УДК 517.958

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И СИММЕТРИЧНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е. И. Роменский

При изучении квазилинейных гиперболических систем уравнений целесообразно знать возможность приведения их к симметрическому виду. Это позволяет классифицировать рассматриваемую систему как гиперболическую по Фридрихсу. На практике приведение к симметрическому виду сопряжено с определенными трудностями.

То существенное обстоятельство, что, как правило, системы уравнений математической физики возникают из физических законов сохранения, а отвечающие им дифференциальные уравнения имеют дивергентный вид, позволяет дать изящный способ симметризации этих систем. С.К. Годунов [1] предложил канонический вид уравнений математической физики

$$\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t}+\frac{\partial M^1_{q_i}}{\partial x_1}+\frac{\partial M^2_{q_i}}{\partial x_2}+\frac{\partial M^3_{q_i}}{\partial x_3}=0,\quad i=1,2,\dots,n, \tag{1}$$

где $L$, $M^k$ - нелинейные функции переменных $q_1, q_2, \dots, q_n$. Важно, что этот канонический вид основан на наличии дополнительного закона сохранения

$$\frac{\partial(q_iL_{q_i}-L)}{\partial t}+\frac{\partial(q_iM^1_{q_i}-M^1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(q_iM^2_{q_i}-M^2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(q_iM^3_{q_i}-M^3)}{\partial x_3}=0, \tag{2}$$

который, как правило, имеется у систем уравнений математической физики. Очевидно, что система (1) записывается в симметрическом виде

$$L_{q_iq_j}\frac{\partial q_j}{\partial t}+M^1_{q_iq_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_1}+M^2_{q_iq_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_2}+M^3_{q_iq_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_3}=0. \tag{3}$$

Для гиперболичности системы (1) достаточно потребовать положительной определенности матрицы $\|L_{q_iq_j}\|$.

Оказывается , что не все уравнения математической физики принадлежат виду (I). Таковыми оказались, например, уравнения магнитной гидродинамики идеально проводящей среды. С.К. Годунов [2] обобщил канонический вид (I) следующим образом (см. также [3 , 4] ):

$$\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial (M^1_{q_i} + A\Phi_{q_i})}{\partial x_1} + \frac{\partial (M^2_{q_i} + B\Phi_{q_i})}{\partial x_2} + \frac{\partial (M^3_{q_i} + C\Phi_{q_i})}{\partial x_3} -$$

$$- \Phi_{q_i}\left(\frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial x_2} + \frac{\partial C}{\partial x_3}\right) = 0. \qquad (4)$$

Уравнения магнитной гидродинамики приводятся к виду (4). Для их приведения используется наличие в магнитной гидродинамике дополнительного закона сохранения

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} = 0,$$

которому обязано удовлетворять решение уравнений магнитной гидродинамики.

Система (4) также имеет симметрический вид

$$L_{q_i q_j}\frac{\partial q_j}{\partial t} + \left(M^1_{q_i q_j} + A\Phi_{q_i q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial x_1} + \left(M^2_{q_i q_j} + B\Phi_{q_i q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial x_2} + \left(M^3_{q_i q_j} + C\Phi_{q_i q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial x_3} = 0$$

и обладает дополнительным законом сохранения (2)

$$\frac{\partial (q_i L_{q_i} - L)}{\partial t} + \frac{\partial (q_i M^1_{q_i} - M^1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (q_i M^2_{q_i} - M^2)}{\partial x_2} + \frac{\partial (q_i M^3_{q_i} - M^3)}{\partial x_3} = 0,$$

если только $\Phi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ - однородная функция первой степени от своих аргументов, т.е. $q_i \Phi_{q_i} = \Phi$ .

Укажем теперь алгоритм приведения к виду, аналогичному (4), произвольной квазилинейной системы уравнений дивергентного вида (обладающей дополнительным законом сохранения), решения которой обязаны удовлетворять дополнительным законам сохранения.

Пусть дана замкнутая система уравнений в дивергентном виде

$$\frac{\partial P^0_i}{\partial t} + \frac{\partial P^1_i}{\partial x_1} + \frac{\partial P^2_i}{\partial x_2} + \frac{\partial P^3_i}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \qquad (5)$$

где $P^0_i, P^1_i, P^2_i, P^3_i$ - функции неизвестных $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Кроме того, имеется набор дополнительных законов сохранения, которым обязано удовлетворять решение $q_1, q_2, \dots, q_n$ уравнений (5)

$$\frac{\partial \psi^1_k}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi^2_k}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi^3_k}{\partial x_3} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \qquad (6)$$

где $\psi^1_k, \psi^2_k, \psi^3_k$ также являются функциями от $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Известно, кроме того, что если уравнения (5) умножить на соответствующие $q_i$, а уравнения (6) умножить на $r_\kappa(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ и все сложить, то получится еще одно дивергентное уравнение - дополнительный закон сохранения:

$$q_i\left(\frac{\partial p_i^0}{\partial t}+\frac{\partial p_i^1}{\partial x_1}+\frac{\partial p_i^2}{\partial x_2}+\frac{\partial p_i^3}{\partial x_3}\right)+r_\kappa\left(\frac{\partial \psi_\kappa^1}{\partial x_1}+\frac{\partial \psi_\kappa^2}{\partial x_2}+\frac{\partial \psi_\kappa^3}{\partial x_3}\right)=$$

$$=\frac{\partial \Phi^0}{\partial t}+\frac{\partial \Phi^1}{\partial x_1}+\frac{\partial \Phi^2}{\partial x_2}+\frac{\partial \Phi^3}{\partial x_3}=0. \tag{7}$$

Отметим, что для конкретных уравнений всегда известны $\Phi^0, \Phi^1, \Phi^2, \Phi^3$, а множители $q_i$, $r_\kappa$ достаточно легко определить.

На основании (7) получим

$$\begin{aligned} &q_i\,dp_i^0=d\Phi^0,\\ &q_i\,dp_i^\alpha+r_\kappa\,d\psi_\kappa^\alpha=d\Phi^\alpha, \quad \alpha=1,2,3. \end{aligned} \tag{8}$$

Если обозначить теперь

$$L=q_i p_i^0-\Phi^0, \quad M^\alpha=q_i p_i^\alpha+r_\kappa\psi_\kappa^\alpha-\Phi^\alpha, \tag{9}$$

то из (8) получим

$$\begin{aligned} &p_i^0=L_{q_i}, \quad p_i^\alpha=M^\alpha_{q_i}-\psi_\kappa^\alpha(r_\kappa)_{q_i},\\ &\Phi^0=q_i L_{q_i}-L, \quad \Phi^\alpha=q_i M^\alpha_{q_i}-M^\alpha+\psi_\kappa^\alpha\left[q_i(r_\kappa)_{q_i}-r_\kappa\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя выражения (10) для $p_i^0, p_i^\alpha$ в уравнения (5), получаем

$$\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t}+\frac{\partial\left[M^1_{q_i}-\psi_\kappa^1(r_\kappa)_{q_i}\right]}{\partial x_1}+\frac{\partial\left[M^2_{q_i}-\psi_\kappa^2(r_\kappa)_{q_i}\right]}{\partial x_2}+\frac{\partial\left[M^3_{q_i}-\psi_\kappa^3(r_\kappa)_{q_i}\right]}{\partial x_3}=0. \tag{11}$$

Перепишем теперь (11) в квазилинейном виде

$$\begin{aligned} L_{q_iq_j}\frac{\partial q_j}{\partial t}&+\left[M^1_{q_iq_j}-\psi_\kappa^1(r_\kappa)_{q_iq_j}-(\psi_\kappa^1)_{q_j}(r_\kappa)_{q_i}\right]\frac{\partial q_j}{\partial x_1}+\\ &+\left[M^2_{q_iq_j}-\psi_\kappa^2(r_\kappa)_{q_iq_j}-(\psi_\kappa^2)_{q_j}(r_\kappa)_{q_i}\right]\frac{\partial q_j}{\partial x_2}+\\ &+\left[M^3_{q_iq_j}-\psi_\kappa^3(r_\kappa)_{q_iq_j}-(\psi_\kappa^3)_{q_j}(r_\kappa)_{q_i}\right]\frac{\partial q_j}{\partial x_3}=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Полученная система, очевидно, не симметрична. Добавим теперь к уравнению (12), а значит и к (11), тождество, скомбинированное из уравнений (6):

$$(r_\kappa)_{q_i}\frac{\partial \psi_\kappa^\alpha}{\partial x_\alpha}=(r_\kappa)_{q_i}(\psi_\kappa^\alpha)_{q_j}\frac{\partial q_j}{\partial x_\alpha}=0.$$

Вместо (I2) получим теперь симметричную систему

$$L_{q_i q_j}\frac{\partial q_j}{\partial t}+\left[M^1_{q_i q_j}-\psi^1_\kappa(\tau_\kappa)_{q_i q_j}\right]\frac{\partial q_j}{\partial x_1}+$$

$$+\left[M^2_{q_i q_j}-\psi^2_\kappa(\tau_\kappa)_{q_i q_j}\right]\frac{\partial q_j}{\partial x_2}+\left[M^3_{q_i q_j}-\psi^3_\kappa(\tau_\kappa)_{q_i q_j}\right]\frac{\partial q_j}{\partial x_3}=0.$$

Уравнение (II) преобразуется к виду

$$\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t}+\frac{\partial\left[M^1_{q_i}-\psi^1_\kappa(\tau_\kappa)_{q_i}\right]}{\partial x_1}+\frac{\partial\left[M^2_{q_i}-\psi^2_\kappa(\tau_\kappa)_{q_i}\right]}{\partial x_2}+$$

$$+\frac{\partial\left[M^3_{q_i}-\psi^3_\kappa(\tau_\kappa)_{q_i}\right]}{\partial x_3}+(\tau_\kappa)_{q_i}\left(\frac{\partial\psi^1_\kappa}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi^2_\kappa}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi^3_\kappa}{\partial x_3}\right)=0. \qquad (I3)$$

Это и есть искомый канонический вид уравнений (5). Выясним теперь, в каком случае дополнительный закон сохранения имеет место только для системы (I3) без использования уравнений (5).

Умножив уравнения (13) на $q_i$ и сложив их, рассмотрим выражение вида

$$q_i(\tau_\kappa)_{q_i}d\psi^\alpha_\kappa-q_i d\left[\psi^\alpha_\kappa(\tau_\kappa)_{q_i}\right]=-q_i\psi^\alpha_\kappa d(\tau_\kappa)_{q_i}=-\psi^\alpha_\kappa d\left[q_i(\tau_\kappa)_{q_i}-\tau_\kappa\right],$$

из которого видно, что если не накладывать никаких ограничений на вид функции $\psi^\alpha_\kappa$, то рассматриваемая величина будет полным дифференциалом при $q_i(\tau_\kappa)_{q_i}-\tau_\kappa=0$.

Следовательно, система (I3) имеет дополнительный закон сохранения вида

$$\frac{\partial(q_i L_{q_i}-L)}{\partial t}+\frac{\partial(q_i M^1_{q_i}-M^1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(q_i M^2_{q_i}-M^2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(q_i M^3_{q_i}-M^3)}{\partial x_3}=0,$$

если

$$q_i(\tau_\kappa)_{q_i}=\tau_\kappa,$$

т.е. $\tau_\kappa$ - однородная функция первой степени от своих переменных.

Очевидно, что система (I3) является обобщением по количеству фигурирующих в ней функций системы (4). Рассмотрим теперь, как привести к симметрическому виду (I3) систему уравнений нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах. Чтобы избежать излишних разъяснений из механики сплошной среды,выведем уравнения из вариационного принципа. Отметим, что при этом мы получим уравнения теории упругости в лагранжевых координатах. Переход к эйлеровым координатам осуществляется заменой переменных, однако получить при этом уравнения в виде законов сохранения оказывается не совсем просто. Заметим еще, что симметризация уравнений в лагранжевых координатах (см., например, [5])по существу содержится в [I], а уравнения принадлежат классу (I).

Известно [6,7], что уравнения нелинейной теории упругости могут быть получены из условий экстремума функционала Лагранжа

$$\int\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)^2\right]-E\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1^\circ},\frac{\partial x_1}{\partial x_2^\circ},\ldots,\frac{\partial x_3}{\partial x_3^\circ}\right)\right\}dx_1^\circ dx_2^\circ dx_3^\circ dt, \quad (I4)$$

где $x_i(x_1^\circ,x_2^\circ,x_3^\circ,t)$ - координаты рассматриваемой частицы среды, $x_i^\circ = x_i|_{t=0}$ - координаты той же частицы при $t=0$ (лагранжевы координаты), $E$ - удельная внутренняя энергия среды.

Уравнения Эйлера для функционала (I4) таковы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j^\circ}\left[\frac{\partial E}{\partial\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^\circ}\right)}\right]=0, \quad i=1,2,3. \quad (I5)$$

Уравнения(I5) представляют собой уравнения второго порядка для неизвестных функций $x_i(x_1^\circ,x_2^\circ,x_3^\circ,t)$. О гиперболичности этих уравнений см. [6]. На практике удобнее иметь дело с уравнениями первого порядка, которые легко получить из(I5). Обозначим $u_i=\frac{\partial x_i}{\partial t}$ скорости движения частиц, $c_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial x_j^\circ}$ - матрицу градиентов деформации, называемую также матрицей дисторсии в лагранжевых координатах. Очевидно, что $\frac{\partial c_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j^\circ}$. Если рассматривать еще тепловые эффекты, то следует учесть зависимость внутренней энергии от энтропии $S$ и добавить уравнение $\frac{\partial S}{\partial t}=0$. Таким образом, уравнения нелинейной теории упругости (термоупругости) в лагранжевых координатах, записанные в виде системы первого порядка, имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial E_{c_{ij}}}{\partial x_j^\circ}=0,\\
&\frac{\partial c_{ij}}{\partial t}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j^\circ}=0,\\
&\frac{\partial S}{\partial t}=0,
\end{aligned} \quad (I6)$$

где $E(c_{11},c_{12},\ldots,c_{33},S)$ - известная функция своих аргументов. Легко видеть, что система (I6) имеет дополнительный закон сохранения (закон сохранения энергии)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[E+\frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2}{2}\right]-\frac{\partial}{\partial x_j^\circ}\left[u_i E_{c_{ij}}\right]=0.$$

Выше упоминалось, что система (I6) принадлежит классу (I) (см. [I] ).

Перепишем теперь систему (I6) в эйлеровых координатах $x_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$. Предположим, что все искомые функции зависят от $x_1, x_2, x_3, t$. Тогда $\frac{\partial}{\partial t}$ заменится на $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, а $\frac{\partial}{\partial x_j^0}$ заменится на $\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_j^0}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = c_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

Уравнения (I6) примут вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - c_{\kappa j}\frac{\partial E_{c_{ij}}}{\partial x_\kappa} = 0, \tag{I7}$$

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_\alpha} - c_\kappa \frac{\partial u_i}{\partial x_\kappa} = 0, \tag{I8}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{I9}$$

Перепишем эту систему в виде законов сохранения. Для этого, во-первых, необходимо от матрицы дисторсии $C = \|c_{ij}\| = \left\|\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}\right\|$ в лагранжевых координатах перейти к матрице дисторсии в эйлеровых координатах $A = \|a_{ij}\| = \left\|\frac{\partial x_i^0}{\partial x_j}\right\| = C^{-1}$ Чтобы выписать уравнения для $a_{ij}$, заметим, что уравнения (I8) для $c_{ij}$ в матричном виде таковы:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial C}{\partial x_\alpha} - WC = 0,$$

где $W = \|w_{ij}\| = \left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\|$. Используя теперь тождество $dA = -C^{-1}dCC^{-1} = -AdCA$, получаем

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial A}{\partial x_\alpha} + AW = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha} + a_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} = 0. \tag{20}$$

Уравнения (20) уже легко переписать в дивергентном виде. Преобразуем (20) следующим образом:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial a_{i\alpha}u_\alpha}{\partial x_j} - u_\alpha \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial x_j} = 0.$$

И, вспоминая, что по определению $a_{ij} = \frac{\partial x_i^0}{\partial x_j}$, получаем $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial x_j} = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial a_{i\alpha}u_\alpha}{\partial x_j} = 0. \tag{2I}$$

Для дальнейших преобразований получим из (20) уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы.

Определим плотность $\rho$ по формуле $\rho = \rho_0 \det A$, где $\rho_0 = const$. Заметив, что $d\rho = \rho c_{ji} da_{ij}$, и умножив (20) на соответствующие множители $\rho c_{ji}$, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} + \rho \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

или в дивергентном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \qquad (22)$$

Рассмотрим теперь уравнение (I7). Используя тождество $\frac{\partial E}{\partial c_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial a_{mn}} \frac{\partial a_{mn}}{\partial c_{ij}} = -a_{mi} a_{jn} \frac{\partial E}{\partial a_{mn}}$, преобразуем выражение

$$c_{kj} \frac{\partial E_{c_{ij}}}{\partial x_k} = -c_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{mi} a_{jn} \frac{\partial E}{\partial a_{mn}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\left(c_{kj} a_{mi} a_{jn} E_{a_{mn}}\right) +$$

$$+ a_{mi} a_{jn} E_{a_{mn}} \frac{\partial c_{kj}}{\partial x_k} = -\frac{\partial a_{mi} E_{a_{mk}}}{\partial x_k} + a_{mi} a_{jn} E_{a_{mn}} \frac{\partial c_{kj}}{\partial x_k} =$$

$$= -\frac{\partial a_{mi} E_{a_{mk}}}{\partial x_k} - a_{mi} c_{k\alpha} E_{a_{m\beta}} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_k}.$$

Подставим это выражение в уравнение (I7), умноженное на $\rho$ :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \rho \frac{\partial a_{mi} E_{a_{mk}}}{\partial x_k} + \rho a_{mi} \cdot c_{k\alpha} E_{a_{m\beta}} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_k} = 0. \qquad (23)$$

Заметив далее, что

$$\rho \frac{\partial a_{mi} E_{a_{mk}}}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho a_{mi} E_{a_{mk}}}{\partial x_k} - \rho a_{mi} c_{\beta\alpha} E_{a_{mk}} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_k},$$

получим из (23)

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \rho a_{mi} E_{a_{mk}}}{\partial x_k} + \rho a_{mi} E_{a_{m\beta}} c_{k\alpha} \left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_\beta}\right) = 0.$$

Но так как $\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_\beta} = 0$, по определению $a_{\alpha\beta}$, получим

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \rho a_{mi} E_{a_{mk}}}{\partial x_k} = 0. \qquad (24)$$

Величины $\sigma_{ik} = -\rho a_{mi} E_{a_{mk}}$ называются тензором напряжений. Уравнение (24) уже с помощью уравнения неразрывности (22) приводится к дивергентному виду:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k - \sigma_{ik})}{\partial x_k} = 0. \tag{25}$$

Точно так же с помощью (22) преобразуется к дивергентному виду уравнение (I9) для энтропии

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{26}$$

При помощи преобразований, подобных проведенным выше, закон сохранения энергии приведется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(E + \frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho u_k\left(E + \frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2}{2}\right) - u_i\sigma_{ik}\right] = 0. \tag{27}$$

Итак, мы получили замкнутую систему уравнений в дивергентном виде, обладающую дополнительным законом сохранения для неизвестных функций $a_{ij}$, $u_i$, $S$ . Выберем в качестве независимых уравнений (2I),(25), (27)

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k - \sigma_{ik})}{\partial x_k} = 0, \tag{28.I}$$

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial a_{i\alpha} u_\alpha}{\partial x_k} = 0, \tag{28.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(E + \frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho u_k\left(E + \frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2}{2}\right) - u_i\sigma_{ik}\right] = 0, \tag{28.3}$$

а в качестве дополнительного закона сохранения уравнение (26)

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_k}{\partial x_k} = 0. \tag{29}$$

Такой выбор оправдывается тем, что рассматриваемые уравнения могут иметь разрывные решения, для которых закон сохранения энтропии нарушается. Сразу заметим, что из уравнений (28) получить (29) можно, только если использовать уравнения (также законы сохранения)

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} = 0, \tag{30}$$

которым должна удовлетворять матрица дисторсии $a_{ij}$ ( в силу ее определения). В действительности уравнения (30) будут выполнены для любого момента времени $t$ , если они выполнены для начальных данных при $t=0$ , так как из (28.2) следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right) = 0.$$

Покажем теперь, как система (28) с ограничениями (30) в виде законов сохранения и дополнительным законом сохранения (29) приводится к каноническому виду (I3).

Нам придется отказаться от тензорных обозначений и записать систему в развернутом виде, присвоив номер каждому уравнению:

I. $\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 - \sigma_{11})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v - \sigma_{12})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w - \sigma_{13})}{\partial z} = 0,$

2. $\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v u - \sigma_{21})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 - \sigma_{22})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v w - \sigma_{23})}{\partial z} = 0,$

3. $\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w u - \sigma_{31})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w v - \sigma_{32})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2 - \sigma_{33})}{\partial z} = 0,$

4. $\frac{\partial \rho(E + \frac{|\bar u|^2}{2})}{\partial t} + \frac{\partial\left[\rho u(E + \frac{|\bar u|^2}{2}) - u\sigma_{11} - v\sigma_{21} - w\sigma_{31}\right]}{\partial x} +$

$+ \frac{\partial\left[\rho v(E + \frac{|\bar u|^2}{2}) - u\sigma_{12} - v\sigma_{22} - w\sigma_{32}\right]}{\partial y} + \frac{\partial\left[\rho w(E + \frac{|\bar u|^2}{2}) - u\sigma_{13} - v\sigma_{23} - w\sigma_{33}\right]}{\partial z} = 0,$

5. $\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + \frac{\partial(u a_{11} + v a_{12} + w a_{13})}{\partial x} = 0,$

6. $\frac{\partial a_{21}}{\partial t} + \frac{\partial(u a_{21} + v a_{22} + w a_{23})}{\partial x} = 0,$

7. $\frac{\partial a_{31}}{\partial t} + \frac{\partial(u a_{31} + v a_{32} + w a_{33})}{\partial x} = 0,$

8. $\frac{\partial a_{12}}{\partial t} + \frac{\partial(u a_{11} + v a_{12} + w a_{13})}{\partial y} = 0,$

9. $\frac{\partial a_{22}}{\partial t} + \frac{\partial(u a_{21} + v a_{22} + w a_{23})}{\partial y} = 0,$

I0. $\frac{\partial a_{32}}{\partial t} + \frac{\partial(u a_{31} + v a_{32} + w a_{33})}{\partial y} = 0,$

II. $\frac{\partial a_{13}}{\partial t} + \frac{\partial(u a_{11} + v a_{12} + w a_{33})}{\partial z} = 0,$

I2. $\frac{\partial a_{23}}{\partial t} + \frac{\partial(u a_{21} + v a_{22} + w a_{23})}{\partial z} = 0,$

I3. $\frac{\partial a_{33}}{\partial t} + \frac{\partial(u a_{31} + v a_{32} + w a_{33})}{\partial z} = 0,$

I.I. $\frac{\partial a_{11}}{\partial y} - \frac{\partial a_{12}}{\partial x} = 0,$

I.2. $\frac{\partial a_{11}}{\partial z} - \frac{\partial a_{13}}{\partial x} = 0,$

I.3. $\frac{\partial a_{21}}{\partial y} - \frac{\partial a_{22}}{\partial x} = 0,$

I.4. $\dfrac{\partial a_{21}}{\partial z} - \dfrac{\partial a_{23}}{\partial x} = 0,$

I.5. $\dfrac{\partial a_{31}}{\partial y} - \dfrac{\partial a_{32}}{\partial x} = 0,$

I.6. $\dfrac{\partial a_{31}}{\partial z} - \dfrac{\partial a_{33}}{\partial x} = 0,$

I.7. $\dfrac{\partial a_{12}}{\partial z} - \dfrac{\partial a_{13}}{\partial y} = 0,$

I.8. $\dfrac{\partial a_{22}}{\partial z} - \dfrac{\partial a_{23}}{\partial y} = 0,$

I.9. $\dfrac{\partial a_{32}}{\partial z} - \dfrac{\partial a_{33}}{\partial y} = 0,$

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u}{\partial x} + \frac{\partial \rho S v}{\partial y} + \frac{\partial \rho S w}{\partial z} = 0.$$

Можно убедиться, что имеет место тождество

$$d\rho S = \frac{1}{E_s} d\rho\left(E + \frac{|\bar{u}|^2}{2}\right) - \frac{u_i}{E_s} d\rho u_i -$$

$$- \frac{1}{E_s}\left[\rho E_{a_{ij}} + \left(E - SE_s - \frac{|\bar{u}|^2}{2}\right)\rho_{a_{ij}}\right] da_{ij},$$

из которого определяем множители, на которые следует умножить уравнения I-I3. Эти множители таковы:

$$q_1 = -\frac{u}{E_s}, \quad q_2 = -\frac{v}{E_s}, \quad q_3 = -\frac{w}{E_s}, \quad q_4 = \frac{1}{E_s},$$

$$q_5 = -\frac{1}{E_s}\left[\rho E_{a_{11}} + \left(E - SE_s - \frac{|\bar{u}|^2}{2}\right)\rho_{a_{11}}\right], \ldots,$$

$$q_{13} = -\frac{1}{E_s}\left[\rho E_{a_{13}} + \left(E - SE_s - \frac{|\bar{u}|^2}{2}\right)\rho_{a_{13}}\right].$$

Нетрудно проверить, что к уравнениям I-I3, умноженным соответственно на $q_1, q_2, \ldots, q_{13}$, необходимо прибавить еще уравнения I.I-I.9, умноженные на множители, соответственно:

I.I - I.9, умноженные на множители, соответственно:

I.I - на $r_1 = (q_1 q_8 - q_2 q_5)/q_4$, I.2 - на $r_2 = (q_1 q_{11} - q_3 q_5)/q_4$,

I.3 - на $r_3 = (q_1 q_9 - q_2 q_6)/q_4$, I.4 - на $r_4 = (q_1 q_{12} - q_3 q_6)/q_4$,

I.5 - на $r_5 = (q_1 q_{10} - q_2 q_7)/q_4$, I.6 - на $r_6 = (q_1 q_{13} - q_3 q_7)/q_4$,

I.7 - на $r_7 = (q_2 q_{11} - q_3 q_8)/q_4$, I.8 - на $r_8 = (q_2 q_{12} - q_3 q_9)/q_4$,

I.9 - на $r_9 = (q_2 q_{13} - q_3 q_{10})/q_4$.

Теперь можно найти, что

$$L_{q_1} = \rho u,\ L_{q_2} = \rho v,\ L_{q_3} = \rho w,\ L_{q_4} = \rho\left(E + \frac{|\bar{u}|^2}{2}\right),\ L_{q_5} = a_{11}, \ldots, L_{q_{13}} = a_{33},$$

$$L = q_i L_{q_i} - \rho S = -\frac{2\rho}{E_s}\left(E - \frac{|\bar{u}|^2}{2} - SE_s + \frac{1}{2} a_{ij} E_{a_{ij}}\right),$$

$$M^1_{q_1} = \rho u^2 - \sigma_{11} + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_1} = \rho u^2 + \rho a_{ij} E_{a_{ij}} + 2\rho\left(E - SE_s - \frac{|\bar{u}|^2}{2}\right),$$

$$M^1_{q_2} = \rho v u - \sigma_{21} + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_2} = \rho u v,$$

$$M^1_{q_3} = \rho w u - \sigma_{31} + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_3} = \rho u w,$$

$$M^1_{q_4} = \rho u\left(E + \frac{|\bar{u}|^2}{2}\right) - u\sigma_{11} - v\sigma_{21} - w\sigma_{31} + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_4} =$$

$$= \rho u\left(3E - \frac{|\bar{u}|^2}{2} - 2SE_s + a_{ij} E_{a_{ij}}\right),$$

$$M^1_{q_5} = u a_{11} + v a_{12} + w a_{13} + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_5} = u a_{11},$$

$$M^1_{q_6} = u a_{21} + v a_{22} + w a_{33} + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_6} = u a_{21},$$

$$M^1_{q_7} = u a_{31} + v a_{32} + w a_{33} + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_7} = u a_{31},$$

$$M^1_{q_8} = 0 + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_8} = u a_{12},$$

$$M^1_{q_9} = 0 + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_9} = u a_{22},$$

$$M^1_{q_{10}} = 0 + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_{10}} = u a_{32},$$

$$M^1_{q_{11}} = 0 + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_{11}} = u a_{13},$$

$$M^1_{q_{12}} = 0 + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_{12}} = u a_{23},$$

$$M^1_{q_{13}} = 0 + \psi^1_\kappa (\tau_\kappa)_{q_{13}} = u a_{33}.$$

Следовательно,

$$M^1 = q_i M^1_{q_i} - \rho S u = uL = -u\frac{2\rho}{E_s}\left(E - \frac{|\bar{u}|^2}{2} - SE_s + \frac{1}{2} a_{ij} E_{a_{ij}}\right)$$

Аналогично находим

$$M^2 = vL = -v\frac{2\rho}{E_s}\left(E - \frac{|\bar{u}|^2}{2} - SE_s + \frac{1}{2} a_{ij} E_{a_{ij}}\right),$$

$$M^3 = wL = -w\frac{2\rho}{E_s}\left(E - \frac{|\bar{u}|^2}{2} - SE_s + \frac{1}{2} a_{ij} E_{a_{ij}}\right).$$

Для гиперболичности системы по Фридрихсу достаточно потребовать положительной определенности матрицы $\| L_{q_i q_j} \|$.

Легко убедиться также, что функции $\tau_\kappa$ - однородные первой степени. Отметим, что в полученной симметрической системе уравнения для $a_{ij}$ приводятся к виду (20):

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha} + a_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} = 0.$$

Из этих уравнений следует [5], что выполнено уравнение $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} = 0$ для любого момента времени $t$, если оно выполнено для начальных данных.

## Литература


I. Годунов С.К. Интересный класс квазилинейных систем.- Докл.АН СССР, 1961, т. 139, № 3, с. 272-273.

2. Годунов С.К. Симметрическая форма уравнений магнитной гидродинамики.- Численные методы механики сплошной среды, 1972, т. 3, № 1, с.26-34.

3. Friedrichs K.O. Conservation Equations and the Laws of Motion in Classical Physics. - Comm. on Pure and Appl.Math., 1978, v.31, No 1, p.123-131.

4. Boillat G. Symmétrisation des systèmes d'equations aux dérivées partielles avec densité d'énergie convexe et contraintes, Comptes Rendus, Série I, 1982, t.295, No 9, p.551-554.

5. Кондауров В.И. О законах сохранения и симметризации нелинейной теории термоупругости.- Докл. АН СССР, 1981, т. 256, № 4, с. 819-823.

6. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды.- М.: Наука, 1978.- 304 с.

7. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости.- М.: Наука, 1969.- 336 с.