустимую (x,y) - траекторию. Кроме того, "длина" этой ломаной равна $\max(x-x';\ y-y')=\max(x-x',\ x-x'+u'-u-v'+v)=x-x'+u'-u-\min(u'-u,\ v'-v)=x-x'+u'-u$.

Чтобы завершить построение оптимального расписания, определим μ, такое, что $v_\mu-u_\mu\ge B_n-A_m>v_{\mu+1}-u_{\mu+1}$, $(u_\mu,v_\mu),(u_{\mu+1},v_{\mu+1})\in P_k$.
Тогда $\varphi(A_m,B_n)=(u^{(0)},v^{(0)})$, где $u^{(0)}=A_m-t_0$, $v^{(0)}=B_n-t_0$,
$t_0=\min(A_m-u_\mu,B_n-v_\mu)$ - длина оптимального расписания. Положим
$\psi(u^{(0)},v^{(0)})=(A_m,B_n)$.

Возможны два случая

а/ $A_m-u_\mu\le B_n-v_{\mu+1}$; тогда $u^{(0)}=u_\mu$, $v^{(0)}<v_\mu$.

в/ $A_m-u_\mu>B_n-v_{\mu+1}$; в этом случае $u^{(0)}<u_{\mu+1}$, $v^{(0)}=v_{\mu+1}$.

Далее однозначным образом строится последовательность $(u^{(0)},v^{(0)})$, $(u^{(1)},v^{(1)}),\dots,(u^{(s)},v^{(s)})$, такая, что $[(u^{(\alpha)},v^{(\alpha)}),(u^{(\alpha+1)},v^{(\alpha+1)})]\in R_k$, $\alpha=1,2,\dots,s-1$; $(u^{(s)},v^{(s)})=(0,0)$, $(u^{(1)},v^{(1)})=(u_\mu,v_\mu)$ в случае а/, и $(u^{(1)},v^{(1)})=(u_{\mu+1},v_{\mu+1})$ в случае b/.

Пусть $\psi(u^{(\alpha)},v^{(\alpha)})=(x^{(\alpha)},y^{(\alpha)})$, $0\le\alpha\le s$; здесь $(x^{(0)},y^{(0)})=(A_m,B_n)$, $(x^{(s)},y^{(s)})=(0,0)$. Нетрудно видеть, что ломаная
$$L=\bigcup_{\alpha=0}^{s-1}\langle\psi(u^{(\alpha)},v^{(\alpha)})-\psi(u^{(\alpha+1)},v^{(\alpha+1)})\rangle$$
является допустимой (A_m,B_n) - траекторией, а её "длина" равна
$$\sum_{\alpha=0}^{s-1}(x^{(\alpha)}-x^{(\alpha+1)}+u^{(\alpha+1)}-u^{(\alpha)})=x^{(0)}-x^{(s)}+u^{(s)}-u^{(0)}=A_m-u^{(0)}=t_0.$$
Таким образом, L есть искомая оптимальная траектория.

Для второго варианта задачи алгоритм остается тем же самым, за исключением шага 4/, который в этом случае может быть сформулирован следующим образом.

4'/ Полагаем $i=i_\nu, j=j_\nu$ и находим α и μ, такие, что $v_\alpha-u_\alpha\geq B_j-A_{i-1}>v_{\alpha+1}-u_{\alpha+1}$ и $v_\mu-u_\mu>B_{j-1}-A_i\geq v_{\mu+1}-u_{\mu+1}$, $(u_\alpha,v_\alpha),(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1}),(u_\mu,v_\mu),(u_{\mu+1},v_{\mu+1})\in P_{\nu-1}$.

Пусть $t'=\min(A_{i-1}-u_\alpha, B_j-v_{\alpha+1})$, $t''=\min(A_i-u_\mu, B_{j-1}-v_{\mu+1})$,
$u'=A_{i-1}-t'$, $v'=B_j-t'$, $u''=A_i-t''$, $v''=B_{j-1}-t''$. Множество Z_ν определяется так же, как в 4/.

Возможны три случая.

А/ $v''-u'=B_j-A_i$.

В этом случае P_ν, Q_ν, R_ν и ψ определяются, как и в первом варианте.

Б/ $v''-u'>B_j-A_i$.

Определяем $\lambda, \alpha<\lambda\leq\mu$, такое, что $u_{\lambda-1}-u'\leq b_j<u_\lambda-u'$, $(u_{\lambda-1},v_{\lambda-1}),(u_\lambda,v_\lambda)\in P_{\nu-1}$ и полагаем $Z_\nu^*=\{(u_\beta-b_j,v_\beta):\beta=\lambda,\lambda+1,\ldots,\mu\}$. Если $\lambda=\alpha$, то $Z'_\nu=Z_\nu\cup Z_\nu^*\setminus(u',v')$, в противном случае $Z'_\nu=Z_\nu\cup Z_\nu^*$. Пусть
$W_\nu^*=\{[(u',v'),(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1})],[(u_{\alpha+1}-b_j,v_{\alpha+1}),(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1})],\ldots,[(u_\mu-b_j,v_\mu),(u_\mu,v_\mu)],$
$[(u'',v''),(u_\mu,v_\mu)]\}$ и $W'_\nu=W_\nu^*\cap(Z'_\nu\times Q_{\nu-1})$.

Если $\mu=\alpha+1$, то $P_\nu=P_{\nu-1}$, $Q_\nu=Q_{\nu-1}$, $R_\nu=R_{\nu-1}$. При $\mu>\alpha+1$ полагаем $Q_\nu=Q_{\nu-1}\cup Z'_\nu$, $R_\nu=R_{\nu-1}\cup W'_\nu$ и P_ν получаем, упорядочивая должным образом объединение множеств $P_{\nu-1}\setminus\{(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1}),\ldots,(u_\mu,v_\mu)\}$ и Z'_ν. Отображение ψ доопределяем на Z'_ν, считая $\psi(u',v')=(A_{i-1},B_j)$, $\psi(u'',v'')=(A_i,B_{j-1})$ и $\psi(u_\beta-b_j,v_\beta)=(x_\beta,B_j)$, где $x_\beta=u_\beta-v_\beta+B_{j-1}$, $\beta=\lambda,\lambda+1,\ldots,\mu$.

С/ $v''-u'<B_j-A_i$.

Определяем $\lambda, \alpha<\lambda\leq\mu$, такое, что $v_\lambda-v''>a_i\geq v_{\lambda+1}-v''$ и полагаем $Z_\nu^*=\{(u_\beta,v_\beta-a_i):\beta=\alpha+1,\ldots,\lambda\}$. Если $\lambda=\mu$, то $Z'_\nu=Z_\nu\cup Z_\nu^*\setminus(u'',v'')$, в противном случае $Z'_\nu=Z_\nu\cup Z_\nu^*$. Пусть $W_\nu^*=\{[(u',v'),(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1})],[(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1}-a_i),(u_{\alpha+1},v_{\alpha+1})],\ldots,[(u_\mu,v_\mu-a_i),(u_\mu,v_\mu)],[(u'',v''),(u_\mu,v_\mu)]\}$.

Теперь множества P_ν, Q_ν и R_ν определяются, как и в случае Б/. Отображение ψ доопределяем на Z'_ν, считая $\psi(u',v')=(A_{i-1},B_j)$, $\psi(u'',v'')=(A_i,B_{j-1})$ и $\psi(u_\beta,v_\beta-a_i)=(A_i,y_\beta)$, где $y_\beta=v_\beta-u_\beta+A_{i-1}$, $\beta=\alpha+1,\ldots,\lambda$.

Поступила в редакцию 20.10.1967г.

Литература

1. Н.И. Глебов. О верхней оценке длины оптимального расписания для двух работ. Сб. "Проблемы кибернетики" /в печати/.

2. William W. Hardgrave and George L. Nemhauser. A geometric model and a grafical algorithm for a seguencing problem. Operat. Res., 1963, II, N 6, 889-900