УДК 517.5; 517.392; 518

КЛАССЫ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В. Л. Васкевич (Новосибирск)

§ 1. Введение

Цель данной статьи - дать теоретическое объяснение одного интересного эффекта, известного из практики вычислений определенных интегралов. Именно, если подынтегральная функция является бесконечно дифференцируемой, то алгебраический порядок точности формулы приближенного интегрирования часто имеет смысл увеличивать лишь до определенного конечного "порога", не совпадающего, как правило, с максимально допустимым значением алгебраического порядка.

В работе рассмотрена следующая конкретная модель ситуации подобного типа. Интеграл берется по конечному отрезку $[0,1]$. Подынтегральная функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $\mathcal{H}(\varkappa, A, \lambda)$ или $\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda)$, т.е. $\varphi(x)$ - бесконечно дифференцируемая функция и последовательность интегральных норм ее производных имеет заданный рост при неограниченном увеличении порядка дифференцирования. Для приближения интеграла используются квадратурные формулы с фиксированным шагом сетки h и меняющимся алгебраическим порядком точности m. При заданных h и m рассматриваемая квадратурная формула строится по одному из известных правил: это либо формула Грегори, либо Эйлера-Маклорена, либо специальная формула с регулярным пограничным слоем. Конечный результат: доказано, что при фиксированном h среди функционалов погрешности рассматриваемых квадратур существует функционал с наименьшей нормой, имеющий алгебраический порядок точности $m_0(h)$, который, как правило, не совпадает с максимально допустимым. Найдено асимптотически точное выражение "порога" насыщения $m_0(h)$ и нормы соответствующего функционала погрешности в виде функции от h и параметров класса $\varkappa$, A, λ. Точные математические формулировки этих результатов будут приведены в § 4.

В § 2,3 излагаются два важных промежуточных результата, благодаря которым, собственно, и удается получить окончательный ответ. Первый из них - построение ортонормированного базиса пространства $\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda)$. Второй - явные формулы для коэффициентов Фурье рассматриваемых функционалов погрешности, асимптотически точные при $m \to \infty$ и $h \to 0$.

Отметим в заключение, что настоящая работа является, по существу, продолжением исследований академика С.Л. Соболева, начатых им в [I, 2].

§ 2. Пространства бесконечно дифференцируемых функций

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ вещественной прямой R бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$ со значениями в комплексной плоскости. Говорят (см. [I]), что φ принадлежит классу $\mathcal{H}(\varkappa, A, \lambda)$, если справедлива следующая система неравенств:

$$(\varphi)_m \equiv \left(\int_0^1 |\mathcal{D}^m \varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C_1 m^{\varkappa m} A^m m^\lambda, \quad m \geqslant 1, \tag{I}$$

где $\varkappa > 0$, $A > 0$, $\lambda \in R$, C_1 не зависит от m. Нам удобнее будет задавать классы $\mathcal{H}(\varkappa, A, \lambda)$ немного по-другому, а именно:

$$\left.\begin{aligned} &(\varphi)_m \leqslant C_2 a_m, \qquad m \geqslant 0, \\ \text{где} \quad &a_0 = 1, \quad a_m = L^m [(m-1)!]^\varkappa m^\mu; \\ &L = Ae^\varkappa, \quad \mu = \lambda + 0.5\varkappa. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

То, что эти две системы неравенств эквивалентны друг другу, легко следует из формулы Стирлинга для факториала.

Если зафиксировать параметр $\varkappa > 0$ и образовать объединение семейства $\mathcal{H}(\varkappa, A, \lambda)$ по всем $A > 0$, $\lambda \in R$, то в результате получится множество, известное (см. [3]) как класс функций Жевре с показателем $\varkappa$ и обозначаемое символом $G_\varkappa(0,1)$, т.е., по определению,

$$G_\varkappa(0,1) = \bigcup_{A>0,\, \lambda \in R} \mathcal{H}(\varkappa, A, \lambda). \tag{3}$$

Каждый класс $\mathcal{H}(\varkappa, A, \lambda)$ есть, очевидно, векторное пространство, и при этом на нем можно ввести норму

$$[\varphi]_\varkappa = \sup_{m \geqslant 0} \frac{(\varphi)_m}{a_m},$$

причем по этой норме $\mathcal{H}(\varkappa, A, \lambda)$ является полным. Таким образом, равенство (3) по сути означает, что класс $G_{\varkappa}(0,1)$ есть объединение некоторого семейства банаховых пространств.

Оказывается, что при рассмотрении некоторых вопросов класс $G_{\varkappa}(0,1)$ удобней представлять в виде объединения семейства гильбертовых пространств $\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda)$:

$$G_{\varkappa}(0,1) = \bigcup_{A>0,\lambda\in R} \overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda).$$

Пространство $\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ строится следующим образом:

$$\overline{\mathcal{H}}(\varkappa,A,\lambda) = \left\{\varphi\in C^{\infty}[0,1] : \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\varphi)_{\alpha}^{2}}{a_{\alpha}^{2}} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\left|\mathcal{D}^{\alpha}\varphi\big|_0^1\right|^2}{b_{\alpha}^{2}} < +\infty\right\}, \tag{4}$$

где

$$a_{\alpha} \equiv L^{\alpha}\left[(\alpha-1)!\right]^{\varkappa}\alpha^{\mu_1}; \quad b_{\alpha} \equiv L^{\alpha}\left[(\alpha-1)!\right]^{\varkappa}\alpha^{\mu_2};$$

$$\mu_1-\lambda>1; \quad \mu_2-\lambda=1.5\varkappa+1; \quad \mu_1-\mu_2>1+\mu_0;$$

$$\mu_0=\mu_0(\varkappa)=0.5\max\left\{1-\varkappa;\ \frac{1}{2\varkappa}+2\varkappa\left[\frac{1}{2\varkappa}\right]\right\}>0.$$

Заметим, что соотношения типа (4) часто используются для задания классов бесконечно дифференцируемых функций. Если, например, убрать из (4) слагаемое, включающее в себя приращения $\mathcal{D}^{\alpha}\varphi\big|_0^1=\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(1)-\mathcal{D}^{\alpha}\varphi(0)$, то получится класс, известный как пространство Соболева бесконечного порядка (см., например, [4]).

Скалярное произведение в $\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ задается равенством

$$\langle\varphi,\psi\rangle_1 = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{a_{\alpha}^{2}}\int_0^1 \mathcal{D}^{\alpha}\varphi\overline{\mathcal{D}^{\alpha}\psi}\,dx + \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{b_{\alpha}^{2}}\left(\mathcal{D}^{\alpha}\varphi\big|_0^1\right)\left(\overline{\mathcal{D}^{\alpha}\psi\big|_0^1}\right).$$

Соответствующую этому произведению норму обозначим через $\langle\cdot\rangle_1$. Очевидны следующие вложения:

$$\overline{\mathcal{H}}(\varkappa,A,\lambda_1)\subset\mathcal{H}(\varkappa,A,\lambda)\subset\overline{\mathcal{H}}(\varkappa,A,\lambda),$$

где $\lambda_1=\lambda-\varkappa-2-\mu_0$, $\mu_0=\mu_0(\varkappa)>0$.

Для исследования свойств пространства $\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ построим в нем ортогональный базис. С этой целью разложим $\mathcal{H}(x, A, \lambda)$ в прямую сумму двух взаимно-ортогональных подпространств:

$$\widetilde{\mathcal{H}}(x, A, \lambda) = \{\varphi \in \overline{\mathcal{H}}(x, A, \lambda) : \mathcal{D}^{\alpha}\varphi\big|_0^1 = 0, \ \forall \alpha \geq 0\},$$

$$\widetilde{\mathcal{H}}^{\perp}(x, A, \lambda) = \{\varphi \in \overline{\mathcal{H}}(x, A, \lambda) : \langle \varphi, e^{-i2\pi\beta x} \rangle_1 = 0, \ \forall \beta \in Z\}.$$

Естественный базис $\widetilde{\mathcal{H}}(x, A, \lambda)$ образуют функции вида $e^{-i2\pi\beta x}$, $\beta \in Z$, Z — здесь и далее множество целых чисел. Базис $\widetilde{\mathcal{H}}^{\perp}(x, A, \lambda)$ можно построить следующим образом. Заметим, что при любом целом $\alpha \geq 0$ полином Бернулли степени $\alpha+1$ принадлежит $\overline{\mathcal{H}}(x, A, \lambda)$. Поэтому существует его проекция на любое замкнутое подпространство, в частности, на $\widetilde{\mathcal{H}}^{\perp}(x, A, \lambda)$. Обозначим эту проекцию через $(\alpha+1)!\,\varphi_\alpha(x)$. Совокупность всех $\varphi_\alpha(x)$ при $\alpha \geq 0$ образует базис $\widetilde{\mathcal{H}}^{\perp}(x, A, \lambda)$. Заметим, что не все функции $\varphi_\alpha(x)$ ортогональны между собой в смысле $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Однако этот базис становится ортогональным, если ввести новое скалярное произведение по формуле

$$\langle \varphi, \psi \rangle_2 = \langle \varphi, \psi \rangle_1 - \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} A_{\alpha\beta} \left(\mathcal{D}^{\alpha}\varphi\big|_0^1\right)\left(\overline{\mathcal{D}^{\alpha}\psi\big|_0^1}\right),$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{a_K^2} \int_0^1 \mathcal{D}^K \varphi_\alpha(x) \overline{\mathcal{D}^K \varphi_\beta}(x)\, dx.$$

При этом порождаемая этим произведением норма $\langle \cdot \rangle_2$ оказывается эквивалентной норме $\langle \cdot \rangle_1$, и тем самым пространство $\overline{\mathcal{H}}(x, A, \lambda)$ является гильбертовым со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Функции множества

$$\{e^{-i2\pi\beta x} \mid \beta \in Z\} \cup \{\varphi_\alpha(x) \mid \alpha \geq 0\}$$

образуют в нем ортогональный базис, а множество $\mathcal{H}(x, A, \lambda)$ плотно в $\overline{\mathcal{H}}(x, A, \lambda)$ по норме $\langle \cdot \rangle_2$. Используя общие свойства гильбертовых пространств, можно доказать, что справедлива

Теорема I. <u>Функция $\varphi(x)$ принадлежит $\overline{\mathcal{H}}(x, A, \lambda)$ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде</u>

$$\varphi(x) = \sum_{\beta \in Z} h[\beta]\, e^{-i2\pi\beta x} + \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha \varphi_\alpha(x), \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\beta\in Z}|h[\beta]|^2 A_0[\beta]+\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{c_\alpha}{b_\alpha}\right)^2<+\infty,\\
&A_0[\beta]=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{(2\pi\beta)^{2\alpha}}{a_\alpha^2};\quad a_\alpha=L^\alpha[(\alpha-1)!]^{x}\alpha^{\mu_1},\\
&b_\alpha=L^\alpha[(\alpha-1)!]^{x}\alpha^{\mu_2};\quad L=Ae^{x};\quad \mu_2=\lambda+1.5x+1.
\end{aligned}\right\}\quad (6)$$

З а м е ч а н и е . Если ряд (5) соответствует функции $\varphi(x)$ из $\bar{\mathcal{H}}(x,A,\lambda)$, то его коэффициенты определяются из соотношений

$$h[\beta]=A_0^{-1}[\beta]\times\langle\varphi,e^{-i2\pi\beta x}\rangle_1,\quad \forall\beta\in Z,$$

$$c_\alpha=\mathcal{D}^\alpha\varphi\Big|_0^1=\mathcal{D}^\alpha\varphi(1)-\mathcal{D}^\alpha\varphi(0)\quad \forall\alpha\geqslant 0.$$

Приведем еще явное представление функции $\varphi_\alpha(x)$. Имеет место

$$\varphi_\alpha(x)=\sum_{\beta\in Z}\frac{(-1)^\alpha}{(i2\pi\beta)^{\alpha+1}}\frac{A_{\alpha+1}[\beta]}{A_0[\beta]}e^{-i2\pi\beta x}. \tag{7}$$

Здесь $A_0[\beta]$ определена в (6),

$$A_{K+1}[\beta]=\sum_{\alpha=K+1}^{\infty}\frac{(2\pi\beta)^{2\alpha}}{a_\alpha^2}.$$

В заключение этого параграфа заметим, что для подробного доказательства содержащихся в нем утверждений необходимо провести довольно громоздкие выкладки, которые здесь не приводятся. При желании их можно найти в [5] или в [6].

§ 3. Асимптотические формулы для коэффициентов Фурье функционалов погрешности

В этом параграфе мы будем иметь дело с функционалами погрешности (ф.п.) квадратурных формул (к.ф.) следующего вида:

$$(\ell_m,\varphi)=\int_0^1\varphi(x)dx-\sum_{\alpha=0}^{N}c_\alpha\varphi(\alpha h)+\sum_{K=0}^{m-1}A_K\left(\mathcal{D}^K\varphi\Big|_0^1\right), \tag{8}$$

где m, N - натуральные, $Nh=1$;

$$\{C_\alpha\}_{\alpha=0}^{N} \quad \text{и} \quad \{A_K\}_{K=0}^{m-1} \quad -$$

наборы вещественных чисел. Индекс m в записи ф.п. ℓ_m означает, что

$$(\ell_m, x^\alpha) = 0 \text{ при } \alpha = \overline{0, m-1}; \quad (\ell_m, x^m) \neq 0. \tag{9}$$

Нас будет интересовать поведение последовательности коэффициентов Фурье ф.п. ℓ_m, т.е. поведение чисел

$$L_\beta^m = (\ell_m(x), e^{-i2\pi\beta x}). \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что (10) определяет периодическую функцию дискретного переменного $\beta \neq 0$ с периодом N, которая обращается в нуль при $\beta = 0$ и в -1 при β, кратном N. Пользоваться коэффициентами Фурье для характеризации свойств к.ф. с ф.п. (8) гораздо удобнее, нежели коэффициентами $\{C_\alpha\}_{\alpha=0}^{N}$ и $\{A_\alpha\}_{\alpha=1}^{m-1}$. Например, норма ф.п. во многих пространствах очень просто выражается через L_β^m и гораздо более сложно через $\{C_\alpha\}_{\alpha=1}^{N}$ и $\{A_\alpha\}_{\alpha=1}^{m-1}$. Видимо, впервые этот факт использовал С.Л. Соболев [7, лекция 14] для исследования свойств кубатурных формул на пространствах периодических функций. Далее, в [8] и [9] приведены формулы, представляющие через коэффициенты Фурье норму ф.п. в некоторых пространствах непериодических функций. При этом, однако, авторы исследовали вопрос о поведении L_β^m при фиксированном значении m и неограниченном возрастании N. Мы же приведем здесь формулы коэффициентов Фурье для нескольких последовательностей ф.п., позволяющие судить о поведении L_β^m, когда m и N стремятся к бесконечности независимо друг от друга.

Первая рассматриваемая здесь последовательность к.ф. - это формулы Эйлера-Маклорена. Им соответствуют ф.п. ℓ_m^{EM} вида:

$$(\ell_m^{EM}, \varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x)dx - T_N(\varphi) + \sum_{K=1}^{\nu-1} \frac{B_{2K}}{(2K)!} h^{2K} (\mathcal{D}^{2K-1}\varphi|_0^1),$$

где

$$T_N(\varphi) = 0.5h[\varphi(0) + \varphi(1)] + \sum_{\alpha=1}^{N-1} h\varphi(\alpha h),$$

B_{2K} - число Бернулли с номером $2K$; N, m, ν - целые,

$Nh=1, m=2\nu$. В этом случае формулы для коэффициентов Фурье легко получить непосредственным вычислением

$$\left(\ell_m^{EM}(x), e^{-i2\pi\beta x}\right) = \begin{cases} -1, & \text{если } \beta = \kappa N; \quad \kappa \text{ - целое} \neq 0, \\ 0 & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Вторая рассматриваемая здесь последовательность - это формулы Грегори, ф.п. ℓ_m^G которых принято записывать в виде (см. [10]):

$$(\ell_m^G, \varphi(x)) = \int_0^1 \varphi(x)dx - T_N(\varphi) + \sum_{\alpha=1}^{m-2} a_\alpha h \left[\Delta^\alpha \varphi_{N-\alpha} + (-1)^\alpha \Delta^\alpha \varphi_0\right],$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{где } \Delta^\alpha \varphi_\kappa = \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-j} \binom{\alpha}{j} \varphi(\kappa h + jh), \quad m \text{ - четное;} \\ &a_\alpha = \frac{(-1)^\alpha}{(\alpha+1)!} \int_0^1 t^{(\alpha+1)} dt; \quad t^{(\alpha+1)} = t(t-1)\dots(t-\alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Для коэффициентов Фурье ф.п. ℓ_m^G справедливо представление

$$(\ell_m^G(x), e^{-i2\pi\beta x}) = h(-1)^{\frac{m}{2}+1} 2^m (\sin \pi\beta h)^{m-1} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{t^{(m)}}{m!} dt \left[\sin(m-3)\pi\beta h + \Lambda(m,\beta,h)\right]. \qquad (12)$$

Здесь $|\Lambda(m,\beta,h)| \leq C/\sqrt{m}$, C не зависит от $m, \beta, h; \beta \neq \kappa N$.

Известное автору доказательство этой формулы довольно громоздко, и поэтому здесь не приводится. Его основные идеи изложены в [11] и [12] , подробное изложение есть в [6] .

С л е д с т в и е 1. Запишем формулу Грегори (11) в виде (8). Тогда при достаточно больших m среди коэффициентов C_α есть как положительные, так и отрицательные числа, причем

$$1 + \sum_{\alpha=0}^{N} |C_\alpha| > 2^{m-1} \left| \int_0^1 \frac{t^{(m)}}{m!} dt \right| h. \qquad (13)$$

Неравенство (13) легко получается из следующей оценки, справедливой для любого целого β :

$$1 + \sum_{\alpha=0}^{N} |C_\alpha| = \|\ell_m^G | C^*[0,1]\| > |(\ell_m^G, e^{-i2\pi\beta x})|. \qquad (14)$$

Возьмем здесь $\beta = N/2$, тогда из (I2) при достаточно большом m (по условию, m - четное !) получим

$$\left|\left(\ell_m^G, e^{-i2\pi\frac{N}{2}x}\right)\right| \geq h 2^{m-1} \left|\int_0^1 \frac{t^{(m)}}{m!} dt\right| .$$

Отсюда и из (I4) получаем (I3). Следствие доказано.

Третья и последняя последовательность к.ф., рассматриваемая здесь, - это специальная последовательность к.ф. с регулярным пограничным слоем. Процедура построения этих формул такова. Разобьем отрезок [0,I] числовой прямой на N равных частей $(N = 1/h)$ и занумеруем эти части слева направо параметром α, $0 \leq \alpha \leq N-1$. Для всякого фиксированного номера α_0 определим два множества:

$$M(\alpha_0, m) = \{\alpha : 0 \leq \alpha \leq N ; \ |\alpha - \alpha_0| < m\},$$

$$U_m(\alpha_0) = \{\alpha h : \alpha \in M(\alpha_0, m)\},$$

где $m \leq 0.5N$. Пусть теперь на [0,I] есть непрерывная функция $f(x)$. Тогда построим для всякого α_0 такого, что $0 \leq \alpha_0 \leq N-1$, интерполяционный полином Лагранжа $P_{\alpha_0,f}(x)$ с узлами в точках множества $U_m(\alpha_0)$ и с условием, что

$$P_{\alpha_0,f}(\alpha h) = f(\alpha h) \qquad \forall \alpha \in M(\alpha_0, m).$$

Теперь определим специальный лагранжев сплайн, приближающий $f(x)$ на отрезке [0,I] . Именно положим

$$f(x) \approx L^m_{N,f}(x) = P_{\alpha_0,f}(x), \qquad \begin{array}{l} \alpha_0 h \leq x \leq (\alpha_0+1)h, \\ 0 \leq \alpha_0 \leq N-1. \end{array}$$

Проинтегрировав это равенство, получим искомую к.ф. вида

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 L^m_{N,f}(x)dx = \sum_{\alpha=0}^{N} c_\alpha(m) h f(\alpha h), \tag{I5}$$

где коэффициенты $c_\alpha(m)$ не зависят от h и при α из $[2m, N-2m]$ справедливо $c_\alpha(m) = 1$. Заметим, что по данному $m \leq 0.5N$ можно построить несколько к.ф. с регулярным пограничным слоем алгебраического порядка точности $(m+1)$ и формула (I5) - лишь одна из них.

Здесь необходимо сделать одно замечание о терминологии, примененной к формуле (I5). Процедура построения формул такого типа разработана С.Л. Соболевым [2], им же предложен термин "регулярный пограничный слой" (см. [I3]). Впоследствии появился ряд работ, в которых рассматривались "последовательности кубатурных формул с регулярным пограничным слоем" и "с ослабленно регулярным пограничным слоем" (см., например, [8] и [9]). При этом под "последовательностью" понимается не просто счетная совокупность введенных ранее объектов, но совокупность с некоторым дополнительным условием асимптотического типа. Именно предполагается, что алгебраический порядок точности функционала погрешности из последовательности ограничен сверху, когда шаг h решетки интегрирования стремится к нулю. Для последовательности такого типа С.Л. Соболев употребляет термин "множество кубатурных формул с равномерно регулярным пограничным слоем" (см.[I3, с.92]). Автор настоящей работы использует термин "последовательность к.ф. с регулярным пограничным слоем" в его первоначальном смысле (см. [2, I3]).

Имеет место следующая формула для коэффициентов Фурье ф.п. ℓ_{m+1}^{RBL} к.ф. (I5):

$$(\ell_{m+1}^{RBL}(x), e^{-i2\pi\beta x}) = h(-1)^{m+1} i^{m+2} 2^{m+2} (\sin \pi\beta h)^{m+2} \times$$

$$\times e^{-i\pi\beta h(m-1)} \int_0^1 \frac{t^{(m+1)}}{(m+1)!} dt \left[1 + L(m,\beta,h)\right], \qquad (I6)$$

где $|L(m,\beta,h)| \leqslant C/\sqrt{m}$, C не зависит от m, β, h.

Основная идея доказательства формулы (I6) изложена в [I2], а детальный вывод имеется в [6].

Пользуясь формулой (I6), несложно доказать, что коэффициенты $C_\alpha h$ к.ф. (I5) удовлетворяют оценке (I3), если только m достаточно велико. В качестве еще одного применения (I6) приведем формулу для нормы ф.п. ℓ_m^{RBL} в пространстве $L_2^{-m}[0,1]$:

$$\| \ell_m^{RBL} | L_2^{-m}[0,1] \|^2 = h^{2m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{(2\pi\beta)^{2m}} +$$

$$+ h^{2m+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2m} dx \left| \int_0^1 \frac{t^{(m)}}{m!} dx \right|^2 (1 + R(m,N)), \qquad (I7)$$

где $|R(m,N)| \leqslant C/\sqrt{m}$, C не зависит от m, N. Равенство (I7) уточняет представление нормы ℓ_m^{RBL}, приведенное в [12]. Схема доказательства (17) с использованием (16) изложена в [12]. При этом надо еще воспользоваться статьей [14]. Подробная реализация этого плана имеется в [6].

§ 4. Экстремальная задача в пространстве $\mathcal{H}(x,A,\lambda)$

Результаты, полученные в двух предыдущих параграфах, эффективно используются в решении одной экстремальной задачи теории квадратурных формул. Чтобы сформулировать ее, рассмотрим последовательность функционалов погрешности

$$(\ell_m,\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\alpha=0}^{N} c_\alpha \varphi(\alpha h) + \sum_{\alpha=1}^{m-1} A_\alpha \left(\mathcal{D}^\alpha \varphi \Big|_0^1\right); \quad m \in M(N)$$

Здесь N - целое, $Nh=1$; m - алгебраический порядок точности; $M(N)$ - допустимое множество изменения параметра m. Общепринято характеризовать качество сходимости квадратурной формулы величиной нормы соответствующего функционала погрешности в сопряженном пространстве (см. [2, 15]). Следуя этому подходу, сопоставим ℓ_m число

$$\| \ell_m | \mathcal{H}^*(x,A,\lambda)\| \equiv \|\ell_m|\mathcal{H}^*\| = \sup_{\varphi\neq 0} \frac{|(\ell_m,\varphi)|}{[\varphi]_{\mathcal{H}}} .$$

Поставим теперь общую экстремальную задачу: исследовать на минимум последовательность норм $\{\|\ell_m|\mathcal{H}^*\| : m\in M(N)\}$, и если таковой существует, то найти соответствующий ему номер, а также оценить его величину, т.е. число

$$V(N) = \inf\{\|\ell_m|\mathcal{H}^*\| : m\in M(N)\}.$$

Автор рассмотрел частные реализации этой общей экстремальной задачи в следующих трех случаях:

1) Последовательность состоит из функционалов погрешности ℓ_m^{EM}, соответствующих к.ф. Эйлера-Маклорена. При этом множество $M(N)$ состоит из всех четных чисел.

2) Последовательность состоит из функционалов погрешности ℓ_m^{G}, соответствующих к.ф. Грегори. При этом $M(N)$ состоит из всех четных чисел, не превышающих N .

3) Последовательность состоит из функционалов погрешности ℓ_m^{RBL} с регулярным пограничным слоем, построенных в предыдущем параграфе. При

этом $M(\mathcal{N})$ состоит из всех натуральных чисел, не превышающих $\mathcal{N}/2$.

Решение поставленной экстремальной задачи в применении к этим трем сериям квадратурных формул содержится в следующих теоремах.

Т е о р е м а   2 . Пусть ℓ_m^{EM} - функционал погрешности из серии I). Тогда при фиксированном h в последовательности норм $\{\|\ell_m|\mathcal{H}^*(\varkappa,A,\lambda)\|: m\in M(\mathcal{N})\}$ существует наименьшее число с номером $m^\circ(\mathcal{N})$, который естественно назвать оптимальным алгебраическим порядком точности для серии I). Сходимость соответствующего оптимального квадратурного процесса характеризуется оценкой

$$C_0\mathcal{N}^{\gamma_0}e^{-s\mathcal{N}^{1/\varkappa}}\leq V(\mathcal{N})\leq\|\ell_{m^\circ(\mathcal{N})}|\mathcal{H}^*(\varkappa,A,\lambda)\|\leq C_1\mathcal{N}^{\gamma_1}e^{-s\mathcal{N}^{1/\varkappa}},$$

где $s=\frac{\varkappa}{e}\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{1/\varkappa}>0$; $C_0, C_1, \gamma_0, \gamma_1$ не зависят от $\mathcal{N}$. Функция $m^\circ(\mathcal{N})$ имеет следующую асимптотику:

$$m^\circ(\mathcal{N})\Big/\left(\frac{s}{\varkappa}\mathcal{N}^{1/\varkappa}\right)\longrightarrow 1 \quad \text{при } \mathcal{N}\to\infty .$$

З а м е ч а н и е I. Последовательность норм $\{\|\ell_m|\mathcal{H}^*(\varkappa,A,\lambda)\|\}$ стремится к ∞ при $m\to\infty$. Количественно ее рост характеризуется оценкой

$$\|\ell_m|\mathcal{H}^*(\varkappa,A,\lambda)\|\geq C\left(\frac{Lh}{2\pi}\right)^m\left[(m-1)!\right]^{\varkappa}m^{\gamma}\mathcal{N}^{2-1/\varkappa},$$

где $m>m^\circ(\mathcal{N})$; C, γ не зависят от m , $\mathcal{N}$.

З а м е ч а н и е 2. При любом α из $(0, 1/2)$ имеет место оценка

$$\left|m^\circ(\mathcal{N})\Big/\left(\frac{s}{\varkappa}\mathcal{N}^{1/\varkappa}\right)-1\right|\leq C_\alpha\mathcal{N}^{-\frac{\alpha}{\varkappa}},$$

где C_α не зависит от $\mathcal{N}$.

Т е о р е м а   3 . Пусть $\varkappa=1$, $\sqrt{3}Ae\geq 2$ или $\varkappa>1$; e_m^G - функционал погрешности из серии 2). Тогда существуют положительные постоянные C_0, C_1 такие, что для любого $\mathcal{N}\geq 1$ имеет место оценка

$$C_0\mathcal{N}^{\gamma_0}e^{-s(\mathcal{N}/6)^{1/\varkappa}}\leq V(\mathcal{N})\leq$$

$$\leq \| \ell_{m_0(N)} | \mathcal{H}^*(\varkappa, A, \lambda) \| \leq C_1 N^{\gamma_1} e^{-s\left(\frac{N}{6}\right)^{1/\varkappa}}, \tag{18}$$

где $m_0(N)$ - ближайшее к величине $\frac{s}{\varkappa}\frac{6}{\sqrt{3}\pi}\left(\frac{N}{6}\right)^{1/\varkappa} > 0$ четное число, γ_0, γ_1 - постоянные, не зависящие от N. Если ℓ_m^{RBL} - функционал погрешности из серии 3), то в предположении ($\varkappa=1$, $\sqrt{3}Ae \geq 4$ или $\varkappa > 1$) имеет место (18).

Теорема 4. Пусть $\varkappa=1$, $\sqrt{3}Ae < 4$; ℓ_m^{RBL} - функционал погрешности из серии 3). Тогда существуют положительные постоянные C_0, C_1 такие, что для любого $N \geq 1$ имеет место оценка

$$C_0 e^{-s_1 N} N^{\gamma_0} \leq V(N) \leq \| \ell_{\left[\frac{N}{2}\right]+1} | \mathcal{H}^*(\varkappa, A, \lambda) \| \leq C_1 N^{\gamma_1} e^{-s_1 N},$$

где $S_1 = \frac{2}{eA} \operatorname{arctg} \frac{eA}{4} - \frac{1}{2} \ln \left(2 \operatorname{arctg} \frac{eA}{4}\right) > 0$; γ_0, γ_1

не зависят от N.

Доказательства теорем 2-4 проводятся по одинаковой схеме, в которой выделяются следующие три основных момента:

Во-первых, нужно получить верхнюю и нижнюю оценки нормы ф.п. ℓ_m в пространстве $\mathcal{H}(\varkappa, A, \lambda)$ через нормы ℓ_m в пространствах $\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda_1)$ и $\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda)$. Это легко сделать, если воспользоваться двусторонним вложением

$$\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda_1) \subset \mathcal{H}(\varkappa, A, \lambda) \subset \overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda),$$

$$\lambda_1 = \lambda - \varkappa - 2 - \mu_0(\varkappa).$$

Во-вторых, следует воспользоваться равенством

$$\| \ell_m | \overline{\mathcal{H}}^*(\varkappa, A, \lambda) \|^2 = \sum_{\beta \in Z} A_0^{-1}[\beta] \left| (\ell_m, e^{-i2\pi\beta x}) \right|^2 + \sum_{\alpha=0}^{\infty} b_\alpha^2 \left| (\ell_m, \varphi_\alpha) \right|^2, \tag{19}$$

которое легко получить, если применить понятие экстремальной функции (см. [2]) функционала ℓ_m в гильбертовом пространстве $\overline{\mathcal{H}}(\varkappa, A, \lambda)$ и представить ее в виде ряда (5).

В-третьих, для оценки по формуле (19) нормы конкретных ф.п. ℓ_m, фигурирующих в формулировках теорем 2 - 4, следует применить полученные в § 3 асимптотические представления коэффициентов Фурье и равенство (7) для $\varphi_\alpha(x)$.

Подробная реализация этой схемы доказательства в случае теоремы 3 имеется в [5] , а в случае теорем 2 - 4 содержится в [6] .

Литература

1. Соболев С. Л. Сходимость кубатурных формул на различных классах периодических функций.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева), Новосибирск, 1976, № 1, с. 122-140.
2. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974.- 808 с.
3. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.- М.: Мир, 1980.- 664 с.
4. Дубинский Ю. А. Некоторые вопросы теории пространств Соболева бесконечного порядка и нелинейных уравнений.- Дифференциальные уравнения с частными производными.- Новосибирск, Наука, 1980, с. 75-80.
5. Васкевич В.Л. Об одной задаче теории квадратурных формул.- Новосибирск, Б.и., 1982.- 50 с. (Препринт ИМ СО АН СССР, 3).
6. Васкевич В. Л. Сходимость квадратурных формул на некоторых классах функций: Автореферат дис. на соиск. уч. степ. к.ф.-м.н. (01.01.01).- Новосибирск, Б.и., 1983.- 108 с.- ИМ СО АН СССР.
7. Соболев С. Л. Лекции по теории кубатурных формул, Ч.I. Новосибирск: НГУ, 1964.- 193 с.
8. Половинкин В. И. Последовательности функционалов с пограничным слоем.- Сиб. мат. журн., 1974, т.15, № 2, с.413-429.
9. Рамазанов М. Д. Лекции по теории приближенного интегрирования.- Уфа: Башкирский госуниверситет, 1973.- 177 с.
10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.- М.: Наука, 1967.- 500 с.
11. Васкевич В. Л. О сходимости квадратурных формул Грегори.- Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 5, с.1041-1043.
12. Васкевич В. Л. О норме в $L_2^{-m}[0,1]$ одного функционала погрешности с регулярным пограничным слоем.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева), Новосибирск, 1980, № 1, с. 41-59.
13. Соболев С. Л. Лекции по теории кубатурных формул, ч. II.- Новосибирск, НГУ, 1964.- 264 с.
14. Butler R. On the evaluation of $\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt$ by the trapezoidal rule. - Amer.Math.Monthly, 1960, v.67, No 6, p.566-569.
15. Никольский С. М. Квадратурные формулы.- М.: Наука, 1979.- 256 с.