УДК 517.518.22

К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЙ НОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

М.М. Зарубин (Комсомольск-на-Амуре)

С.Л. Соболев [1, гл.VI] установил вложения пространств $W^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ относительно одновременного изменения параметров p,ν и ℓ, где через $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ обозначено замыкание по норме пространства $W^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ множества финитных функций (точное определение пространств $W^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ приведено ниже).

Вложения С.Л. Соболева накладывают необходимые условия на форму и взаимное расположение областей существования весовой нормы $\|\cdot\|_{p,\nu}$ функции $\varphi(x)\in W^{\ell}_{loc}(R^n)$ и модуля ее градиента k-го порядка $(k\leq\ell)$.

В настоящей работе показано, что необходимые условия, вытекающие из вложений С.Л. Соболева пространств $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ являются "существенно недостаточными" (теорема 1), хотя определяющие их вложения неулучшаемы в целом [1, гл. VI, § 9]. Этот результат позволяет, в частности, улучшить вложения пространств $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ на некоторых классах функций, выделяемых условиями геометрического характера (см. [6, 7]).

Введем необходимые определения и обозначения.

Через $L_{loc}(R^n)$ обозначим множество вещественнозначных функций $\varphi(x)$, заданных на R^n и интегрируемых по Лебегу на каждом шаре с центром в начале координат.

Через $W^{\ell}_{loc}(R^n)$, $\ell=0,1,2,\dots$, обозначим множество функций $\varphi(x)\in L_{loc}(R^n)$, имеющих обобщенные в смысле С.Л. Соболева, производные $\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(x)$ для всех мультииндексов α с $|\alpha|=\ell$

(см. [2, гл. I, § 5]).

Для функции $\varphi(x)\in W^{\ell}_{loc}(R^n)$ градиентом K-го порядка ($0\leqslant K\leqslant \ell$) назовем симметрическое тензорное поле ранга K - $\{\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(x)\}_{|\alpha|=K}$ (см. [I, гл. Ш, § 5]), а его главный квадратичный инвариант

$$T_K(x|\varphi)\in L_{loc}(R^n),$$

определяемый равенством

$$T_K(x|\varphi)=\Big\{\sum_{|\alpha|=K}\frac{K!}{\alpha!}\big(\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(x)\big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}, \tag{I}$$

где $\alpha!=\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!$, назовем модулем градиента K-го порядка функции $\varphi(x)$.

Пространство $W^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ состоит из функций $\varphi(x)\in W^{\ell}_{loc}(R^n)$, у которых модуль градиента ℓ-го порядка $T_{\ell}(x|\varphi)$ (см. (I)) имеет конечную норму $\|\cdot\|_{p,\nu}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\nu\in R$, где

$$\|\varphi\|_{p,\nu}=\Big\{\int_{R^n}\big(|\varphi(x)|\cdot(1+|x|^2)^{\nu/2}\big)^p dx\Big\}^{1/p}, \quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|\varphi\|_{\infty,\nu}=\operatorname{vrai\,sup}_{R^n}\big\{|\varphi(x)|\cdot(1+|x|^2)^{\nu/2}\big\} \tag{2}$$

под модулем вектора x понимается выражение

$$|x|=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{1/2}.$$

Следуя [I], пространства $W^{0}_{p,\nu}(R^n)$ будем обозначать через $L_{p,\nu}(R^n)$.

Для геометрической наглядности наряду с параметрами (ν,p) удобно использовать параметры (ν,τ), определяемые соотношениями:

$$\nu=\nu,\ \tau=\frac{n}{p} \qquad (\tau=0 \text{ при } p=\infty). \tag{3}$$

Параметры (ν , τ) пробегают множество

$$\mathcal{M}=\{(\nu,\tau)\in R^2\,|\,0\leqslant\tau\leqslant n\}. \tag{4}$$

О п р е д е л е н и е I. Областью существования весовой нормы $\|\cdot\|_{p,\nu}$ функции $\varphi(x) \in L_{loc}(R^n)$ назовем множество $\mathcal{A}(\varphi) \subset \mathcal{M}$ (см. (4)), являющееся образом при преобразовании (3) множества

$$B(\varphi) = \{(\nu, p) \in R \times \overline{R} \mid \|\varphi\|_{p,\nu} < \infty\} \qquad \text{(см.(2))}.$$

О п р е д е л е н и е 2. Резцом с вершиной в точке (ν_0, τ_0) назовем множество точек плоскости (ν, τ) вида

$$\Lambda(\nu_0, \tau_0 \mid \Delta, \Gamma) = \{(\nu, \tau) \in R^2 \mid \nu + \tau < \nu_0 + \tau_0,$$
$$\tau_0 < \tau \leq n\} \cup \Delta \cup \Gamma,$$

где (ν_0, τ_0) - точка множества $\mathcal{M}$ (см.(4)), Δ - некоторый (может быть, пустой) промежуток, расположенный на отрезке

$$P = \{(\nu, \tau) \in R^2 \mid \nu + \tau = \nu_0 + \tau_0, \quad \tau_0 \leq \tau \leq n\},$$

Γ - либо пустое множество, либо луч вида $\{\tau = \tau_0, \ \nu \leq \xi\}$,

$$\{\tau = \tau_0, \quad \nu < \xi\} \qquad , \text{ где } \quad \xi \leq \nu_0$$

(см. рис.I).

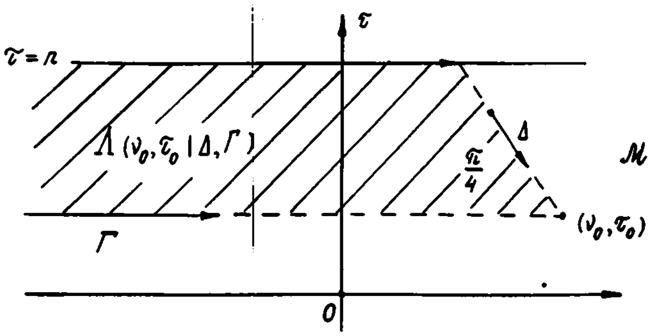

Рис. I

Вложения С.Л. Соболева пространств $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ выглядят следующим образом.

Если $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p_0,\nu_0}(R^n)$, где $1 < p_0 < \infty$, $\ell \geq 1$, то $\mathcal{A}(T_{\ell-k}(\varphi))$ - область существования весовой нормы $\|\cdot\|_{p,\nu}$ модуля градиента $T_{\ell-k}(\varphi)$, $1 \leq k \leq \ell$ (см. (I) и определение I), содержит некоторый резец $\Lambda_K(\nu_K, \tau_K \mid \Delta_K, \Gamma_K)$ (см. определение 2) с вершиной в точке (ν_K, τ_K), где

$$\nu_K = \nu_0 + \min(0, \tau_0 - K), \quad \tau_K = \max(0, \tau_0 - K)$$

(параметры (ν_0, τ_0) - образы параметров (ν_0, ρ_0) при преобразовании (3)), причем

I) $\Delta_K = \{(\nu,\tau) \in P \mid \tau_K \leq \tau \leq \tau_0\}$, $\Gamma_K = \{\tau = \tau_K, \nu \leq \nu_K\}$

при $\tau_0 \neq K$ и $(\nu_0 + \tau_0) \neq 1, 2, \ldots, K$;

2) $\Delta_K = \varnothing$, $\Gamma_K = \{\tau = \tau_K, \nu < \nu_K\}$, если $\tau_0 \neq K$, а

($\nu_0 + \tau_0$) совпадает с одним из чисел $\{1, 2, \ldots, K\}$;

3) $\Delta_K = \{(\nu,\tau) \in P \mid 0 < \tau \leq \tau_0\}$, $\Gamma_K = \varnothing$

при $\tau_0 = K$ и $(\nu_0 + \tau_0) \neq 1, 2, \ldots, K$;

4) $\Delta_K = \varnothing$, $\Gamma_K = \varnothing$, если $\tau_0 = K$, а $(\nu_0 + \tau_0)$ совпадает с одним из чисел $\{1, 2, \ldots, K\}$. (5)

З а м е ч а н и е I. Заметим, что это действительно вложения относительно параметров ν, p и ℓ пространств $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$, так как возможность приближения функции $\varphi(x)$ финитными элементами в новой норме следует из непрерывности вложений (5).

Вложения (5) естественным образом накладывают необходимые условия на форму и взаимное расположение в плоскости (ν, τ) множеств $\mathcal{A}(\varphi)$ и $\mathcal{A}(\Gamma_K(\varphi))$ - областей существования весовой нормы $\|\cdot\|_{p,\nu}$, функции $\varphi(x) \in W^{\ell}_{loc}(R^n)$ и модуля ее градиента K- порядка ($K \leq \ell$).

Оказывается (см. [3-5]), что в отличие от случая пространств $L_{p,\nu}(R^n)$ эти необходимые условия являются "существенно недостаточными" (результат теоремы I) уже при $n = K = 1$ (n - размерность пространства переменных, K - порядок дифференцирования).

Для характеристики пространств $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ в [I, гл.У] были получены простые условия, а именно: пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(x) \in W^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$, у которых $\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ для всех мультииндексов α, удовлетворяющих неравенству

$$[\ell - \nu - \tau] + 1 \leq |\alpha| \leq \ell - 1 \tag{6}$$

(здесь символ $[t]$ означает целую часть числа t, стремление к нулю понимается в смысле [I, гл.У, § I]).

Из (6) следует, в частности, что при $\nu+\tau\leq 1$ пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ и $W^{\ell}_{p,\nu}(R^n)$ совпадают, т.е. при соответствующих значениях параметров p и ν (см. (3)) финитные функции плотны в пространствах

$$W^{\ell}_{p,\nu}(R^n),\ \ell\geq 1$$

(и безусловно плотны в пространствах

$$W^{0}_{p,\nu}(R^n)\equiv L_{p,\nu}(R^n)).$$

Поэтому, чтобы не проверять каждый раз принадлежность рассматриваемых нами функций к замыканию множества финитных элементов, удобно в качестве основной области изменения параметров ν и τ (ν и p) ограничиться множеством

$$\mathcal{M}_0=\{(\nu,\tau)\in R^2\mid 0<\tau<n,\ \ \nu+\tau\leq 1\} \tag{7}$$

(выбор открытой полосы диктуется множеством изменения параметра p_0 в (5)).

Для наглядности рассматривается простейший случай: $n=1,\ \ \ell=k=1$ (см.(5)).

Ставится следующий вопрос: существует ли для данной упорядоченной пары множеств $\langle\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\rangle\subset\mathcal{M}_0\times\mathcal{M}_0$ функция $\varphi(x)\in W^1_{loc}(R)$ с одновременным выполнением равенств

$$\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_0(\varphi),\ \ \mathcal{A}_2=\mathcal{A}_0(\varphi'), \tag{8}$$

где $\varphi'(x)$ - обобщенная производная функции $\varphi(x)\in W^1_{loc}(R)$, множество $\mathcal{A}_0(\psi)$ - сужение области существования весовой нормы $\|\cdot\|_{p,\nu}$ функции $\psi(x)\in L_{loc}(R)$ (см. определение I) на множество

$$\mathcal{M}_0=\{(\nu,\tau)\in R^1\mid 0<\tau<1,\ \nu+\tau\leq 1\}. \tag{7'}$$

Понятно, что равенства (8) могут быть выполнены лишь тогда, когда пара $\langle\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\rangle$ удовлетворяет необходимым условиям, вытекающим из вложений (5).

О п р е д е л е н и е 3. Упорядоченную пару множеств

$$<\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2>, \qquad (9)$$

допустимую вложениями (5) относительно предположения (8), назовем допустимой.

Будем говорить, что функция $\varphi(x) \in W^1_{loc}(R)$ реализует допустимую пару (9), если для нее выполнены равенства (8).

Мы ограничимся здесь рассмотрением множеств $\mathcal{A}_i$ $(i=1,2)$, принадлежащих классу $\mathcal{G}$ некоторого специального вида (см. рис.2).

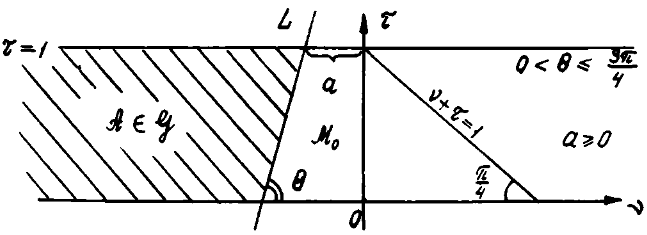

Рис. 2

(Класс $\mathcal{G}$ состоит из множеств $\mathcal{A} \subset M_0$ (см. (7′)), "правой границей" которых является прямая L. Точки прямой L не принадлежат множеству $\mathcal{A}$. Открытое множество $\mathcal{A}$ полностью определяется прямой L и обозначается в дальнейшем через $\mathcal{A}(L)$.)

Определение 4. Прямую L множества $\mathcal{A}(L) \in \mathcal{G}$ (см. рис. 2) будем называть определяющей прямой множества $A(L)$.

Естественность рассмотрения множеств $\mathcal{A}$, "правой границей" которых является прямая L, с углом наклона $0<\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$, следует из результатов [3,4]. Выбор же "открытой" прямой L, т.е. условие $L\cap\mathcal{A}(L)=\emptyset$, позволяет значительно упростить вид множества допустимых пар (9) (см. определение 3) с $\mathcal{A}_i \in \mathcal{G}$. А именно вложения (5) выделяют в $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ допустимый класс $\mathcal{B}$ (см. рис. 3).

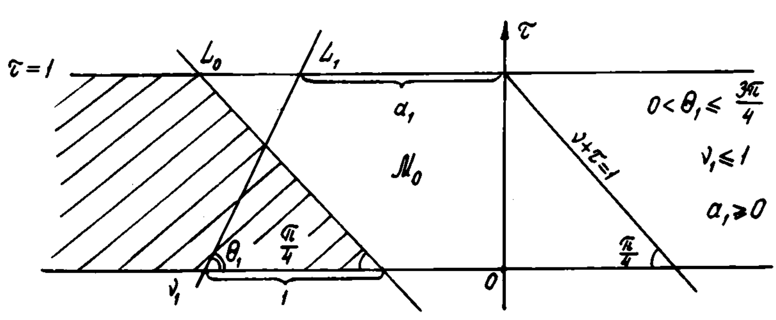

Рис. 3

(Допустимый класс $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}\times\mathcal{G}$ может быть описан следующим образом.)

Если $A_1(L_1)$ - произвольный элемент $\mathcal{G}$ с определяющей прямой L_1 (см. рис. 2 и определение 4), то пара

$$<\mathcal{A}_1(L_1), \mathcal{A}_2(L_2)> \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$$

принадлежит семейству $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{A}_2(L_2) \subset \mathcal{A}(L_0)$$

(см. рис. 3); (при $0 < \nu_1 \leqslant 1$ допустимое положение определяющей прямой L_2 ограничено справа прямой $\{(\nu, \tau) \in R^2 | \ \nu + \tau = 1\}$).)

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что все элементы $<\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2>$ семейства $\mathcal{E}$ действительно являются допустимыми и, наоборот, любая допустимая пара $<\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2> \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ принадлежит классу $\mathcal{E}$.

Мы докажем, что во множестве допустимых пар $\mathcal{E}$ существует довольно большой запас принципиально нереализуемых элементов. Это обстоятельство позволяет назвать необходимые условия на взаимное расположение областей существования весовой нормы $\|\cdot\|_{p,\nu}$ функции $\varphi(x) \in W^{\ell}_{loc}(R^n)$ и модуля ее градиента K-го порядка $(K < \ell)$, вытекающие из вложений (5), недостаточными по существу ("существенно недостаточными").

Теорема I. <u>Пусть $\mathcal{E}$ - семейство допустимых пар из $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ (см. рис. 3). Тогда его подмножество $\mathcal{E}_1$, изображенное на рис. 4, нереализуемо (см. определение 3).</u>

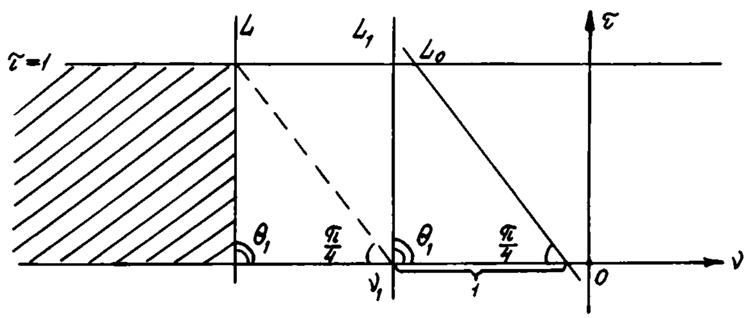

Рис. 4

(Множество $\mathcal{E}_1$ состоит из пар $<\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2> \in \mathcal{E}$, которые могут быть описаны следующим образом:

если $\mathcal{A}_1(L_1)$ - произвольный элемент из $\mathcal{G}$ с $\theta_1 \neq \frac{3\pi}{4}$ (см. рис. 2), то пара $<\mathcal{A}_1(L_1), \mathcal{A}_2(L_2)>$ принадлежит $\mathcal{E}_1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_2(L_2) \not\subset \mathcal{A}(L)$ (см. рис. 4). Прямая L_0 на рис. 4 характеризует (при $\nu_1 \leqslant 0$) мощность семейства $\mathcal{E}_1$ (ср. с рис. 3); (при $0 < \nu_1 \leqslant 1$ множество нереализуемых пар из $\mathcal{E}$ характеризует прямая

$\{(\nu,\tau)\in R^2 \mid \nu+\tau=1\}$)).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим противное. Пусть пара $\langle \mathcal{A}_1(L_1), \mathcal{A}_2(L_2)\rangle \in \mathcal{E}_1$ и функция $\varphi(x)\in W^1_{loc}(R)$ такова, что выполнены равенства (8):

$$\mathcal{A}_0(\varphi)=\mathcal{A}_1(L_1),\ \mathcal{A}_0(\varphi')=\mathcal{A}_2(L_2). \qquad (8')$$

Тогда $\varphi(x)$ принадлежит $C(R)$ - множеству непрерывных на R функций [I, теорема УI.II] $0<\theta_1<\frac{3\pi}{4}$ и

$$\mathcal{A}(L_2)\subset\mathcal{A}(L_0),\quad \mathcal{A}(L_2)\not\subset\mathcal{A}(L)$$

(см. определение 4 и рис. 2,3,4).

Пусть $\ell<0$ таково, что выполнено равенство $tg\,\theta_1=-\frac{1}{1+\ell}$ ($\ell=1$ при $\theta_1=\frac{\pi}{2}$). Через $-\varkappa$ обозначим абсциссу точки пересечения прямой L_1 с осью ν ($\varkappa>-1$).

Тогда прямые L_1, L_2, L и L_0 будут расположены так, как изображено на рис. 5,"а".

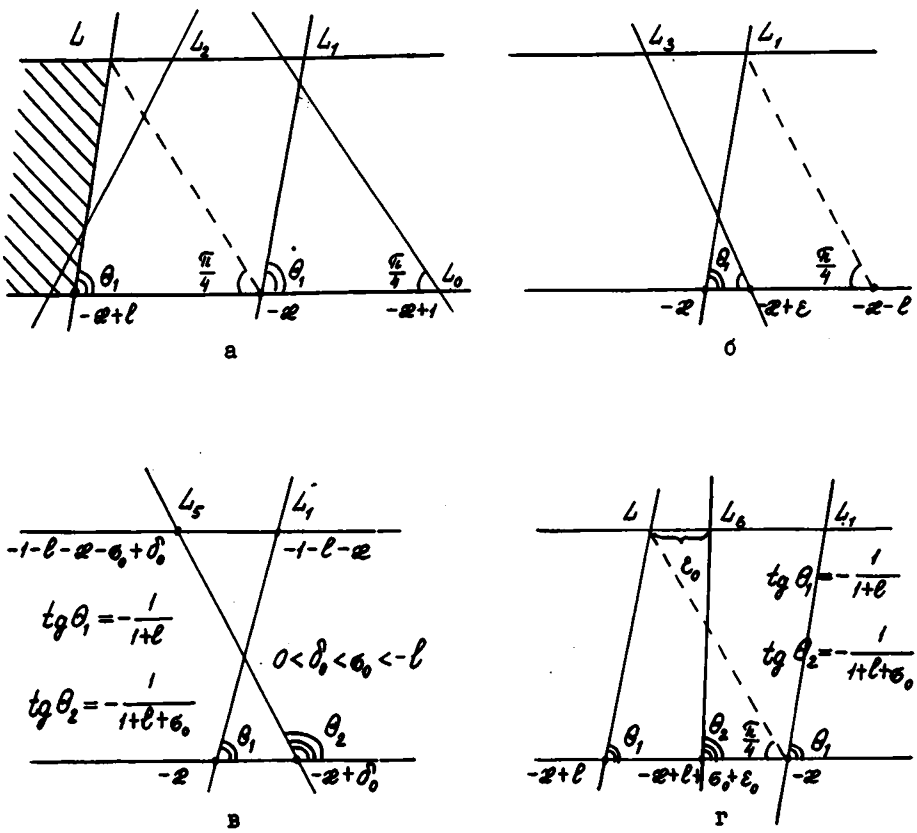

Рис. 5

Положим

$$\mathcal{M}_\kappa = \max_{x\in[\kappa,\kappa+1]} |\varphi(x)|, \quad m_\kappa = \min_{x\in[\kappa,\kappa+1]} |\varphi(x)|, \tag{10}$$

где $\kappa\in Z$ - множества целых чисел.

Пусть, далее, (см.(10) и рис. 5, а)

$$K_\varepsilon = \{\kappa\in Z \mid \mathcal{M}_\kappa > |\kappa|^{æ-\varepsilon}\}, \tag{11}$$

где $\varepsilon>0$.

Множество K_ε неограничено, так как иначе

$$(\|\varphi\|_{p,\nu})^p = \int_R |\varphi(x)|^p\cdot(1+|x|^2)^{\nu p/2}dx =$$

$$=\Big(\sum_{\kappa\in K_\varepsilon} + \sum_{\kappa\in Z\setminus K_\varepsilon}\Big)\int_\kappa^{\kappa+1}|\varphi(x)|^p\cdot(1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}}dx \leqslant$$

$$\leqslant const + \sum_{\kappa\in Z\setminus K_\varepsilon}|\kappa|^{p(æ-\varepsilon)}\cdot\int_\kappa^{\kappa+1}(1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}}dx \sim$$

$$\sim const + \sum_{\kappa\in Z\setminus K_\varepsilon}|\kappa|^{p(æ+\nu-\varepsilon)},$$

откуда следует вложение $\mathcal{A}(L_3)\subset\mathcal{A}_0(\varphi)$ (см. рис. 5,б), что противоречиво; (знаком $\sim$ здесь и далее обозначается эквивалентность рядов в смысле их одновременной сходимости; $\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}$ - дополнение множества $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$) до множества $\mathcal{A}$).

Положим (см.(10),(11) и рис. 5, а)

$$K_{\varepsilon,\delta} = \{\kappa\in K_\varepsilon \mid m_\kappa < |\kappa|^{æ-\delta}\}, \tag{12}$$

где $\delta>0$.

Тогда для каждого $\varepsilon>0$, $0<\delta<-\ell$, множество $K_{\varepsilon,\delta}$ неограничено. Действительно, в противном случае

$$(\|\varphi\|_{p,\nu})^p \geqslant \sum_{\kappa\in K_\varepsilon\setminus K_{\varepsilon,\delta}}\int_\kappa^{\kappa+1}|\varphi(x)|^p\cdot(1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}}dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\kappa\in K_\varepsilon\setminus K_{\varepsilon,\delta}}|\kappa|^{(æ-\delta)p}\int_\kappa^{\kappa+1}(1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}}dx \sim \sum_{\kappa\in K_\varepsilon\setminus K_{\varepsilon,\delta}}|\kappa|^{(æ+\nu-\delta)p},$$

откуда, в силу неограниченности множества индексов $K_\varepsilon\setminus K_{\varepsilon,\delta}$, следует вложение $\mathcal{A}_0(\varphi)\subset\mathcal{A}(L_4)$ (см. рис. 5, б), что противоречиво.

По произвольно заданному σ_0 $(0<\sigma_0<-\ell)$ выберем ε_0 и δ_0

такие, что

$$0< \varepsilon_0 < \delta_0 < \sigma_0 < -\ell. \qquad (13)$$

(Необходимость введения числа σ_0 выяснится позднее.)

Обозначим через X_κ, x_κ точки отрезка $[\kappa, \kappa+1]$, где $\kappa \in K_{\varepsilon_0, \delta_0}$ (см.(11),(12)), для которых выполнены равенства

$$|\varphi(X_\kappa)| = |\kappa|^{\varkappa-\varepsilon_0}, \quad |\varphi(x_\kappa)| = |\kappa|^{\varkappa-\delta_0}, \qquad (14)$$

причем на отрезке $[X_\kappa, x_\kappa]$ выполняется условие

$$|\varphi(x)| \geqslant |\kappa|^{\varkappa-\delta_0}, \qquad (15)$$

где запись $[X_\kappa, x_\kappa]$ означает отрезок

$$[\min(X_\kappa, x_\kappa), \max(X_\kappa, x_\kappa)].$$

Существование чисел X_κ и x_κ следует из (13) и простейших свойств функции, непрерывной на отрезке.

Действительно, из (13) имеем неравенство

$$|\kappa|^{\varkappa-\varepsilon_0} > |\kappa|^{\varkappa-\delta_0} \qquad (16)$$

(числа $\kappa=0$ и $\kappa=\pm 1$ можно не включать во множество индексов $K_{\varepsilon_0, \delta_0}$, так как нас интересует только его неограниченность).

Используя (16),(11),(12) и свойство функции непрерывной на отрезке принимать все промежуточные значения, получаем существование чисел X_κ' и x_κ' $(X_\kappa' \neq x_\kappa')$ с выполнением равенств (14).

Пусть, например, $X_\kappa' < x_\kappa'$. Положим

$$X_\kappa = X_\kappa', \quad x_\kappa = \inf\left\{x \in [X_\kappa', x_\kappa'] \,\middle|\, |\varphi(x)| = |\kappa|^{\varkappa-\delta_0}\right\}$$

(нижняя грань существует, так как соответствующее множество непусто и ограничено).

В силу непрерывности функции $|\varphi(x)|$ и определения нижней грани, имеет место равенство

$$|\varphi(x_\kappa)| = |\kappa|^{\varkappa-\delta_0},$$

откуда числа X_κ и x_κ удовлетворяют (14).

Выполнение условия (15) на отрезке $[X_\kappa, x_\kappa]$ доказывается от противного: применив теорему о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке, получим противоречие с определением числа x_κ.

Случай $X'_\kappa > x'_\kappa$ рассматривается аналогично

$$(X_\kappa = X'_\kappa,\; x_\kappa = \sup\{x \in [x'_\kappa, X'_\kappa] \mid |\varphi(x)| = |\kappa|^{\varkappa - \delta_0}\}).$$

Положим, наконец (см.(I2),(I4),(I5)),

$$K_{\ell_0,\delta_0,\sigma_0} = \{\kappa \in K_{\ell_0,\delta_0} \mid \mu([X_\kappa, x_\kappa]) \le |\kappa|^{\ell+\sigma_0}\}, \tag{I7}$$

где $\sigma_0 > 0$ введено ранее, $\mu(\mathcal{D})$ – мера Лебега множества $\mathcal{D} \subset R$.

Нетрудно убедиться, что множество $K_{\ell_0,\delta_0,\sigma_0}$ неограничено.

Действительно, в противном случае неограничено и множество индексов $K_{\ell_0,\delta_0} \setminus K_{\ell_0,\delta_0,\sigma_0}$ (см. (I3),(I2)), и для его элементов κ выполнены неравенства (см. (I5),(I7)):

$$|\varphi(x)| \ge |\kappa|^{\varkappa-\delta_0},\quad x \in [X_\kappa, x_\kappa],$$
$$\mu([X_\kappa, x_\kappa]) > |\kappa|^{\ell+\sigma_0}. \tag{I8}$$

Используя (I8), получим

$$(\|\varphi\|_{p,\nu})^p \ge \sum_{\kappa \in K_{\ell_0,\delta_0} \setminus K_{\ell_0,\delta_0,\sigma_0}} \int_{[X_\kappa, x_\kappa]} |\varphi(x)|^p \cdot (1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}} dx \ge$$

$$\ge \sum_{\kappa \in K_{\ell_0,\delta_0} \setminus K_{\ell_0,\delta_0,\sigma_0}} |\kappa|^{p(\varkappa-\delta_0)} \int_{[X_\kappa, x_\kappa]} (1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}} dx \sim$$

$$\sim \sum_{\kappa \in K_{\ell_0,\delta_0} \setminus K_{\ell_0,\delta_0,\sigma_0}} |\kappa|^{p(\varkappa+\nu-\delta_0)} \cdot \mu([X_\kappa, x_\kappa]) \ge \sum_{\kappa \in K_{\ell_0,\delta_0} \setminus K_{\ell_0,\delta_0,\sigma_0}} |\kappa|^{p(\varkappa+\nu-\delta_0)+\ell+\sigma_0},$$

откуда, в силу неограниченности множества индексов $K_{\ell_0,\delta_0} \setminus K_{\ell_0,\delta_0,\sigma_0}$, следует вложение

$$\mathcal{A}_0(\varphi) \subset \mathcal{A}(L_s)$$

(см. рис. 5, в), что противоречиво (см. (I3)).

Обозначим через $\psi(x)$ функцию, заданную следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(X_\kappa)-\varphi(x_\kappa)}{X_\kappa - x_\kappa}\cdot x + \dfrac{\varphi(x_\kappa)\cdot X_\kappa - \varphi(X_\kappa)\cdot x_\kappa}{X_\kappa - x_\kappa}; \\ \text{при } x\in[X_\kappa, x_\kappa], \ \kappa\in K_{\varepsilon_0,\delta_0,\sigma_0}; \\ \varphi(x) \ \text{при } x\in R\setminus \bigcup\limits_{\kappa\in K_{\varepsilon_0,\delta_0,\sigma_0}} [X_\kappa, x_\kappa]. \end{cases} \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\psi(x)\in W^1_{loc}(R)\cap C(R)$$

и выполнено вложение

$$\mathcal{A}_0(\varphi') \subset \mathcal{A}_0(\psi'). \tag{20}$$

Используя (14),(17) и (19), имеем

$$\left(\|\psi'\|_{p,\nu}\right)^p = \int\limits_R |\psi'(x)|^p\cdot(1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}}dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\kappa\in K_{\varepsilon_0,\delta_0,\sigma_0}} \int\limits_{[X_\kappa,x_\kappa]} |\psi'(x)|^p\cdot(1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}}dx =$$

$$= \sum_{\kappa\in K_{\varepsilon_0,\delta_0,\sigma_0}} \int\limits_{[X_\kappa,x_\kappa]} \left|\frac{\varphi(X_\kappa)-\varphi(x_\kappa)}{X_\kappa-x_\kappa}\right|^p\cdot(1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}}dx =$$

$$= \sum_{\kappa\in K_{\varepsilon_0,\delta_0,\sigma_0}} |\varphi(X_\kappa)-\varphi(x_\kappa)|^p\cdot\left(\mu([X_\kappa,x_\kappa])\right)^{-p}\cdot\int\limits_{[X_\kappa,x_\kappa]}(1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}}dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\kappa\in K_{\varepsilon_0,\delta_0,\sigma_0}} \left(|\kappa|^{\varkappa-\varepsilon_0}-|\kappa|^{\varkappa-\delta_0}\right)^p\cdot\left(|\kappa|^{\ell+\sigma_0}\right)^{1-p}\cdot\min_{x\in[X_\kappa,x_\kappa]}(1+|x|^2)^{\frac{\nu p}{2}} \sim$$

$$\sim \sum_{\kappa\in K_{\varepsilon_0,\delta_0,\sigma_0}} |\kappa|^{(\varkappa-\varepsilon_0+\nu-\ell-\sigma_0)p+\ell+\sigma_0}. \tag{21}$$

Из (21), в силу неограниченности множества индексов $K_{\varepsilon_0,\delta_0,\sigma_0}$ (см. (17)), получаем вложение $\mathcal{A}_0(\psi')=\mathcal{A}(L_6)$ (см. рис. 5, г), откуда, принимая во внимание (20), следует вложение

$$\mathcal{A}_0(\varphi') \subset \mathcal{A}(L_6). \tag{22}$$

Воспользовавшись теперь произвольной малостью чисел σ_0 и ε_0 (см. (13)), получим (см. (22) и рис. 5, г), $\mathcal{A}_0(\varphi')=\mathcal{A}_2(L_2)\subset\mathcal{A}(L)$, что противоречит нашему предположению (см. рис. 5, а).

Таким образом, равенства (8′) не могут быть выполнены, что доказывает нереализуемость семейства $\mathcal{E}_1$.

Приложение результата теоремы I к улучшению вложений (5) на некоторых классах функций приведено в [6 , 7] .

Т е о р е м а 2 . Пусть $\mathfrak{G}$ – семейство допустимых пар из $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ (см. рис. 3), $\mathfrak{G}_1$ – подмножество $\mathfrak{G}$, определенное выше (см. рис. 4), $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}_1$ – дополнение множества $\mathfrak{G}_1$ до семейства $\mathfrak{G}$.

Тогда все элементы множества $\mathfrak{G}_2$ реализуемы (см. определение 3).

Реализация элементов семейства $\mathfrak{G}_2$ конкретными функциями из $W^1_{loc}(R)$ приведена в [8] .

Л и т е р а т у р а

I. С о б о л е в С . Л . Введение в теорию кубатурных формул.– М., Наука, I974.– 808 с.

2. С о б о л е в С . Л . Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд.-во Ленинградского университета, I950.– – 255 с.

3. З а р у б и н М . М . Построение функции, имеющей заданную область существования весовой нормы.– В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева), Новосибирск, I977, № I, с. 50–70.

4. З а р у б и н М . М . О неулучшаемости вложений одного класса пространств с весовой нормой.– Новосибирск, Б.и., I977.– I4 с.– (Препринт ИМ СО АН СССР).

5. З а р у б и н М . М . Вложения весовых L_p – пространств со степенным весом в анизотропном случае.– В кн.: Материалы Всесоюзной научной студ. конференции "Студент и научно-технический прогресс". Сер. мат., Новосибирск, I978, с. 9–I6.

6. З а р у б и н М . М . Вложения пространств $\overset{\circ}{W}{}^{\ell}_{p,\nu}(R)$ при некоторых предположениях относительно областей существования весовой нормы градиентов низших порядков.– В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, Наука (Сибирское отделение), I980, с. I95–I99.

7. З а р у б и н М . М . Вопросы неулучшаемости вложений пространств С.Л. Соболева со степенным весом: Автореферат дис. на соиск. уч. степ. физ.-мат. наук (0I.0I.0I). – Новосибирск. Б.и., I98I.– I8 с.

8. З а р у б и н М . М . Построение функции, имеющей вместе со своей обобщенной производной, заданные области существования весовой нормы.– Деп. ВИНИТИ № 5565-83 Деп.– 43 с.