УДК 518:517.5

РАЗНОСТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА С ВЕСОМ

Е.С. Смаилов (Караганда)

При изучении разностных операторов, связанных с разностными краевыми задачами, необходимы различные априорные оценки. Обычно такие оценки получаются с помощью разностных теорем вложения [1 - 6] . Разностные теоремы вложения не столь развиты, как теория вложения пространств функций с непрерывным аргументом. Методика доказательства тех или иных разностных теорем вложения и их всевозможные приложения хорошо иллюстрированы в указанных выше работах.

В настоящей статье рассматривается пространство последовательностей $W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega)$, которое является сеточным аналогом пространства Соболева с весом. При достаточно общих условиях, наложенных на вес, получены необходимое и достаточное условия для вложения $W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega)$ в пространство последовательностей $\ell_q(\omega)$ (определения $W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega)$ и $\ell_q(\omega)$ см. § 1). Установлены двусторонние оценки нормы оператора вложения $E: W_{\theta,\alpha} \to \ell_q$ и его аппроксимативных чисел. В качестве иллюстрации полезности полученных результатов приведены критерии положительной определенности одного класса разностного оператора и ядерности, гильберта-шмидтовости операторов, обратных им. С помощью двусторонних оценок аппроксимативных чисел оператора вложения можно установить двусторонние оценки каждого из собственных чисел одного класса разностных операторов при довольно минимальных условиях на элементы соответствующих матриц. Обсуждаемые здесь вопросы для пространств функций с непрерывным аргументом хорошо исследованы [7] .

§ 1. Определения и вспомогательные предложения

1. Пусть $1 \leq \theta < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$. Через ω обозначим множество $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in \omega}$ - некоторая последовательность неотрицательных чисел. Будем говорить, что последовательность комплексных

чисел

$$y=\{y_K\}_{K\in\omega}\in W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega),$$

если

$$\|y\|_{W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega)}=\left\{\sum_{K=-\infty}^{+\infty}\left(\alpha_K|y_K|^{\theta}+|y_{K+1}-y_K|^{\theta}\right)\right\}^{\frac{1}{\theta}}<+\infty,$$

и $y\in\ell_q(\omega)$,

если

$$\|y\|_{\ell_q(\omega)}=\begin{cases}\left[\sum\limits_{K=-\infty}^{+\infty}|y_K|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}<+\infty & \text{при } 1\leq q<+\infty,\\[2ex] \sup\limits_{K\in\omega}|y_K|<+\infty & \text{при } q=+\infty.\end{cases}$$

Очевидно, что числа

$$\|y\|_{W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega)},\ \|y\|_{\ell_q(\omega)}$$

обладают свойствами нормы. Пусть $\Omega\subseteq\omega$, тогда через $W^{1}_{\theta,\alpha}(\Omega),\ \ell_q(\Omega)$ обозначим сужения вышеуказанных пространств на подмножество Ω . Пусть $\mathcal{L}_K$ - совокупность всех линейных операторов L размерности $\leq K$, которые действуют из $W^{1}_{\theta,\alpha}(\Omega)$ в $\ell_q(\Omega)$. Число

$$a_K(\Omega)=a_K\left(W^{1}_{\theta,\alpha}(\Omega),\ \ell_q(\Omega)\right)=\inf_{L\in\mathcal{L}_K}\|E-L\|_{W^{1}_{\theta,\alpha}(\Omega)\to\ell_q(\Omega)}$$

назовем K -аппроксимативным числом [8] оператора вложения

$$E:W^{1}_{\theta,\alpha}(\Omega)\longrightarrow\ell_q(\Omega),\quad K=1,2,3,\ldots$$

При $K=0$ положим

$$a_0(\Omega)=\|E\|_{W_{\theta,\alpha}(\Omega)\to\ell_q(\Omega)}.$$

Функцию распределения аппроксимативных чисел обозначим через

$$N_\Omega(\lambda)=N(\lambda, W'_{\theta,\alpha}(\Omega), \ell_q(\Omega))=\sum_{a_k(\Omega)>\lambda} 1 ,$$

где $\lambda>0$. Если $\Omega=\omega$, то просто будем писать a_k, $N(\lambda)$. Пусть $\theta+\theta'=\theta\cdot\theta'$. Положим:

$$K_\nu=\begin{cases} max\left[k:(2(k+1))^{-\frac{\theta}{\theta'}}\geqslant\sum_{i=\nu-k}^{\nu+k}\alpha_i\right], & \text{если } \alpha_\nu<2^{-\frac{\theta}{\theta'}}; \\ 0, & \text{если } \alpha_\nu\geqslant 2^{-\frac{\theta}{\theta'}}; \end{cases} \tag{I.I}$$

$$d_\nu=max\left\{(2(K_\nu+1))^{-\frac{\theta}{\theta'}}, \alpha_\nu\right\}; \tag{I.2}$$

$$A_\nu(\theta,q)=(2(K_\nu+1))^{\frac{1}{q}}\cdot d_\nu^{-\frac{1}{\theta}} ; \tag{I.3}$$

$$\Delta_\nu=\{\nu-K_\nu, \nu-K_\nu+1,\dots,\nu,\dots,\nu+K_\nu\} , \kappa\in\omega . \tag{I.4}$$

Если $K_\nu=0$, то Δ_ν состоит лишь из числа ν .

В дальнейшем формулировки теорем даются в терминах величины $A(\theta,q)=\sup\limits_{\nu\in\omega} A_\nu(\theta,q)$ и последовательности $\{A_\nu(\theta,q)\}_{\nu\in\omega}$. В неравенствах участвуют константы:

$$C_{\theta q}=(2(1+q))^{-\frac{1}{q}}\cdot(1+2^\theta)^{-\frac{1}{\theta}}; \qquad \gamma_{\theta q}=2^{-1-\frac{1}{\theta}}\cdot 3^{-\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{q}} ;$$

$$\mathcal{D}_{\theta q}=max\left\{2^{\frac{1}{q}}(1+2^\theta)^{\frac{1}{\theta}};\ 3^{\frac{1}{\theta}}A(\theta,q)\right\}.$$

Через $|M|$ обозначим количество элементов множества M .

2. Здесь мы приведем ряд лемм, на базе которых будут доказаны основные результаты работы.

Л е м м а I. Пусть $1\leqslant\theta<+\infty$, $1\leqslant q<+\infty$. Тогда

$$\left\{\sum_{i=\nu-K_\nu}^{\nu+K_\nu}|y_i|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant 2A_\nu(\theta,q)\left\{\sum_{i=\nu-K_\nu+1}^{\nu+K_\nu}(\alpha_i|y_i|^\theta+|y_{i+1}-y_i|^\theta)\right\}^{\frac{1}{\theta}}. \tag{I.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha_\nu<2^{-\theta/\theta'}$. Введем обозначения

$$b_\nu=\left\{\sum_{i=\nu-K_\nu-1}^{\nu+K_\nu}|y_{i+1}-y_i|^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Возможны два случая:

$$b_\nu > \frac{1}{2} A_\nu^{-1}(\theta,q) \left(\sum_{i\in\Delta_\nu} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} ; \tag{I.6}$$

$$b_\nu \leq \frac{1}{2} A_\nu^{-1}(\theta,q) \cdot \left(\sum_{i\in\Delta_\nu} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} . \tag{I.7}$$

Если верно (I.6), то мы сразу получим нужное нам неравенство (I.5). Рассмотрим случай (I.7). Пусть

$$|y_{\nu_0}| = \sup\{|y_i|,\ \nu-\kappa_\nu-1 \leq i \leq \nu+\kappa_\nu\}. \tag{I.8}$$

Тогда

$$|y_i - y_{\nu_0}| \leq \sum_{\kappa=\nu_0}^{i-1} |y_{\kappa+1} - y_\kappa| \quad \text{при} \quad i > \nu_0 ,$$

$$|y_i - y_{\nu_0}| \leq \sum_{\kappa=i}^{\nu_0-1} |y_{\kappa+1} - y_\kappa| \quad \text{при} \quad i < \nu_0 .$$

Если к этим суммам применить неравенство Гёльдера, то

$$|y_{\nu_0} - y_i| \leq (2(\kappa_\nu+1))^{\frac{1}{\theta'}} \cdot b_\nu , \quad \forall i \in [\nu-\kappa_\nu-1,\ \nu+\kappa_\nu].$$

Далее, на основании (I.7), (I.8) и определения чисел $A_\nu(\theta,q)$, при $\alpha_\nu < 2^{-\theta/\theta'}$ имеем

$$|y_{\nu_0} - y_i| < (2(\kappa_\nu+1))^{1/\theta'} \cdot \frac{1}{2} A_\nu^{-1}(\theta,q) \cdot \left\{ \sum_{i\in\Delta_\nu} |y_i|^q \right\}^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq (2(\kappa_\nu+1))^{\frac{1}{\theta'}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d_\nu^{1/\theta}}{(2(\kappa_\nu+1))^{1/q}} \cdot (2(\kappa_\nu+1))^{\frac{1}{q}} \cdot |y_{\nu_0}| = \frac{1}{2} |y_{\nu_0}| ,$$

$$\forall i \in [\nu-\kappa_\nu-1,\ \nu+\kappa_\nu].$$

Теперь можем утверждать, что

$$\frac{1}{2} |y_{\nu_0}| \leq |y_i| , \quad \forall i \in [\nu-\kappa_\nu-1,\ \nu+\kappa_\nu].$$

Тогда с помощью этих неравенств и (I.I), (I.2) при условии $\alpha_\nu < 2^{-\theta/\theta'}$ получим:

$$\sum_{i=\nu-\kappa_\nu-1}^{\nu+\kappa_\nu} \alpha_i |y_i|^\theta \geq \frac{1}{2^\theta}|y_{\nu_0}|\cdot \sum_{i=\nu-\kappa_\nu-1}^{\nu+\kappa_\nu} \alpha_i > \frac{1}{2^\theta}|y_{\nu_0}|^\theta \cdot d_\nu .$$

Поэтому

$$\left\{\sum_{i\in\Delta_\nu} |y_i|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leq |y_{\nu_0}|(2(\kappa_\nu+1))^{\frac{1}{q}} \leq 2A_\nu(\theta,q)\left\{\sum_{i=\nu-\kappa_\nu-1}^{\nu+\kappa_\nu} \alpha_i |y_i|^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} .$$

Пусть теперь $\alpha_\nu \geq 2^{-\theta/\theta'}$. Тогда, по определению, $\kappa_\nu=0$, $d_\nu=\alpha_\nu$ и

$$|y_\nu| \leq d_\nu^{-\frac{1}{\theta}}\left\{\sum_{i=\nu-1}^{\nu}\alpha_i|y_i|^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}} < 2^{\frac{1}{q}}\cdot d_\nu^{-\frac{1}{\theta}}\left\{\sum_{i=\nu-1}^{\nu}(\alpha_i|y_i|^\theta + |y_{i+1}-y_i|^\theta)\right\}^{\frac{1}{\theta}} .$$

Тем самым лемма полностью доказана.

Л е м м а 2. <u>Пусть</u> $1\leq\theta<+\infty$, $1\leq q<+\infty$. <u>Тогда для любого</u> $\nu\in\omega$ <u>существует последовательность чисел</u> $y^{(\nu)}=\{y_\kappa^{(\nu)}\}_{\kappa\in\omega}$, <u>носитель которой содержится в множестве</u> Δ_ν, <u>и</u>

$$C_{\theta q} A_\nu(\theta,q)\|y^{(\nu)}\|_{W^1_{\theta,\alpha}(\omega)} \leq \|y^{(\nu)}\|_{\ell_q(\omega)} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\alpha_\nu < 2^{-\theta/\theta'}$. Последовательность $y^{(\nu)}=\{y_\kappa^{(\nu)}\}_{\kappa\in\omega}$ выберем так:

$$y_\kappa^{(\nu)} = \begin{cases} \kappa-\nu+\kappa_\nu+1, & \kappa\in[\nu-\kappa_\nu,\nu]; \\ \nu+\kappa_\nu+1-\kappa, & \kappa\in[\nu+1,\ \nu+\kappa_\nu]; \\ 0 , & \forall\kappa\bar{\in}[\nu-\kappa_\nu,\ \nu+\kappa_\nu]. \end{cases}$$

Если же $\kappa_\nu=0$, то $y_\kappa^{(\nu)}=1$, $\kappa=\nu$ и $y_\kappa^{(\nu)}=0$, $\forall\kappa\neq\nu$.

Тогда

$$\left\{\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty}|y_\kappa^{(\nu)}|^q\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{\sum_{\kappa\in\Delta_\nu}|y_\kappa^{(\nu)}|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \geq (q+1)^{-\frac{1}{q}}(\kappa_\nu+1)^{1+\frac{1}{q}} ;$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\alpha_k|y_k^{(\nu)}|^\theta+|y_{k+1}^{(\nu)}-y_k^{(\nu)}|^\theta\right)=\sum_{k=\nu-k_\nu-1}^{\nu+k_\nu}\left(\alpha_k|y_k^{(\nu)}|^\theta+|y_{k+1}^{(\nu)}-y_k^{(\nu)}|^\theta\right)\leqslant$$

$$\leqslant (k_\nu+1)^\theta\cdot\sum_{k\in\Delta_\nu}\alpha_k+2(k_\nu+1)\leqslant(1+2^\theta)(k_\nu+1)^\theta\left(2(k_\nu+1)\right)^{-\theta/\theta'}=(1+2^\theta)d_\nu\cdot(k_\nu+1)^\theta.$$

Отсюда с учетом неравенства $\alpha_\nu<2^{-\theta/\theta'}$ и определения (I.3) получим

$$\|y^{(\nu)}\|^{-1}_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)}\cdot\|y^{(\nu)}\|_{\ell_q(\omega)}\geqslant C_{\theta q}\cdot A_\nu(\theta,q).$$

Теперь рассмотрим случай $\alpha_\nu\geqslant 2^{-\theta/\theta'}$. При этом, по определению, $d_\nu=\alpha_\nu$.

Последовательность $y^{(\nu)}=\{y_k^{(\nu)}\}_{k\in\omega}$ выберем так:

$$y_k^{(\nu)}=1,\quad k=\nu;\qquad y_k^{(\nu)}=0,\quad k\neq\nu.$$

Тогда

$$\|y^{(\nu)}\|_{\ell_q(\omega)}=1 \qquad \text{и} \quad \|y^{(\nu)}\|^\theta_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)}=(\alpha_\nu+2).$$

Поэтому

$$\frac{\|y^{(\nu)}\|_{\ell_q(\omega)}}{\|y^{(\nu)}\|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)}}=(\alpha_\nu+2)^{-\frac{1}{\theta}}\geqslant\left(d_\nu+2^{1+\theta/\theta'}\cdot d_\nu\right)^{-1/\theta}=2^{-1/q}(1+2^\theta)^{-\frac{1}{\theta}}\cdot\frac{2^{1/q}}{d_\nu^{1/\theta}}\geqslant C_{\theta q}A(\theta,q).$$

Тем самым лемма полностью доказана.

Л е м м а 3 . <u>Пусть $\{k_\nu\}_{\nu\in\omega}$ определена соотношением (I.I). Тогда $\forall m: |\nu-m|<\frac{k_\nu}{2}$ выполняется</u>

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{k_m}{k_\nu}<2. \tag{I.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . При $k_\nu=1$ утверждение леммы тривиально. Поэтому предположим, что $k_\nu>1$. Из условия леммы следует

$$\nu-k_\nu\leqslant m-\frac{k_\nu}{2}<m+\frac{k_\nu}{2}\leqslant\nu+k_\nu.$$

В силу этих неравенств, имеем

$$\left(2\left(\left[\frac{K_\nu}{2}\right]+1\right)\right)^{-\theta/\theta'} > (2(K_\nu+1))^{-\theta/\theta'} > \sum_{i=\nu-K_\nu}^{\nu+K_\nu} \alpha_i \geq \sum_{i=m-\left[\frac{K_\nu}{2}\right]}^{m+\left[\frac{K_\nu}{2}\right]} \alpha_i .$$

Отсюда и из определения (I.I) видно, что $K_m \geq \left[\frac{K_\nu}{2}\right]$. Тем самым $K_m \geq \frac{K_\nu}{2}$. Допустим, что правая часть неравенств (I.9) неверна, т.е. при всех $m: |\nu-m| < \frac{K_\nu}{2}$ имеют место неравенства $K_m > 2K_\nu$. Тогда для всех таких $m: |\nu-m| \leq \frac{K_\nu}{2}$ также будет справедливо и

$$|\nu - m| < \frac{K_m}{4} .$$

Если последнее неравенство переписать в виде $\nu - m + \frac{K_m}{4} > 0$, $\nu - m - \frac{K_m}{4} < 0$, то оно позволяет установить, что

$$m - K_m < \nu - \frac{3K_m}{4} < \nu + \frac{3K_m}{4} < m + K_m .$$

Поэтому

$$\left(2\left(\left[\frac{3}{4}K_m\right]+1\right)\right)^{-\theta/\theta'} \geq (2(K_m+1))^{-\theta/\theta'} \geq \sum_{i=m-K_m}^{m+K_m} \alpha_i \geq \sum_{i=\nu-\left[\frac{3}{4}K_m\right]}^{\nu+\left[\frac{3}{4}K_m\right]} \alpha_i .$$

Тогда согласно (I.I) имеем $\frac{3}{4}K_m \leq K_\nu$ для всех $m: |\nu-m| \leq \frac{K_\nu}{2}$. Это противоречит нашему допущению. Следовательно, оно неверно. Тем самым (I.9) доказано полностью.

Следствие. <u>Для любого</u> $\nu \in \omega$, <u>как только</u> $S: |\nu-S| \leq \frac{K_\nu}{2}$, <u>имеет место неравенство</u>

$$3^{-1/q-1/\theta'} \leq A_S(\theta,q) A_\nu^{-1}(\theta,q) \leq 3^{1/q+1/\theta'} .$$

Справедливость утверждения непосредственно следует из определения (I.3) и леммы 3. Только надо учесть, что в случае $0 \leq K_\nu \leq 1$ эти неравенства тривиальны. Поэтому $K_\nu \geq 2$ и

$$A_\nu(\theta,q) = (2(K_\nu+1))^{1/q+1/\theta'} .$$

С помощью определения чисел K_ν легко установить справедливость следующего утверждения:

Лемма 4. <u>Пусть</u> K_ν, Δ_ν <u>определены соотношениями</u> (I.I), (I.4). <u>Тогда существует последовательность чисел</u> $\{\nu_S\}_{S\in\omega}$ <u>такая, что</u>

$$\omega \subseteq \bigcup_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta_{\nu_s} \quad , \quad \Delta_{\nu_s} \cap \Delta_{\nu_{s'}} = \emptyset ,$$

как только $|s-s'| \geq 2$.

Л е м м а 5. Пусть $1 \leq \theta < q \leq +\infty$, $\theta \neq +\infty$ и $\{\nu_s\}_{s\in\omega}$ - последовательность, определенная леммой 4. Если

$$\sup_{\nu\in\omega} A_\nu(\theta, q) < +\infty ,$$

то $\forall \varepsilon > 0$:

$$N\big((1+\varepsilon)\lambda\big) \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} N_{\nu_j}(2^{-1/\theta}\cdot\lambda),$$

где $\lambda > 0$ и $N_{\nu_j}(\lambda) = N_{\Delta_{\nu_j}}(\lambda)$, $j\in\omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 4,

$$\omega = \bigcup_{s=-\infty}^{+\infty} \Delta_{\nu_s} \qquad \text{и} \quad \Delta_{\nu_s} \cap \Delta_{\nu_{s'}} = \emptyset ,$$

как только $|s-s'| \geq 2$, т.е. максимальная кратность покрытия элементов множества ω множествами Δ_{ν_s}, $s\in\omega$, есть 2. Положим

$$\tilde\Delta_{\nu_0} = \Delta_{\nu_0}, \quad \tilde\Delta_{\nu_k} = \Big(\omega \setminus \bigcup_{i=-k}^{k-1} \Delta_{\nu_i}\Big) \cap \Delta_{\nu_k}, \quad \tilde\Delta_{\nu_{-k}} = \Big(\omega \setminus \bigcup_{i=-k+1}^{k} \Delta_{\nu_i}\Big) \cap \Delta_{\nu_{-k}} ,$$

где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тогда .

$$\omega = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde\Delta_{\nu_i} \qquad \text{и} \quad \tilde\Delta_{\nu_i} \cap \Delta_{\nu_j} = \emptyset ,$$

как только $i \neq j$. Если $N_{\nu_j}(2^{-1/\theta}\cdot\lambda) \neq 0$, то из определения аппроксимативного числа следует, что $\forall\varepsilon>0, \lambda>0$ существуют операторы

$$\mathcal{D}_{\nu_j}(\lambda) : W^{1}_{\theta,\alpha}(\Delta_{\nu_j}) \longrightarrow \ell_q(\Delta_{\nu_j}),$$

такие, что

$$\| E - \mathcal{D}_{\nu_j}(\lambda) \|_{W^{1}_{\theta,\alpha}(\Delta_{\nu_j}) \to \ell_q(\Delta_{\nu_j})} \leq (1+\varepsilon)\, 2^{-1/\theta}\cdot\lambda , \tag{I.10}$$

$$\dim \mathcal{D}_{\nu_j}(\lambda) \leq N_{\nu_j}(2^{-1/\theta}\cdot\lambda). \tag{I.11}$$

При $N_{\nu_j}(2^{-1/\theta}\cdot\lambda)=0$ положим $\mathcal{D}_{\nu_j}(\lambda)=0$ и определим операторы

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu_j}(\lambda)=\chi_{\Delta_{\nu_j}}\cdot\mathcal{D}_{\nu_j}(\lambda)\chi_{\Delta_{\nu_j}}\,,\quad \widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widetilde{\mathcal{D}}_{\nu_j}(\nu)\,,$$

которые действуют из $W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega)$ в $\ell_q(\omega)$. Здесь χ_{Δ_s} - характеристическая функция множества Δ_s и

$$\chi_{\Delta_s}y=\begin{cases} y_\kappa\,, & \kappa\in\Delta_s\,,\\ 0\,, & \kappa\bar{\in}\Delta_s\,,\end{cases}$$

где $y=\{y_\kappa\}_{\kappa\in\omega}$. Тогда при $1\leqslant\theta\leqslant q\leqslant+\infty,\ \theta\neq+\infty$ имеет место

$$\|y-\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)y\|_{\ell_q(\omega)}=\Big\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\|\chi_{\Delta_{\nu_j}}y-\mathcal{D}_{\nu_j}(\lambda)y\|^{q}_{\ell_q(\Delta_{\nu_j})}\Big\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant\Big\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\|\chi_{\Delta_{\nu_j}}y-\mathcal{D}_{\nu_j}(\lambda)y\|^{q}_{\ell_q(\Delta_{\nu_j})}\Big\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)\lambda\cdot2^{-1/\theta}\Big\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\|\chi_{\Delta_{\nu_j}}y\|_{W^{1}_{\theta,\alpha}(\Delta_{\nu_j})}\Big\}^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)\lambda\cdot2^{-1/\theta}\Big\{2\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty}(\alpha_\kappa|y_\kappa|^{\theta}+|y_{\kappa+1}-y_\kappa|^{\theta})\Big\}^{\frac{1}{\theta}}=(1+\varepsilon)\lambda\|y\|_{W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega)}\,.$$

Здесь мы учли неравенство (I.I0). Если $L=\dim\widetilde{\mathcal{P}}(\lambda)$, то доказанное соотношение свидетельствует, что

$$a_L(W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega),\ell_q(\omega))\leqslant(1+\varepsilon)\lambda\,.$$

Таким образом, соотношения $a_\kappa>(1+\varepsilon)\lambda$ возможны лишь при $\kappa<L$. Поэтому количество таких a-чисел

$$N((1+\varepsilon)\lambda)\leqslant L\leqslant\sum_{\mathcal{D}_{\nu_j}\neq0}\dim\mathcal{D}_{\nu_j}(\lambda)\leqslant\sum_{N_{\nu_j}(\lambda)\neq0}N_{\nu_j}(2^{-1/\theta}\cdot\lambda)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}N_{\nu_j}(2^{-1/\theta}\cdot\lambda).$$

В третьей цепочке неравенств было использовано (I.II). Тем самым лемма доказана.

Л е м м а 6. <u>Пусть</u> $1\leqslant\theta\leqslant q\leqslant+\infty,\ \theta\neq+\infty$; $\lambda>0$, $\Gamma_\lambda=\{\nu\,|\,\nu\in\omega\wedge A_\nu(\theta,q)>\lambda\}$. <u>Тогда для каждого</u> $m\in\Gamma_\lambda$ <u>можно ставить в соответствие последовательность</u> $e^{(m)}$, <u>для которой</u>

$$\|e^{(m)}\|_{\ell_q(\omega)}=1,\quad \|e^{(m)}\|_{W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega)}\leqslant\frac{\mathcal{D}_{\theta q}}{\lambda}\,.$$

Доказательство. Поставим в соответствие $n \in \Gamma_\lambda$ последовательность $e^{(n)} = \{e_i^{(n)}\}_{i\in\omega}$, где $e_i^{(n)} = 1$, если $i = n$, $e_i^{(n)} = 0$ при $i \neq n$. Тогда

$$\|e^{(n)}\|_{\ell_q(\omega)} = 1, \quad \|e^{(n)}\|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)} = \alpha_n + 2. \tag{I.12}$$

Введем обозначения:

$$\Gamma'_\lambda = \{n \mid n \in \Gamma_\lambda \wedge \alpha_n \geq 2^{1-\theta}\}, \quad \Gamma''_\lambda = \{n \mid n \in \Gamma_\lambda \wedge \alpha_n < 2^{1-\theta}\}.$$

Очевидно, что $\Gamma_\lambda = \Gamma'_\lambda \cup \Gamma''_\lambda$. Если $n \in \Gamma'_\lambda$, то, по определению, $K_n = 0$, $A_n = 2^{1/q} \cdot \alpha_n^{-1/\theta}$ и $2^{1-\theta} \leq \alpha_n \leq 2^{\theta/q} \cdot \lambda^{-\theta}$. Поэтому $\forall n \in \Gamma'_\lambda$:

$$\|e^{(n)}\|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)} \leq 2^{\theta/q} \cdot \lambda^{-\theta} + 2^\theta \cdot 2^{\theta/q} \cdot \lambda^{-\theta} = 2^{\theta/q}(1+2^\theta)\lambda^{-\theta}. \tag{I.13}$$

Если же $n \in \Gamma''_\lambda$, то согласно (I.I)-(I.3):

$$(2(K_n+1))^{1/q + 1/\theta'} > \lambda. \tag{I.14}$$

Отсюда с учетом определения (I.I) получим:

$$\sum_{i=n-K_n}^{n+K_n} \alpha_i < \lambda^{-\frac{q\theta}{q+\theta'}}, \quad \forall n \in \Gamma''_\lambda.$$

В частности, $\alpha_n < \lambda^{-q\theta/q+\theta'}$, $\forall n \in \Gamma''_\lambda$.

Тогда $\forall n \in \Gamma''_\lambda$ в силу (I.14) будет:

$$\|e^{(n)}\|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)} \leq \lambda^{-q\theta/q+\theta'} + 2(2(K_n+1))^{\theta/q + \theta/\theta'} (2(K_n+1))^{-\theta\frac{\theta'+q}{q\cdot\theta'}} \leq$$

$$\leq \lambda^{-\theta} \cdot \lambda^{\theta - \frac{q\theta}{q+\theta'}} + 2A_n^\theta(\theta,q)\cdot\lambda^{-\theta} \leq$$

$$\leq \lambda^{-\theta'}\lambda^{\theta\theta'/q+\theta'} + 2A_n^\theta(\theta,q)\cdot\lambda^{-\theta} \leq \lambda^{-\theta}(2(K_n+1))^{\theta/q} + 2A_n^\theta(\theta,q)\lambda^{-\theta} \leq$$

$$\leq 3A^\theta\cdot(\theta,q)\lambda^{-\theta},$$

где

$$A(\theta,q) = \sup_{n\in\omega} A_n(\theta,q).$$

Таким образом,

$$|e^{(n)}|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)} \leq \frac{3A(\theta,q)}{\lambda^{\theta}} . \tag{I.15}$$

Это неравенство вместе с (I.12),(I.13) завершает доказательство леммы.

§ 2. Теоремы о вложении

В формулируемых ниже теоремах I,2 получены необходимые и достаточные условия ограниченности оператора вложения $E: W'_{\theta,\alpha}(\omega) \to \ell_q(\omega)$ в случаях $1 \leq \theta \leq q \leq +\infty, \theta \neq +\infty$ и $1 \leq q < \theta < +\infty$.

В неравенствах участвует константа $C_{\theta q}$, указанная в начале § I.

Теорема I. <u>Пусть</u> $1 \leq \theta \leq q \leq +\infty, \theta \neq +\infty$. <u>Тогда: а) для того чтобы имело место вложение</u> $W'_{\theta,\alpha}(\omega) \subset \ell_q(\omega)$, <u>необходимо и достаточно, чтобы</u>

$$A(\theta,q) = \sup\{A_\nu(\theta,q);\ \nu \in \omega\} < +\infty ;$$

б) <u>для нормы оператора</u> E <u>справедливы неравенства</u>:

$$C_{\theta q} A(\theta,q) \leq \|E\| \leq 2\cdot 2^{1/\theta} A(\theta,q). \tag{2.I}$$

Доказательство. Пусть $1 \leq \theta \leq q < +\infty$ и $\{\nu_s\}$ - последовательность чисел, определенная леммой 4. Тогда в силу леммы I имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{-\infty} |y_k|^q \leq \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{k \in \Delta_{\nu_s}} |y_k|^q \leq$$

$$\leq 2^q \cdot A(\theta,q) \left\{ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=\nu_s-K_{\nu_s}-1}^{\nu_s+K_{\nu_s}} (\alpha_k |y_k|^\theta + |y_{k+1} - y_k|^\theta) \right\}^{q/\theta} \leq$$

$$\leq 2^q \cdot 2^{q/\theta} A(\theta,q) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha_k |y_k|^\theta + |y_{k+1} - y_k|^\theta) \right\}^{q/\theta} .$$

Далее, в соотношении

$$|y|_{\ell_q(\omega)} \leq 2\cdot 2^{1/\theta} A(\theta,q) |y|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)}$$

переходя к пределу при $q \to +\infty$, убедимся в достаточности условия теоремы для $q = +\infty$.

Необходимость условия теоремы и левое неравенство п. б) следуют из леммы 2.

Теорема 2. <u>Пусть</u> $1 \leq q < \theta < +\infty$. <u>Тогда сходимость ряда</u>

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu^{q\theta/\theta-q}(\theta,q)$$

<u>необходима и достаточна для наличия вложения</u> $W^1_{\theta,\alpha}(\omega) \hookrightarrow l_q(\omega)$. <u>При этом норма оператора вложения имеет оценки:</u>

$$\frac{C_{\theta q}}{2}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu^{\theta q/\theta-q}(\theta,q)\right\} < \| E \| < 2\cdot 2^{1/\theta}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu^{q\theta/\theta-q}(\theta,q)\right\}^{\frac{\theta-q}{\theta q}} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\{\nu_s\}$ - последовательность, выбранная по лемме 4. Учитывая, что $\frac{\theta}{q} > 1$, применяем неравенство Гёльдера и лемму I:

$$\sum_{K=-\infty}^{+\infty} |y_K|^q \leqslant \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \sum_{K\in\Delta_{\nu_s}} |y_K|^q =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{K\in\Delta_{\nu_s}} |y_K|^q\right)\left(\sum_{K=\nu_s-K_{\nu_s}-1}^{\nu_s+K_{\nu_s}} (\alpha_K|y_K|^\theta + |y_{K+1}-y_K|^\theta)\right)^{\frac{q}{\theta}-\frac{q}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{s=-\infty}^{+\infty}\sum_{K=\nu_s-K_{\nu_s}-1}^{\nu_s+K_{\nu_s}} (\alpha_K|y_K|^\theta + |y_{K+1}-y_K|^\theta)\right\}^{q/\theta}\left\{\sum_{s=-\infty}^{+\infty}(2A_{\nu_s}(\theta,q))^{q\theta/\theta-q}\right\}^{\frac{\theta-q}{\theta}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^q 2^{q/\theta}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu^{q\theta/\theta-q}(\theta,q)\right\}^{\frac{\theta-q}{\theta}}\cdot\left\{\sum_{K=-\infty}^{+\infty}(\alpha_K|y_K|^\theta - |y_{K+1}-y_K|^\theta\right\}^{q/\theta} .$$

<u>Необходимость</u>. Пусть $\{s_n\}_{n\in\omega}$ - последовательность чисел, обладающая следующими свойствами:

I) $s_{n-1} + K_{s_{n-1}} < s_n - K_{s_n} - 1, \ \forall n\in\omega;$

2) для соответствующей последовательности $\{A_{s_n}(\theta,q)\}$

$$\sum_{n=-N}^{+N} A_{s_n}^{\frac{\theta q}{\theta-q}}(\theta,q) \geqslant 2^{-q}\sum_{\nu=s_{-N}}^{s_N} A_\nu^{\frac{\theta q}{\theta-q}}(\theta,q) \qquad \forall N = 1,2,\ldots$$

Первое из этих свойств обеспечивает $\Delta_{s_n}\cap\Delta_{s_m} = \emptyset$, как только $n\neq m$ и между ближайшими множествами $\Delta_{s_n}, \Delta_{s_m}$ имеется хотя бы одно целое число. По лемме 2, каждому из чисел s_n ставим в соответствие последовательность $y^{(s_n)}$. При этом будем считать, что

$$\| y^{(s_n)} \|_{W^1_{\theta,\alpha}(\omega)} = 1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{supp} y^{(s_n)} = \Delta_{s_n}, \quad \|y^{(s_n)}\|_{\ell_q(\omega)} \geq C_{\theta q} \cdot A_{s_n}(\theta, q).$$

Построим новую последовательность

$$y_{(N)} = \sum_{n=-N}^{N} A_{s_n}^{\frac{q}{\theta-q}}(\theta,q)\, y^{(s_n)}.$$

Тогда, в силу первого свойства последовательности $\{s_n\}$ и леммы 2, имеем:

$$\|y_{(N)}\|_{\ell_q(\omega)}^q = \sum_{n=-N}^{+N} A_{s_n}^{\frac{q^2}{\theta-q}}(\theta,q) \sum_{k\in\Delta_{s_n}} |y_k^{(s_n)}|^q \geq$$

$$\geq C_{\theta q}^q \cdot \sum_{n=-N}^{N} A_{s_n}^{\frac{q^2}{\theta-q}}(\theta,q) A_{s_n}^q(\theta,q) = C_{\theta q}^q \cdot \sum_{n=-N}^{N} A_{s_n}^{\frac{\theta q}{\theta-q}}(\theta,q);$$

$$\|y_{(N)}\|_{W_{\theta,\alpha}(\omega)}^\theta = \sum_{n=-N}^{N} A_{s_n}^{\frac{\theta q}{\theta-q}}(\theta,q) \sum_{i=s_n-k_{s_n}-1}^{s_n+k_{s_n}} (\alpha_i |y_i^{(s_n)}|^\theta + |y_{i+1}^{(s_n)} - y_i^{(s_n)}|^\theta)^\theta =$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} A_{s_n}^{\frac{\theta q}{\theta-q}}(\theta,q) \|y^{(s_n)}\|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)} = \sum_{n=-N}^{N} A_{s_n}^{\frac{\theta q}{\theta-q}}(\theta,q) < \sum_{\nu=s_N}^{s_N} A_\nu^{\frac{\theta q}{\theta-q}}(\theta,q).$$

Отсюда и из второго свойства последовательности чисел следует

$$\|y_{(N)}\|_{\ell_q(\omega)} \cdot \|y_{(N)}\|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)}^{-1} \geq \frac{C_{\theta q}}{2} \left(\sum_{n=s_{-N}}^{s_N} A_{s_n}^{\frac{\theta q}{\theta-q}}(\theta,q) \right)^{\frac{\theta-q}{\theta q}}.$$

Полученное соотношение доказывает необходимость условия теоремы, ибо, если предполагать, что ряд

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu^{\frac{\theta q}{\theta-q}}(\theta,q)$$

расходится, то единичный шар пространства $W'_{\theta,\alpha}(\omega)$ не может содержаться в $\ell_q(\omega)$. Это противоречит условию $W'_{\theta,\alpha}(\omega) \subset \ell_q(\omega)$. Тем самым теорема доказана полностью.

§ 3. Оценки аппроксимативных чисел вложения $W'_{\theta,\alpha}(\omega) \subset \ell_q(\omega)$

В этом параграфе мы установим двусторонние оценки функции распределения аппроксимативных чисел вложения $W'_{\theta,\alpha}(\omega) \subset \ell_q(\omega)$. Отсюда следуют оценки и для самих аппроксимативных чисел.

Т е о р е м а 3. <u>Пусть</u> $1 \leq \theta < q < +\infty$, $\theta \neq +\infty$, $\lambda > 0$ <u>и</u> $A(\theta,q) < +\infty$.

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для функции распределения аппроксимативного числа оператора вложения $E: W^{1}_{\theta,\alpha}(\omega) \to \ell_q(\omega)$ имеет место неравенство

$$N(\lambda(1+\varepsilon)) < 8 \sum_{A_\nu > \gamma_{q,\theta} \cdot \lambda} 1 ,$$

где $\gamma_{q,\theta} = 2^{-1-1/\theta} \cdot 3^{-1/\theta' - 1/q}$.

Доказательство. Пусть $\{\nu_s\}_{s\in\omega}$ - последовательность, определенная леммой 4, а $\{\Delta_{\nu_s}\}_{s\in\omega}$ - соответствующая система множеств. Согласно лемме 5, имеем

$$N((1+\varepsilon)\lambda) < \sum_{s=-\infty}^{+\infty} N_{\nu_s}(2^{-1/\theta} \cdot \lambda), \tag{3.1}$$

где $N_{\nu_s}(\lambda) = N_{\Delta_{\nu_s}}(\lambda)$. Множества Δ_{ν_s} имеют ровно $(2K_{\nu_s}+1)$ элементов, поэтому пространства $W^{1}_{\theta,\alpha}(\Delta_{\nu_s})$, $\ell_q(\Delta_{\nu_s})$ являются конечномерными. Полный набор аппроксимативных чисел оператора $E: W^{1}_{\theta,\alpha}(\Delta_{\nu_s}) \to \ell_q(\Delta_{\nu_s})$:

$$a_0(\Delta_{\nu_s}),\ a_1(\Delta_{\nu_s}),\ \dots,\ a_{2K_{\nu_s}+1}(\Delta_{\nu_s}).$$

Если $2^{-1/\theta}\lambda \geq a_0(\Delta_{\nu_s})$, то $N_{\nu_s}(2^{-1/\theta}\lambda) = 0$. Поэтому отличным от нуля слагаемым суммы, стоящей в правой стороне (3.1), соответствуют:

$$2^{-1/\theta}\lambda < a_0(\Delta_{\nu_s}) \quad \text{и} \quad N_{\Delta_{\nu_s}}(2^{-1/\theta}\cdot\lambda) \leq 2(K_{\nu_s}+1),\ s\in\omega. \tag{3.2}$$

Из первого соотношения, в силу определения $a_0(\Delta_{\nu_s})$ и леммы I, следует:

$$2^{-1/\theta}\lambda < 2A_{\nu_s}(\theta,q).$$

Далее, согласно следствию леммы 3 имеем

$$A_{\nu_s}(\theta,q) \leq 3^{1/\theta' + 1/q} A_\ell(\theta,q)$$

для всех $\ell \in \Omega_{\nu_s} = \{\ell : |\nu_s - \ell| \leq \frac{K_{\nu_s}}{2}\}$. Тогда

$$\gamma_{q,\theta}\cdot\lambda < A_\ell(\theta,q), \quad \forall \ell \in \Omega_{\nu_s}. \tag{3.3}$$

Если K_{ν_s} - четное число, то в множестве Ω_{ν_s} содержатся K_{ν_s+1} элементов, если же K_{ν_s} - нечетное число, то их K_{ν_s} . В первом случае

$$2(K_{\nu_s}+1) = 2|\Omega_{\nu_s}|,$$

а во втором случае

$$2(K_{\nu_s}+1) = K_{\nu_s} \cdot \frac{2(K_{\nu_s}+1)}{K_{\nu_s}} \leqslant 4K_{\nu_s} = 4|\Omega_{\nu_s}|.$$

Теперь из (3.I) и (3.2) следует, что

$$N((1+\varepsilon)\lambda) \leqslant 4 \sum_{A_{\nu_s} > 2^{-1-1/\theta}\cdot\lambda} |\Omega_{\nu_s}|.$$

Отсюда, учитывая неравенство (3.3), которое справедливо $\forall \ell \in \Omega_{\nu_s}$, и кратность покрытия множества ω системой множеств $\{\Delta_{\nu_s}\}$, получаем:

$$N((1+\varepsilon)\lambda) \leqslant 4 \sum_{A_{\nu_s} > 2^{1-1/\theta}\cdot\lambda} \Big(\sum_{\ell\in\Omega_{\nu_s}} 1\Big) < 8 \sum_{A_\ell > \gamma_{\theta q}\cdot\lambda} 1 ,$$

что и требовалось.

Т е о р е м а 4 . <u>Пусть</u> $1 \leqslant \theta \leqslant q \leqslant 2$ <u>и</u> $2 \leqslant \theta \leqslant q \leqslant +\infty, \theta \neq +\infty, \lambda > 0$ и $A(\theta,q) < +\infty$. <u>Тогда для функции распределения аппроксимативных чисел оператора вложения</u> $W^1_{\theta,\alpha}(\omega) \hookrightarrow \ell_q(\omega)$ <u>справедливо неравенство</u>:

$$N(\lambda) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{A_\nu > \sqrt{2}\cdot\mathcal{D}_{\theta q}\cdot\lambda} 1 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Согласно определению аппроксимативного числа оператора вложения $E : W^1_{\theta,\alpha}(\omega) \to \ell_q(\omega)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется оператор $B : W^1_{\theta,\alpha}(\omega) \to \ell_q(\omega)$ размерности $\leqslant K$ такой, что

$$(1+\varepsilon)a_K(\omega) > \sup \|y - By\|_{\ell_q(\omega)} \|y\|^{-1}_{W^1_{\theta,\alpha}(\omega)} .$$

Из множества Γ_λ , которое было определено в лемме 6, выделим подмножество чисел Γ^0_λ так, чтобы $m,\ell \in \Gamma^0_\lambda$ тогда и только тогда, когда $|m-\ell| \geqslant 2$. При этом

$$|\Gamma^0_\lambda| = \frac{1}{2} \sum_{A_K > \lambda} 1$$

есть количество элементов в этом множестве. В силу леммы 6, каждому $m \in \Gamma^0_\lambda$ можем поставить в соответствие последовательность $e^{(m)} = \{e^{(m)}_i\}_{i\in\omega}$, где $e^{(m)}_i = 1$ при $i = m$, $e^{(m)}_i = 0$ при $i \neq m$. По ней можно однозначно представить элементы пространства $\ell_\theta(\Gamma^0_\lambda)$. Очевидно, что

$$(1+\varepsilon)a_\kappa > \sup\left\{\|y-By\|_{\ell_q(\omega)}\cdot\|y\|^{-1}_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)};\ y\in W'_{\theta,\alpha}(\omega)\cap\ell_q(\Gamma^\circ_\lambda)\right\}.$$

Если $y\in\ell_\theta(\Gamma^\circ_\lambda)$, то $\operatorname{supp} y\subset\Gamma^\circ_\lambda$ и

$$y=\sum_{m\in\Gamma^\circ_\lambda} y_m\cdot e^{(m)}.$$

Далее,

$$\|y\|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)\cap\ell_\theta(\Gamma^\circ_\lambda)}=\left\{\sum_{\kappa\in\Gamma^\circ_\lambda}\left[\alpha_\kappa|y_\kappa|^\theta+2|y_\kappa|^\theta\right]\right\}^{\frac{1}{\theta}}=$$

$$=\left\{\sum_{\kappa\in\Gamma^\circ_\lambda}|y_\kappa|^\theta|\alpha_\kappa+2|\right\}^{\frac{1}{\theta}}=\left\{\sum_{\kappa\in\Gamma^\circ_\lambda}|y_\kappa|\|e^{(m)}\|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Тогда, в силу леммы 6,

$$\|y\|_{W'_{\theta,\alpha}(\omega)\cap\ell_\theta(\Gamma^\circ_\lambda)}=\frac{\mathcal{D}_{\theta q}}{\lambda}\left\{\sum_{\kappa\in\Gamma^\circ_\lambda}|y_\kappa|^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Поэтому

$$(1+\varepsilon)a_\kappa>\frac{\lambda}{\mathcal{D}_{\theta q}}\sup_{\|y\|_{\ell_\theta(\Gamma^\circ_\lambda)}}\left\|\sum_{\kappa\in\Gamma^\circ_\lambda}y_\kappa e^{(\kappa)}-B\left(\sum_{\kappa\in\Gamma^\circ_\lambda}y_\kappa e^{(m)}\right)\right\|_{\ell_q(\omega)}. \tag{3.4}$$

Соотношением

$$\mathcal{P}y=\left\{y_\kappa\chi_{\Gamma^\circ_\lambda}(\kappa)\right\}_{\kappa\in\omega},$$

где $\chi_{\Gamma^\circ_\lambda}(\kappa)$ – характеристическая функция множества Γ°_λ, определим оператор

$$\mathcal{P}:\ell_q(\omega)\longrightarrow\ell_q(\Gamma^\circ_\lambda).$$

Очевидно, что $\mathcal{P}e^{(m)}=e^{(m)}$, как только $m\in\Gamma^\circ_\lambda$. Далее, при $1\le q<+\infty$ имеем

$$\|\mathcal{P}y\|_{\ell_q(\Gamma^\circ_\lambda)}=\left\{\sum_{\kappa\in\Gamma^\circ_\lambda}|y_\kappa|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\le\left\{\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty}|y_\kappa|^q\right\}^{\frac{1}{q}}=\|y\|_{\ell_q(\omega)}.$$

Аналогично и при $q=+\infty$.

Следовательно,

$$\|\mathcal{P}_y\|_{\ell_q(\omega)\to\ell_q(\Gamma^o_\lambda)}\le 1.$$

Поэтому

$$\Big\|\sum_{\kappa\in\Gamma^o_\lambda} y_\kappa e^{(\kappa)}-B\Big(\sum_{\kappa\in\Gamma^o_\lambda} y_\kappa e^{(\kappa)}\Big)\Big\|_{\ell_q(\omega)}\ge$$

$$\ge\Big\|\sum_{\kappa\in\Gamma^o_\lambda} y_\kappa e^{(\kappa)}-\mathcal{P}B\Big(\sum_{\kappa\in\Gamma^o_\lambda} y_\kappa e^{(\kappa)}\Big)\Big\|_{\ell_q(\Gamma^o_\lambda)}.$$

Поскольку $\kappa_1=\dim\mathcal{P}B\le\kappa$ и $\mathcal{P}B:\ell_q(\Gamma^o_\lambda)\to\ell_q(\Gamma^o_\lambda)$, то найдется матрица $\{a_{ij}\}$ ранга κ_1 такая, что

$$\mathcal{P}B\Big(\sum_{m\in\Gamma^o_\lambda} y_m e^{(m)}\Big)=\sum_{j\in\Gamma^o_\lambda}\Big(\sum_{\kappa\in\Gamma^o_\lambda} a_{\kappa j}\,y_\kappa\Big)e^{(j)}.$$

Теперь соотношение (3.4) можно переписать следующим образом:

$$(1+\varepsilon)a_\kappa>\frac{\lambda}{\mathcal{D}_{\theta q}}\sup_{\|y\|_{\ell_\theta(\Gamma^o_\lambda)}=1}\Big\|\sum_{m\in\Gamma^o_\lambda}\Big[y_m-\sum_{\kappa\in\Gamma^o_\lambda} a_{\kappa m} z_\kappa\Big]e^{(m)}\Big\|_{\ell_q(\Gamma^o_\lambda)}=$$

$$=\frac{\lambda}{\mathcal{D}_{\theta q}}\cdot\sup_{\|y\|_{\ell_\theta(\Gamma^o_\lambda)}=1}\Big\{\sum_{m\in\Gamma^o_\lambda}\Big|y_m-\sum_{\kappa\in\Gamma^o_\lambda} a_{\kappa m}y_\kappa\Big|^q\Big\}^{\frac{1}{q}},\quad 1\le q<+\infty;$$

$$(1+\varepsilon)a_\kappa>\frac{\lambda}{\mathcal{D}_{\theta q}}\sup_{\|y\|_{\ell_\theta(\Gamma^o_\lambda)}=1}\ \sup_{m\in\Gamma^o_\lambda}\Big|y_m-\sum_{\kappa\in\Gamma^o_\lambda} a_{\kappa m}y_\kappa\Big|,\ q=+\infty.$$

Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon>0$ и определения линейного поперечника [9] , получим

$$a_\kappa>\frac{1}{\mathcal{D}_{\theta q}}\,\delta_\kappa\Big(B_\theta^{|\Gamma^o_\lambda|};\ \ell_q(\Gamma^o_\lambda)\Big),$$

где δ_κ - линейный поперечник ограниченного шара $B_\theta^{|\Gamma^o_\lambda|}\subset\ell_\theta(\Gamma^o_\lambda)$ в метрике $\ell_q(\Gamma^o_\lambda)$.

Известно [9] , что при $1\le\theta\le q\le 2$

$$\delta_\kappa(B_\theta^{|\Gamma^o_\lambda|},\ \ell_q(\Gamma^o_\lambda))\ge\delta_\kappa(B_1^{|\Gamma^o_\lambda|},\ell_2(\Gamma^o_\lambda));$$

а при $2\le\theta\le q\le+\infty$ имеет место

$$\delta_k(B_\theta^{|\Gamma_\lambda^\circ|},\ \ell_q(\Gamma_\lambda^\circ)) \geq \delta_k(B_2^{|\Gamma_\lambda^\circ|},\ \ell_\infty(\Gamma_\lambda^\circ))$$

и

$$\delta_k(B_1^{|\Gamma_\lambda^\circ|},\ \ell_2(\Gamma_\lambda^\circ)) = \delta_k(B_2^{|\Gamma_\lambda^\circ|},\ \ell_\infty(\Gamma_\lambda^\circ)) = \sqrt{1-\frac{K}{\Gamma_\lambda^\circ}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\forall K:\ 0 \leq K \leq \left[\frac{|\Gamma_\lambda^\circ|}{2}\right].$$

Поэтому

$$a_k > \frac{\lambda}{\sqrt{2}\mathcal{D}_{\theta q}}, \quad K = 0, 1, \ldots, \left[\frac{|\Gamma_\lambda^\circ|}{2}\right].$$

Отсюда следует

$$N\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}\mathcal{D}_{\theta q}}\right) \geq \frac{|\Gamma_\lambda^\circ|}{2} = \frac{1}{4}\sum_{A_k>\lambda} 1,$$

что и требовалось.

Теорема 5. Пусть $A(\theta,q)<+\infty$ и $\{B_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$ - последовательность из чисел $A_\nu(\theta,q)$, $\nu\in\omega$, расположенных в порядке убывания. Тогда для аппроксимативных чисел a_n оператора вложения

$$E: W^1_{\theta,\alpha}(\omega) \longrightarrow \ell_q(\omega)$$

верны соотношения:

1) при $1\leq\theta\leq q\leq+\infty$, $\theta\neq+\infty$ выполняется

$$a_n \leq 3^3\cdot B_{\left[\frac{n}{8}\right]}(\theta,q), \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

2) при $1\leq\theta\leq q\leq 2$ или $2\leq\theta\leq q\leq+\infty, \theta\neq+\infty$ имеет место

$$2^{-1/2}\mathcal{D}_{\theta q}^{-1}B_{4n}(\theta,q) \leq a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Сначала докажем п.I. Положив в теореме 3 $\lambda = a_n$, будем иметь

$$n < 8\sum_{A_k > \frac{\gamma_{\theta q}}{1+\varepsilon}a_n} 1,$$

где $\varepsilon>0$ - произвольное число. Следовательно,

$$\frac{\gamma_{\theta q}}{1+\varepsilon}\cdot a_n < B_{\left[\frac{n}{8}\right]}(\theta,q).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ положим $1+\varepsilon = 3^{1/q'}$, $q+q' = q\cdot q'$. Тогда $\frac{\gamma_{\theta q}}{1+\varepsilon} \geq 3^{-3}$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано. Точно так же из теоремы 4 можно вывести и второе утверждение.

§ 4. Двусторонние оценки собственных чисел некоторого класса матриц, соответствующих разностным уравнениям

Рассмотрим пространство последовательностей $\ell_2(\omega)$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \bar{y}_k ,$$

где $x=\{x_k\}_{k\in\omega}, y=\{y_k\}_{k\in\omega} \in \ell_2(\omega)$, $\bar{y}_k$ - комплексно сопряженное число с y_k.

Квадратичная форма

$$\| y \|_{W'_{2,\alpha}(\omega)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha_k |y_k|^2 + |y_{k+1} - y_k|^2),$$

определенная на финитных последовательностях, порождает неотрицательный оператор Λ, который удовлетворяет равенству:

$$(\Lambda y, y) = \| y \|^2_{W'_{2,\alpha}(\omega)} .$$

Оператор Λ есть расширение по Фридрихсу оператора Λ_0 :

$$\Lambda_0 y = \{-y_{i+1} + (\alpha_i + 2) y_i - y_{i-1}\}_{i\in\omega},$$

определенного на всевозможных финитных последовательностях. Известно [10], что собственные числа оператора $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ совпадают с величинами, обратными аппроксимативным числам оператора вложения $E: W'_{2,\alpha}(\omega) \to \ell_2(\omega)$. Из теоремы 1 при $\theta=q=2$ вытекает критерий положительной определенности оператора Λ и двусторонняя оценка его наименьшего собственного числа, совпадающая с оценкой, полученной в [11].

Верна

Т е о р е м а 6. <u>Пусть</u> $\{B_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$ - <u>последовательность чисел</u> $A_\nu(2,2)$, $\nu\in\omega$, <u>расположенная в порядке убывания. Если</u> $\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$ - <u>последовательность собственных чисел разностного оператора</u> Λ, <u>расположенных в возрастающем порядке, то</u>

$$3^{-6} B^{-2}_{[\frac{n}{8}]} \le \lambda_n \le 2\cdot \mathcal{D}^2_{2,2} \cdot B^{-2}_{4n} , \quad n=0,1,2,\dots .$$

Эта теорема есть следствие теоремы 5 при $\theta=q=2$ и равенства

$$a_n(W^1_{2,\alpha}\,;\ \ell_2) = \lambda_n^{-\frac{1}{2}}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Теперь можем сформулировать критерий принадлежности оператора Λ^{-1} идеалу $\mathfrak{S}_\tau$ [10] .

Т е о р е м а 7 . Пусть $0<\tau\leq+\infty$ и $\{B_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$, $\{\lambda\}_{n=0}^{+\infty}$ - последовательности, определенные в теореме 6. Оператор Λ^{-1} принадлежит классу $\mathfrak{S}_\tau$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} B_\nu^{2\tau} < +\infty .$$

При этом

$$\frac{1}{2^{1+\frac{2}{\tau}}\mathcal{D}^2_{2,2}}\left\{\sum_{\nu=0}^{+\infty} B_\nu^{2\tau}\right\}^{\frac{1}{\tau}} \leq \left\{\sum_{\nu=0}^{+\infty}\lambda_\nu^{-\tau}\right\}^{\frac{1}{\tau}} \leq 8^{\frac{1}{\tau}}\cdot 3^6\left\{\sum_{\nu=0}^{+\infty} B_\nu^{2\tau}\right\}^{\frac{1}{\tau}} .$$

В теории вполне непрерывных операторов весьма важны классы ядерных операторов и операторов Гильберта-Шмидта [10] . При $\tau=1$ из теоремы 7 следует критерий ядерности оператора Λ^{-1} , если же условие теоремы выполняется при $\tau=2$, то Λ^{-1} - оператор Гильберта-Шмидта [10] .

З а м е ч а н и е . Приведенные выше результаты соответствуют равномерной сетке ω на $(-\infty,+\infty)$ с шагом $h=1$. Сейчас покажем возможность распространения их в произвольную равномерную сетку ω_h на $(-\infty,+\infty)$.

Пусть $1\leq\theta<+\infty$ и $\sigma=\{\sigma_\kappa\}_{\kappa\in\omega}$ - последовательность неотрицательных чисел; $h>0$ и ω_h - равномерная сетка на $(-\infty,+\infty)$, $x_\kappa=\kappa h$, $\kappa\in\omega$ - узлы сетки. Будем говорить, что последовательность $y=\{y_\kappa\}_{\kappa\in\omega}\in W^1_{\theta,\sigma}(\omega_h)$, если

$$|y\,;\ W^1_{\theta,\sigma}(\omega_h)| = \left\{\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty}\left(|y_\kappa|^\theta\cdot\sigma_\kappa + \left|\frac{y_{\kappa+1}-y_\kappa}{h}\right|^\theta\right)h\right\}^{\frac{1}{\theta}} < +\infty ;$$

$y\in\ell_q(\omega_h)$, $1\leq q\leq+\infty$, если

$$|y\,;\ \ell_q(\omega_h)| = \left\{\sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty}|y_\kappa|^q\cdot h\right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty .$$

Если положить $\alpha_\kappa=\sigma_\kappa\cdot h^\theta$, $\forall\kappa\in\omega$, то

$$\|y\|_{W^1_{\theta,\sigma}(\omega_h)} = h^{-1/\theta'}\|y\|_{W_{\theta,\alpha}(\omega)}$$

и

$$\|y\|_{\ell_q(\omega_h)} = h^{1/q}\|y\|_{\ell_q(\omega)} ;$$

$$K_\nu(h)=\begin{cases} \max\left[\kappa:(2h(\kappa+1))^{-\theta/\theta'}\geq\sum\limits_{i=\nu-\kappa}^{\nu+\kappa}\sigma_i\cdot h\right], & \text{если } \sigma_i\cdot h<(2h)^{-\theta/\theta'};\\ 0 & \text{, если } \sigma_i\cdot h\geq(2h)^{-\theta/\theta'}; \end{cases}$$

$$d_\nu(h)=\max\left\{(2h(\kappa_\nu^{(h)}+1))^{-\theta/\theta'},\ \sigma_\nu h\right\};$$

$$A_\nu(\theta,q;h)=(2h(\kappa_\nu^{(h)}+1))^{\frac{1}{q}}\cdot d_\nu^{(h)^{-\frac{1}{\theta}}}.$$

Повторяя все рассуждения и выкладки лемм I,2 § I и теорем I,2 § 2 либо учитывая изоморфность, изометричность пространств $W^1_{\theta,\alpha}(\omega)$ и $W^1_{\theta,\sigma}(\omega_h)$, можно доказать теоремы о вложении $W^1_{\theta,\sigma}(\omega_h)\hookrightarrow \ell_q(\omega_h)$, подобные теоремам I и 2.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. М. Отелбаеву за внимание и обсуждение результатов работы.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М.: Наука, 1977.- 656 с.
2. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений.- М.: Наука, 1976. - 352 с.
3. Андреев В.Б. О равномерной сходимости некоторых разностных схем. - Журн. вычислит.математики и мат.физики,1966,т.6,№2,с.238-250.
4. Андреев В.Б. Устойчивость разностных схем для эллиптических уравнений по граничным условиям Дирихле.- Журн. вычислит. математики и мат. физики , 1972, т.12, № 3, с.598-611.
5. Мокин Ю.И., Лазаров Р.Д. К устойчивости эллиптических разностных задач.- Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1973, т.13, № 2, с. 488-494.
6. Мокин Ю.И. Оценки L_p -норм сеточных функций в предельных случаях.- Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 9, с. 1652-1663.
7. Отелбаев М. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 150, с.265-305.
8. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства.- М.: Мир, 1967.- 266 с.
9. Исмагилов Р.С. Поперечники компактов в линейных прост-

ранствах.- В кн.: Геометрия линейных пространств и теория операторов. Ярославский гос.университет, 1977, с. 75-113.

10. Г о х б е р г И.Ц., К р е й н И.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.- М.: Наука, 1965.- 448 с.

11. М у с л и м о в Б., О т е л б а е в М. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма-Лиувилля.- Журн. вычислит. математики и мат. физики, 1981, т. 21, № 6, с.1430-1434.