УДК 517.947

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ш. Г. Нафиков (Новосибирск)

В работе С.Л. Соболева [1] получено уравнение

$$\mathcal{D}_t^2 \Delta u + \mathcal{D}_{x_n}^2 u = 0, \tag{1}$$

и для него изучены некоторые постановки задач. В последнее время имеется большое число работ по качественным свойствам решений этого уравнения (см., например, библиографию в [2 - 4]). В частности, в работах [5-7] изучена асимптотика решений при $t \to \infty$ задачи Коши и краевых задач для систем Соболева при $n \leq 3$. Для уравнения (1) этот вопрос при любых $n \geq 2$ исследован в работах [8-10].

В настоящей работе обобщаются результаты [10] на случай уравнений вида

$$\mathcal{D}_t^2 \Delta u + \sum_{k=1}^{p} c_k \mathcal{D}_{x_k}^2 u = 0. \tag{2}$$

Получена асимптотика при $t \to \infty$ решений задачи Коши и первой краевой задачи в квадранте E_{n+1}^{++} . Отметим, что оценки решений первой краевой задачи в цилиндре $Q = \{t > 0,\ x \in G\}$ для этого уравнения получены в работе [11] .

§ 1. Постановка задач и формулировка основных результатов

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_t^2 \Delta u + \sum_{k=1}^{p} c_k \mathcal{D}_{x_k}^2 u = 0, \quad t > 0, \quad x \in E_n, \\ u\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \mathcal{D}_t u\big|_{t=0} = \varphi_2(x), \end{gathered} \tag{3}$$

а также первую краевую задачу в квадранте:

$$\mathcal{D}_t^2 \Delta u + \sum_{k=1}^{p} c_k \mathcal{D}_{x_k}^2 u = 0, \quad t>0, \; x_1>0, \; x'=(x_2,\dots,x_n)\in E_{n-1},$$
$$u|_{x_1=0} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \mathcal{D}_t u|_{t=0} = \varphi_2(x). \tag{4}$$

Коэффициенты уравнения c_k положительны, и $1\le p\le n-1$.

Определим класс функций $W_{1,q}^{r}(G)$. Будем считать, что функция $\varphi(x)\in W_{1,q}^{r}(G)$, если $\varphi(x)\in W_1^r(G)$ и

$$\|\varphi, W_{1,q}^{r}(G)\| = \sum_{|\alpha|\le r} \|(1+|x|^q)\mathcal{D}_x^\alpha \varphi(x), L_1(G)\| < \infty .$$

Введем следующие обозначения:

$$E_{n+1}^{++} = \{t>0, \; x_1>0, \; x'=(x_2,\dots,x_n)\in E_{n-1}\},$$

$$x=(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_n)=(\bar{x}_p,\bar{x}_p').$$

Теорема I. Пусть $\varphi_1(x)\in W_{1,n-p+1}^{r_1}(E_n), \varphi_2(x)\in W_{1,n-p+2}^{r_2}(E_n)$, где $r_1=2m_1>2n-p+1$, $r_2=2m_2>2n-p+2$, причем

$$\int_{E_p} \varphi_2(\bar{x}_p,\bar{x}_p')\,d\bar{x}_p = 0. \tag{5}$$

Если $c_k=c_j$, $k,j=1,\dots,p$, то для решения задачи Коши имеет место оценка

$$\sup_{x\in K}|u(t,x)| \le c_1(K)\cdot t^{-\frac{n-p}{2}}, \quad t\to\infty. \tag{6}$$

Если $c_k\ne c_j$ при $k\ne j$, то для решения задачи Коши имеет место оценка

$$\sup_{x\in K}|u(t,x)| \le c_2(K)\cdot t^{-\frac{n-p+1}{2}}, \quad t\to\infty. \tag{7}$$

Здесь K - произвольный компакт из E_n; $c_i(K)$; $i=1,2$, - константы, зависящие от коэффициентов уравнения, φ_1,φ_2 и $\operatorname{diam} K$.

Следствие. Пусть $\varphi_1(x)\in W_{1,n-p+1}^{r_1}(E_n)$, $\varphi_2(x)\in W_{1,n-p+2}^{r_2}(E_n)$, где r_i определены в теореме, причем функции $\varphi_i(x)$ допускают нечетное продолжение на все E_n с сохранением класса. Тогда для решения первой краевой задачи (4) на любом компакте $K\subset E_n^+$ выполнены оценки: (6) при $c_k=c_j$ и (7) при $c_k\ne c_j$.

Теорема 2. Пусть $\varphi_1(x) \in W^{r_1}_{1,n-p+2(N+1)+1}(E_n)$, $\varphi_2(x) \in W^{r_2}_{1,n-p+2(N+2)}(E_n)$, где $r_1 = 2m_1 > 2(n+1+N)-p+1$, $r_2 = 2m_2 > 2(n+1+N)-p+2$, причем выполнены условия (5) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x_{p+1})^s \varphi_i(x)\, dx_{p+1} = 0, \quad 0 \le s \le N, \; i = 1,2. \tag{8}$$

Если $c_k = c_j$; $k,j = 1,\ldots,p$, то для решения задачи Коши (3) имеет место оценка

$$\sup_{x \in K} |u(t,x)| \le c_1(K)\, t^{-\frac{n-p+N+1}{2}}, \quad t \to \infty. \tag{9}$$

Если $c_k \ne c_j$ при $k \ne j$, то для решения задачи Коши (3) имеет место оценка

$$\sup_{x \in K} |u(t,x)| \le c_2(K)\, t^{-\frac{n-p+N+2}{2}}, \quad t \to \infty. \tag{10}$$

Здесь K - произвольный компакт из E_n; $c_i(K)$; $i = 1,2$, - константы, зависящие от коэффициентов уравнения φ_1, φ_2 и $\operatorname{diam} K$.

Следствие. Пусть $\varphi_1(x) \in W_{1,n-p+2(N+1)+1}(E_n^+)$, $\varphi_2(x) \in W^{r_2}_{1,n-p+2(N+2)}(E_n^+)$, где r_i и N определены в теореме, причем функции $\varphi_i(x)$ допускают нечетное продолжение на все E_n с сохранением класса и для них выполнено условие (8). Тогда для решения первой краевой задачи (4) на любом компакте $K \subset E_n^+$ выполнены оценки: (9) при $c_k = c_j$ и (10) при $c_k \ne c_j$.

З а м е ч а н и е 1. Оценка (6) при $n \le 3$, $p=1$ для задач (3) и (4) следует из работ [5-7].

З а м е ч а н и е 2. Оценки (6) и (9) при $n \ge 2$ и $p=1$ получены в работах [8-10].

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство оценки (6) проведем, следуя схеме из работы [10], поэтому аналогичные с [10] выкладки будем опускать. Очевидно, решение задачи Коши (3) можно записать в виде:

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) =$$

$$= \int_{E_n} \exp(ix\xi)\cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^{p} c_k \xi_k^2}/|\xi|\right)\hat{\varphi}_1(\xi)d\bar{\xi} +$$

$$+ \int_{E_n} \exp(ix\xi)\sin\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^{p} c_k \xi_k^2}/|\xi|\right)\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{p} c_k \xi_k^2}/|\xi|\right)^{-1}\hat{\varphi}_2(\xi)d\bar{\xi},$$

где $n \ge 2$ любое, $d\bar{\xi} = (2\pi)^{-n/2}d\xi$ и

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{E_n} \exp(-iy\xi)\varphi(y)d\bar{y}.$$

Нам потребуются следующие леммы:

Л е м м а 1. <u>Пусть</u> $\varphi_1(x) \in W^{\tau_1}_{1,n-p+1}(E_n)$, <u>где</u> $\tau_1 = 2m_1 > 2n-p+1$. <u>Если</u> $c_k = c_j$ <u>при</u> $k,j = 1,\dots,p$, <u>то выполнена оценка</u>

$$\sup_{x\in K} |u_1(t,x)| \le c_1(K) t^{-\frac{n-p}{2}} \|\varphi_1, W^{\tau_1}_{1,n-p+1}\|, \quad t\to\infty. \tag{11}$$

<u>Если</u> $c_k \ne c_j$ <u>при</u> $k \ne j$, <u>то выполнена оценка</u>

$$\sup_{x\in K} |u_1(t,x)| \le c_2(K) t^{-\frac{n-p+1}{2}} \|\varphi_1, W^{\tau_1}_{1,n-p+1}\|, \quad t\to\infty, \tag{12}$$

<u>где</u> K - <u>произвольный компакт из</u> E_n, $c_i(K)$ - <u>константы, зависящие от коэффициентов уравнения и</u> $diam K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вначале случай, когда коэффициенты уравнения одинаковые. Пусть для простоты $c_k = 1$ при всех $k = 1,\dots,p$. Поскольку случай $p=1$ разобран в [10], а случай $p=n-1$ следует из него, то в дальнейшем считаем, что $2 \le p \le n-2$.

Интегрируя по частям, имеем

$$u_1(t,x)=\int\limits_{|\xi|>1} \exp(ix\xi)\cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^{p}\xi_k^2}/|\xi|\right)(-1)^{z}\widehat{\Delta^{z}\varphi_1(\xi)}\,|\xi|^{-2z}d\xi+$$

$$+\int\limits_{|\xi|<1} \exp(ix\xi)\cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^{p}\xi_k^2}/|\xi|\right)\hat{\varphi}_1(\xi)d\xi=u_1^1(t,x)+u_1^2(t,x),$$

где $2z=z_1$.

Докажем оценку (II) для функции $u_1^1(t,x)$. Переходя к сферическим координатам

$$\xi_1=\rho\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_{n-1}=\rho\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2,$$

$$\xi_n=\rho\cos\theta_1,$$

запишем интеграл $u_1^1(t,x)$ в следующем виде:

$$u_1^1(t,x)=(-1)^{z}(2\pi)^{-n}\int\limits_{E_n}\Delta^{z}\varphi_1(y)\left[\int\limits_1^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\ldots\int\limits_0^{\pi}\rho^{n-1-2z}\exp(i(x-y)\rho T(\vec{\theta}))\times\right.$$

$$\left.\times\cos(t\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-p})\cdot\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin^{p-1}\theta_{n-p}\ldots\sin\theta_{n-2}\,d\rho\, d\vec{\theta}\right]dy.$$

Выделим внутренний интеграл

$$J_1=\int\limits_0^{\pi}\ldots\int\limits_0^{\pi}\exp(i(x-y)\rho T(\vec{\theta}))\cos(t\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-p})\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin^{p-1}\theta_{n-p}\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-p}$$

и покажем, что для него выполнена оценка

$$\sup_{x\in K}|J_1|\leq c(K)t^{-\frac{n-p}{2}}(\rho^{n-p}|y|^{n-p}+1),\quad t\to\infty. \tag{13}$$

Тогда из явного выражения $u_1^1(t,x)$ в сферических координатах и из этой оценки следует (II) для функции $u_1^1(t,x)$.

Проведем подробное доказательство для случая $n=4$ и $p=2$:

$$J_1=\left(\int\limits_0^{1/\sqrt{t}}+\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{(\pi/2-1/\sqrt{t})}+\int\limits_{(\pi/2-1/\sqrt{t})}^{(\pi/2+1/\sqrt{t})}+\int\limits_{(\pi/2+1/\sqrt{t})}^{(\pi-1/\sqrt{t})}+\int\limits_{(\pi-1/\sqrt{t})}^{\pi}\right)\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{1/\sqrt{t}}+\int\limits_{1/\sqrt{t}}^{(\pi/2-1/\sqrt{t})}+\int\limits_{(\pi/2-1/\sqrt{t})}^{(\pi/2+1/\sqrt{t})}+\int\limits_{(\pi/2+1/\sqrt{t})}^{(\pi-1/\sqrt{t})}+\int\limits_{(\pi-1/\sqrt{t})}^{\pi}\right)\times$$

$$\times \exp(i(x-y)\rho T(\vec{\theta}))\cos(t\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2)\sin^2\theta_1\sin\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 = \sum_{\ell=1}^{5}\left(\sum_{K=1}^{5} I_{\ell,K}\right).$$

Очевидно, что

$$\sum_{\ell=0}^{2}\sum_{K=0}^{2}|I_{2\ell+1,\,2K+1}| \leq 16t^{-1}. \tag{14}$$

Так как интегралы, входящие в суммы

$$\sum_{\ell=0}^{2}\left(\sum_{K=1}^{2} I_{2\ell+1,2K}\right),\quad \sum_{\ell=1}^{2}\left(\sum_{K=0}^{2} I_{2\ell,\,2K+1}\right),$$

оцениваются по одной схеме, то остановимся лишь на $I_{1,2}$.

Используя тождество

$$t\cos\theta_1\sin\theta_2\cos(t\sin\theta_1\sin\theta_2) = \mathcal{D}_{\theta_1}\sin(t\sin\theta_1\sin\theta_2), \tag{15}$$

имеем

$$I_{1,2} = \int_0^{1/\sqrt{t}}\left\{\frac{\exp(i(x-y)\rho T(\vec{\theta}))\sin^2\theta_1\sin(t\sin\theta_1\sin\theta_2)}{t\cos\theta_1}\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{t}}}^{(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{t}})} -\right.$$

$$-\int_{1/\sqrt{t}}^{(\pi/2-1/\sqrt{t})}\sin(t\sin\theta_1\sin\theta_2)\exp(i(x-y)\rho T(\vec{\theta}))\cdot t^{-1}\times$$

$$\left.\times\left[i(x-y)\rho\,\mathcal{D}_{\theta_1}T(\vec{\theta})\frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1} + \frac{\sin\theta_1(\cos^2\theta_1+1)}{\cos^2\theta_1}\right]d\theta_1\right\}d\theta_2.$$

Поскольку при больших t выполнено неравенство

$$|\cos\theta_1| \geq 1/2\sqrt{t},\quad \theta_1\in[1/\sqrt{t},\ \pi/2-1/\sqrt{t}], \tag{16}$$

то для оценки $I_{1,2}$ нужно оценить интеграл

$$\left(\int_{1/\sqrt{t}}^{(\pi/2-\delta)} + \int_{(\pi/2-\delta)}^{(\pi/2-1/\sqrt{t})}\right)\frac{\exp(i(x-y)\rho T(\vec{\theta}))\sin(t\sin\theta_1\sin\theta_2)\sin\theta_1(\cos^2\theta_1+1)}{t\cos^2\theta_1}d\theta_1 = A+B,$$

где $\delta>0$ – достаточно маленькое фиксированное число, такое, что

$$|\cos\theta_1| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right),\quad \theta_1\in[\pi/2-\delta,\ \pi/2-1/\sqrt{t}]. \tag{17}$$

Отсюда получаем

$$|A| \leq \pi/t\cos^2(\pi/2-\delta),\quad |B| \leq 8t^{-1}(\sqrt{t}-\delta^{-1}). \tag{18}$$

Тогда из (I7) и (I8) следует оценка

$$|I_{1,2}| \leq t^{-1}(|x-y|\rho+1). \qquad (19)$$

Теперь рассмотрим сумму $\sum_{\ell=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{2} I_{2\ell,2k}\right)$. Остановимся на интеграле I_{22}, остальные оцениваются аналогично. Вначале интегрируем по частям по θ_1, используя тождество (I5), затем каждое слагаемое полученного равенства интегрируем по частям по θ_2, используя при этом тождество

$$-t\sin\theta_1\cos\theta_2\sin(t\sin\theta_1\sin\theta_2) = \mathcal{D}_{\theta_2}\cos(t\sin\theta_1\sin\theta_2). \qquad (20)$$

Учитывая (I6) и (I7) для $\cos\theta_1$ и аналогичные неравенства для $\cos\theta_2$, получаем

$$|I_{2,2}| \leq t^{-1}(|x-y|^2\rho^2+1). \qquad (21)$$

Из оценок (I4),(I9) и (2I) следует справедливость (I3) для $\mathcal{J}_1$ при $n=4$, $\rho=2$. Аналогичным образом, как и в [10], используя тождества (I5) и (20), оценка (I3) доказывается для любых n и ρ, причем вывод этой оценки зависит лишь от значения разности $n-\rho$, т.е. при каждом увеличении n на единицу новым является только случай $\rho=2$. Все другие $2<\rho\leq n-1$ сводятся к предыдущим.

Как было уже отмечено, из (I3) непосредственно следует оценка (I2) для функции $u_1^1(t,x)$. Она же справедлива и для функции $u_1^2(t,x)$. Для доказательства этого нужно перейти к сферическим координатам и дословно повторить предыдущие рассуждения. Поскольку $u_1(t,x)=u_1^1(t,x)+u_1^2(t,x)$, то лемма в случае $c_k=c_j$ доказана.

Рассмотрим теперь случай неодинаковых коэффициентов. Пусть $c_k>c_{k+1}$. После перехода к сферическим координатам получим следующий внутренний интеграл:

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{2\pi}\dots\int_0^{\pi} \exp(i(x-y)\rho T(\vec{\theta}))\times$$

$$\times\cos\left(t\sqrt{c_1\cdot\sin^2\theta_1\dots\sin^2\theta_{n-1}+\dots+c_\rho\cdot\sin^2\theta_1\dots\sin^2\theta_{n-\rho}\cos^2\theta_{n-\rho+1}}\right)\times$$

$$\times\sin^{n-2}\theta_1\dots\sin^{\rho-1}\theta_{n-\rho}\dots\sin\theta_{n-2}\,d\theta_1\dots d\theta_{n-1} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{\pi} \exp\left(i(x-y)\rho T(\vec{\theta})\right) \cdot \cos\left(t \sin\theta_1 \dots \sin\theta_{n-p} \times\right.$$

$$\left.\times f(\theta_{n-p+1}, \dots, \theta_{n-1}, c_1, \dots, c_p)\right) \cdot \sin^{n-2}\theta_1 \dots \sin^{p-1}\theta_{n-p} \dots \sin\theta_{n-2} \, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} .$$

Здесь через $f(\theta_{n-p+1}, \dots, \theta_{n-1}, c_1, \dots, c_p)$ мы обозначали выражение под знаком радикала

$$\sqrt{\sin^2\theta_{n-p+1}\left(\dots \sin^2\theta_{n-2}\left(c_1 \cdot \sin^2\theta_{n-1} + c_2 \cdot \cos^2\theta_{n-1}\right) + \dots\right) + c_p \cos^2\theta_{n-p+1}} .$$

При условии $c_k > c_{k+1}$ верно неравенство

$$f(\theta_{n-p+1}, \dots, \theta_{n-1}, c_1, \dots, c_p) \geq \sqrt{c_p} . \tag{22}$$

Покажем, что для интеграла $\mathcal{J}_1$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in K} |\mathcal{J}_1| \leq \frac{\sqrt{c_1}\left((|x-y|_\rho)^{n-p+1} + 1\right)}{\sqrt{c_p}\,(c_{p-1} - c_p)} t^{-\frac{n-p+1}{2}}, \quad t \to \infty . \tag{23}$$

При $n=3$ и $p=2$ имеем

$$\mathcal{J}_1 = \left(\int_0^{1/\sqrt{t}} + \int_{1/\sqrt{t}}^{(\pi/2 - 1/\sqrt{t})} + \int_{(\pi/2 - 1/\sqrt{t})}^{(\pi/2 + 1/\sqrt{t})} + \int_{(\pi/2 + 1/\sqrt{t})}^{(\pi - 1/\sqrt{t})} + \int_{(\pi - 1/\sqrt{t})}^{(\pi + 1/\sqrt{t})} + \right.$$

$$\left. + \int_{(\pi + 1/\sqrt{t})}^{(2\pi/3 - 1/\sqrt{t})} + \int_{(2\pi/3 - 1/\sqrt{t})}^{(2\pi/3 + 1/\sqrt{t})} + \int_{(2\pi/3 + 1/\sqrt{t})}^{(2\pi - 1/\sqrt{t})} + \int_{(2\pi - 1/\sqrt{t})}^{2\pi} \right) \times$$

$$\times \left(\int_0^{1/\sqrt{t}} + \int_{1/\sqrt{t}}^{(\pi/2 - 1/\sqrt{t})} + \int_{(\pi/2 - 1/\sqrt{t})}^{(\pi/2 + 1/\sqrt{t})} + \int_{(\pi/2 + 1/\sqrt{t})}^{(\pi - 1/\sqrt{t})} + \int_{(\pi - 1/\sqrt{t})}^{\pi} \right) \times$$

$$\times \exp\left(i(x-y)\rho T(\vec{\theta})\right) \cos\left(t \sin\theta_1 \sqrt{c_1 \sin^2\theta_2 + c_2 \cos^2\theta_2}\right) \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\theta_2 = \sum_{\ell=1}^{9} \left(\sum_{k=1}^{5} I_{\ell,k} \right).$$

Очевидно, что

$$\left| \sum_{\ell=0}^{4} \sum_{k=0}^{2} I_{2\ell+1, 2k+1} \right| \leq c \cdot t^{-1} . \tag{24}$$

Интегрируя по частям по θ_2 и θ_1 и пользуясь при этом тождествами

$$t\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_2(c_1-c_2)\cdot\cos\left(t\sin\theta_1\sqrt{c_1\sin^2\theta_2+c_2\cos^2\theta_2}\right)=$$

$$=\sqrt{c_1\sin^2\theta_2+c_2\cos^2\theta_2}\;\mathcal{D}_{\theta_2}\sin\left(t\sin\theta_1\sqrt{c_1\sin^2\theta_2+c_2\cos^2\theta_2}\right), \tag{25}$$

$$t\cos\theta_1\sqrt{c_1\sin^2\theta_2+c_2\cos^2\theta_2}\;\cos\left(t\sin\theta_1\sqrt{c_1\sin^2\theta_2+c_2\cos^2\theta_2}\right)=$$

$$=\mathcal{D}_{\theta_1}\sin\left(t\sin\theta_1\sqrt{c_1\sin^2\theta_2+c_2\cos^2\theta_2}\right), \tag{26}$$

как и в случае одинаковых коэффициентов, получим

$$\left|\sum_{\ell=1}^{4}\left(\sum_{\kappa=0}^{2}I_{2\ell,2\kappa+1}\right)+\sum_{\ell=0}^{4}\left(\sum_{\kappa=1}^{2}I_{2\ell+1,2\kappa}\right)\right|\leq\frac{\sqrt{c_1}\,(|x-y|\rho+1)}{\sqrt{c_2}\,(c_1-c_2)\,t},\quad t\to\infty, \tag{27}$$

$$\left|\sum_{\ell=1}^{4}\left(\sum_{\kappa=1}^{2}I_{2\ell,2\kappa}\right)\right|\leq\frac{|x-y|^2\rho^2+1}{(c_1-c_2)\,t},\quad t\to\infty. \tag{28}$$

Из неравенств (24),(27) и (28) следует справедливость (23) при значениях $n=3$ и $p=2$. Так же доказывается эта оценка для интеграла J_1 при произвольных значениях n и p. Из (23) и явного выражения $u_1^1(t,x)$ в сферических координатах следует оценка (12) для функции $u_1^1(t,x)$. Эта оценка верна и для функции $u_1^2(t,x)$, что доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. <u>Пусть</u> $\varphi_2(x)\in W^{\tau_2}_{1,n-p+2}(E_n)$, <u>где</u> $\tau_2=2m_2>2n-p+2$, <u>причем выполняется условие (5). Тогда если</u> $c_\kappa=c_j$; $\kappa,j=1,\ldots,p$, <u>то имеет место оценка</u>

$$\sup_{x\in K}|u_2(t,x)|\leq c_1(K)\,t^{-\frac{n-p}{2}}\|\varphi_2,W^{\tau_2}_{1,n-p+2}\|,\quad t\to\infty, \tag{29}$$

<u>если</u> $c_\kappa\neq c_j$ <u>при</u> $\kappa\neq j$, <u>то имеет место оценка</u>

$$\sup_{x\in K}|u_2(t,x)|\leq c_2(K)\,t^{-\frac{n-p+1}{2}}\|\varphi_2,W^{\tau_2}_{1,n-p+2}\|,\quad t\to\infty, \tag{30}$$

<u>где</u> K - <u>произвольный компакт из</u> E_n, $c_i(K)$ - <u>константы, зависящие от коэффициентов уравнения и</u> $\operatorname{diam}K$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай одинаковых коэффициентов. Пусть $c_\kappa=1$ при всех $\kappa=1,\ldots,p$. Интегрируя по частям, имеем

$$u_2(t,x)=(-1)^{\tau}\int_{|\xi|>1}\exp(ix\xi)\sin\left(t\sqrt{\sum_{\kappa=1}^{p}\xi_\kappa^2}\Big/|\xi|\right)\times$$

$$\times |\xi|^{1-2\tau}\left(\sqrt{\sum_{K=1}^{p}\xi_K^2}\right)^{-1}\widehat{\Delta^{\tau}\varphi_2}(\xi)d\xi +$$

$$+\int_{|\xi|<1} exp(ix\xi)\sin\left(t\sqrt{\sum_{K=1}^{p}\xi_K^2}/|\xi|\right)|\xi| \times$$

$$\times\left(\sqrt{\sum_{K=1}^{p}\xi_K^2}\right)^{-1}\hat{\varphi}_2(\xi)d\xi = u_2^1(t,x)+u_2^2(t,x),$$

где $2\tau=\tau_2$.

Покажем, что для функции $u_2^1(t,x)$ выполнена оценка (29). Используя условие (5), имеем

$$u_2^1(t,x)=i(-1)^{\tau+1}\cdot(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|>1} exp(ix\xi)\sin\left(\frac{t\sqrt{\sum_{K=1}^{p}\xi_K^2}}{|\xi|}\right)|\xi|^{1-2\tau}\times$$

$$\times\left[\int_{E_n} exp(-i\bar{y}'_p\bar{\xi}'_p)(\bar{y}_p\cdot\bar{\xi}_p)\left(\sqrt{\sum_{K=1}^{p}\xi_K^2}\right)^{-1}\cdot\left(\int_0^1 exp(-i\bar{y}_p\cdot\bar{\xi}_p\cdot\lambda)d\lambda\right)\Delta^{\tau}\varphi_2(y)dy\right]d\xi.$$

Тогда, переходя к сферическим координатам, функцию $u_2^1(t,x)$ можно записать в виде

$$u_2^1(t,x)=i(-1)^{\tau+1}(2\pi)^{-n}\int_1^{\infty}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{\pi} exp(ix\xi(\rho,\vec{\theta}))\times$$

$$\times\rho^{n-2\tau}\sin(t\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-p})\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin^{p-1}\theta_{n-p}\ldots\sin\theta_{n-2}\times$$

$$\times\left[\int_{E_n} exp(-i\bar{y}'_p\bar{\xi}'_p(\rho,\vec{\theta}))\cdot(y_1\sin\theta_{n-p+1}\ldots\sin\theta_{n-1}+\ldots+y_p\cos\theta_{n-p+1})\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^1 exp(-i\bar{y}_p\bar{\xi}_p(\rho,\vec{\theta})\lambda)d\lambda\right)\Delta^{\tau}\varphi_2(y)dy\right]d\rho d\vec{\theta}.$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\mathcal{J}_2=\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\exp(i(\bar{x}_p'-\bar{y}_p')\bar{\xi}_p'(\rho,\vec{\theta}))\left[\int_0^1\exp(i(\bar{x}_p-\lambda\bar{y}_p)\bar{\xi}_p(\rho,\vec{\theta}))d\lambda\right]\times$$

$$\times\sin(t\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-p})\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin^{p-1}\theta_{n-p}\times$$

$$\times(y_1\sin\theta_{n-p+1}\ldots\sin\theta_{n-1}+\ldots+y_p\cos\theta_{n-p+1})d\theta_1\ldots d\theta_{n-p}.$$

Рассуждая аналогичным образом, как при выводе оценки (13) для интеграла $\mathcal{J}_1$ из леммы 1, получаем, что на любом компакте $K\subset E_n$ для интеграла $\mathcal{J}_2$ также выполнена оценка (13). Тогда из явного выражения $u_2^1(t,x)$ в сферических координатах получаем для этой функции оценку (29). Эта оценка аналогично доказывается и для функции $u_2^2(t,x)$. Поскольку $u_2(t,x)=$ $=u_2^1(t,x)+u_2^2(t,x)$, то лемма в случае $c_k=c_j$ доказана.

Пусть теперь $c_k\neq c_j$ при $k\neq j$ и пусть $c_k>c_{k+1}$. В этом случае интеграл $\mathcal{J}_2$ будет иметь вид

$$\mathcal{J}_2=\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{\pi}\exp(i(\bar{x}_p'-\bar{y}_p')\bar{\xi}_p(\rho,\vec{\theta}))\times$$

$$\times\left[\int_0^1\exp(i(\bar{x}_p-\lambda\bar{y}_p)\bar{\xi}_p(\rho,\vec{\theta}))d\lambda\right]\sin(t\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-p}\times$$

$$\times f(\theta_{n-p+1},\ldots,\theta_{n-1},c_1,\ldots,c_p))\cdot\sin^{n-2}\theta_1\ldots\sin^{p-1}\theta_{n-p}\ldots\sin\theta_{n-2}\times$$

$$\times(y_1\sin\theta_{n-p+1}\ldots\sin\theta_{n-1}+\ldots+y_p\cdot\cos\theta_{n-p+1})d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}.$$

Интегрируя здесь по частям по θ_1, θ_2 и т.д., пользуясь тождествами, аналогичными (25) и (26), и рассуждая, как и в случае равных коэффициентов, получаем аналогичную (23) оценку и для интеграла $\mathcal{J}_2$. Из этой оценки упомянутым выше образом следует оценка (30) для функции $u_2^1(t,x)$. Она верна и для функции $u_2^2(t,x)$.

Лемма доказана.

Справедливость теоремы непосредственно следует из лемм 1 и 2. Доказательство следствия проводится так же, как и в работе [10].

§ 3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим асимптотическое поведение решений задачи Коши (3) при

$t\to\infty$, если начальные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ принадлежат к классам $W^{r_1}_{1,n-p+2(N+1)+1}(E_n)$ и $W^{r_2}_{1,n-p+2(N+2)}(E_n)$ соответственно. Докажем для решения $u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x)$ справедливость оценок (9) и (10). Схема рассуждения в целом остается такой же, что и при выводе оценок (6) и (7) из теоремы I. Поэтому остановимся лишь на существенных новых моментах. Для функций $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ доказательство оценок проведем по отдельности в следующих леммах.

Лемма 3. Пусть $\varphi_1(x)\in W^{r_1}_{1,n-p+2(N+1)}(E_n)$, где $r_1=2m_1>$ $>2(n+1+N)-p+1$, причем для функции $\varphi_1(x)$ выполнены условия (8). Тогда если $c_k=c_j$; $k,j=1,\dots,p$, то имеет место оценка

$$\sup_{x\in K}|u_1(t,x)|\le c_1(K)t^{-\frac{n-p+N+1}{2}}\|\varphi_1,W^{r_1}_{1,n-p+2(N+1)+1}\|,\ t\to\infty; \tag{31}$$

если $c_k\ne c_j$ при $k\ne j$, то имеет место оценка

$$\sup_{x\in K}|u_1(t,x)|\le c_2(K)t^{-\frac{n-p+N+2}{2}}\|\varphi_1,W^{r_1}_{1,n-p+2(N+1)+1}\|,\ t\to\infty, \tag{32}$$

где K - произвольный компакт из E_n; $c_i(K)$ - константы, зависящие от коэффициентов уравнения и $\operatorname{diam}K$.

Доказательство. Пусть $c_k=1$ при всех $k=1,\dots,p$. Функцию $u_1(t,x)$ можно представить в виде $u_1(t,x)=u_1^1(t,x)+u_1^2(t,x)$, где $u_1^i(t,x)$ определены при доказательстве леммы I. Отсюда, учитывая условие ортогональности (8), имеем

$$u_1(t,x)=u_1^1(t,x)+u_1^2(t,x)=$$

$$=(-1)^{r}\cdot(2\pi)^{-n}\int\limits_{|\xi|>1}\exp(ix\xi)\cos\Big(t\sqrt{\sum_{k=1}^{p}\xi_k^2}/|\xi|\Big)\times$$

$$\times|\xi|^{-2r}\int\limits_{E_n}\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1\exp\Big(-i\sum_{\substack{k=1\\k\ne p+1}}^{n}y_k\xi_k-i\lambda_{N+1}\dots\lambda_1y_{p+1}\cdot\xi_{p+1}\Big)\times$$

$$\times\lambda_N\cdot\lambda_{N-1}^2\dots\lambda_1^Nd\lambda_{N+1}\dots d\lambda_1(-iy_{p+1}\xi_{p+1})^{N+1}\cdot\Delta^r\varphi_1(y)dyd\xi+$$

$$+(2\pi)^{-n}\int\limits_{|\xi|<1}\exp(ix\xi)\cos\Big(t\sqrt{\sum_{k=1}^{p}\xi_k^2}/|\xi|\Big)\times$$

$$\times \int_{E_n} \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp\Big(-i \sum_{\substack{k=1\\k\neq p+1}}^{n} y_k \xi_k - i\lambda_{N+1}\dots\lambda_1 y_{p+1}\xi_{p+1}\Big)\times$$

$$\times \lambda_N \cdot \lambda_{N-1}^2 \dots \lambda_1^N d\lambda_{N+1}\dots d\lambda_1 (-iy_{p+1}\xi_{p+1})^{N+1} \Delta^r \varphi_1(y)\,dy\,d\xi.$$

Проверим для $u_1^1(t,x)$ выполнение оценки (3I), для чего перейдем к сферическим координатам

$$u_1^1(t,x) = (-1)^r (2\pi)^{-n} \int_1^\infty \int_0^{2\pi} \dots \int_0^\pi \exp(ix\xi(\rho,\vec{\theta}))\times$$

$$\times \cos(t\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p})\cdot \sin^{n-2}\theta_1\dots\sin^{p-1}\theta_{n-p}\dots\sin\theta_{n-2}\times$$

$$\times \rho^{n+N-2r}(\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p-1}\cos\theta_{n-p})^{N+1}\times$$

$$\times\Big[\int_{E_n}\int_0^1\dots\int_0^1 \exp\Big(-i\sum_{\substack{k=1\\k\neq p+1}}^{n} y_k\xi_k(\rho,\vec{\theta}) - i\lambda_{N+1}\dots\lambda_1 y_{p+1}\xi_{p+1}(\rho,\vec{\theta})\Big)\times$$

$$\times \lambda_N\cdot\lambda_{N-1}^2\dots\lambda_1^N d\lambda_{N+1}\dots d\lambda_1 (iy_{p+1})^{N+1}\Delta^r\varphi_1(y)\,dy\Big]\,d\rho\,d\vec{\theta}.$$

Выделим здесь следующий внутренний интеграл:

$$J_1 = \int_0^\pi\dots\int_0^\pi \exp(ix\xi(\rho,\vec{\theta}))\cos(t\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p})\times$$

$$\times \sin^{n-2}\theta_1\dots\sin^{p-1}\theta_{n-p}(\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p-1}\cos\theta_{n-p})^{N+1}\times$$

$$\times\Big[\int_0^1\dots\int_0^1 \exp\Big(-i\sum_{\substack{k=1\\k\neq p+1}}^{n} y_k\xi_k(\rho,\vec{\theta}) - i\lambda_{N+1}\dots\lambda_1 y_{p+1}\xi_{p+1}(\rho,\vec{\theta})\Big)\times$$

$$\times \lambda_N\lambda_{N-1}^2\dots\lambda_1^N d\lambda_{N+1}\dots d\lambda_1\Big]\,d\theta_1\dots d\theta_{n-p}.$$

Используя тождества

$$\cos(t\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p}) = \frac{\mathcal{D}_{\theta_{n-p}}\sin(t\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p})}{t\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p-1}\cos\theta_{n-p}} \quad - \tag{33}$$

$$-\sin(t\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p}) = \frac{\mathcal{D}_{\theta_{n-p}}\cos(t\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p})}{t\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-p-1}\cos\theta_{n-p}} \tag{34}$$

и рассуждая аналогичным образом, как при доказательстве леммы I, можно показать, что для любого компакта $K\subset E_n$ справедливо неравенство

$$\sup_{x\in K} |J_1| \leq c(K)\cdot\left((|x-y|\rho)^{n-p+N+1}+1\right)t^{-\frac{n-p+N+1}{2}}, \quad t\to\infty. \qquad (35)$$

Так как выкладки при получении этой оценки ничем существенным не отличаются от проведенных в доказательстве леммы I, то мы их опустим.

Из оценки (35) и явного выражения $u_1^1(t,x)$ в сферических координатах следует оценка (3I) для функции $u_1^1(t,x)$. Так же можно показать, что для функции $u_1^2(t,x)$ верна оценка (3I). Итак, в случае равных коэффициентов лемма доказана.

Пусть $c_k\neq c_j$, $c_k>c_{k+1}$. В этом случае подынтегральная функция в J_1

$$\cos\left(t\sqrt{\sum_{k=1}^{p} c_k\cdot\xi_k^2}\Big/|\xi|\right)=F(t,\xi)$$

после перехода к сферическим координатам будет иметь вид

$$F(t,\xi(\rho,\vec{\theta}))=\cos(t\cdot\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-p}\times$$

$$\times f(\theta_{n-p+1},\ldots,\theta_{n-1},c_1,\ldots,c_p))$$

и для нее справедливо тождество

$$F(t,\xi(\rho,\vec{\theta}))\cdot t\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-p-1}\cos\theta_{n-p}\times$$

$$\times f(\theta_{n-p+1},\ldots,\theta_{n-1},c_1,\ldots,c_p)=$$

$$=\mathcal{D}_{\theta_{n-p}}\sin(t\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-p}\cdot f(\theta_{n-p+1},\ldots,\theta_{n-1},c_1,\ldots,c_p)).$$

Для функции $f(\theta_{n-p+1},\ldots,\theta_{n-1},c_1,\ldots,c_p)$ имеет место неравенство (22). Отсюда, повторяя предыдущие выкладки, получаем оценку (32) для функций $u_1^1(t,x)$ и $u_1^2(t,x)$ для произвольного компакта $K\subset E_n$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\varphi_2(x)\in W^{r_2}_{1,n-p+2(N+2)}(E_n)$, где $r_2=2m_2>2(n+1+N)-p+2$, причем для функции $\varphi_2(x)$ выполнены условия (5) и (8). Тогда если $c_k=c_j$, $k,j=1,\ldots,p$, то верна оценка

$$\sup_{x\in K}|u_2(t,x)|\le c_1(K)\cdot t^{-\frac{n-p+N+1}{2}}\|\varphi_2, W^{\tau_2}_{1,n-p+2(N+2)}\|, \quad t\to\infty;$$

<u>если</u> $c_k\ne c_j$ <u>при</u> $k\ne j$, <u>то верна оценка</u>

$$\sup_{x\in K}|u_2(t,x)|\le c_2(K)\cdot t^{-\frac{n-p+N+2}{2}}\|\varphi_2, W^{\tau_2}_{1,n-p+2(N+2)}\|, \quad t\to\infty;$$

<u>где</u> K - <u>произвольный компакт из</u> E_n , $c_i(K)$ - <u>константы, зависящие от коэффициентов уравнения и</u> $\operatorname{diam} K$.

Доказательство проводится аналогичным образом, как в предыдущей лемме. Утверждение теоремы 2 непосредственно вытекает из лемм 3 и 4.

Следствие доказывается так же, как и следствие из теоремы I.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю С.В.Успенскому за постановку задачи и постоянное внимание, а также Г.В. Демиденко за полезные беседы.

Литература

I. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики.- Изв. АН СССР. Сер. мат., I954, т. I8, № I, с. 3-50.

2. Александрян Р.А., Березанский Ю.М., Ильин В.А., Костюченко А.Г. Некоторые вопросы спектральной теории для уравнений с частными производными.- В кн.: Дифференциальные уравнения. Труды симпозиума.- М.: Наука, I970, с. 3 - 35.

3. Дезин А.А., Масленникова В.Н. Неклассические граничные задачи.- В кн.: Дифференциальные уравнения. Труды симпозиума.- М.: Наука, I970, с. 8I - 95.

4. Зеленяк Т.И., Михайлов В.П. Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t\to\infty$.- В кн.: Дифференциальные уравнения. Труды симпозиума.- М.: Наука, I970, с. 96-II8.

5. Масленникова В.Н. Оценки в L_p и асимптотика при $t\to\infty$ решения задачи Коши для системы Соболева.- Труды Матем. ин-та АН СССР, I968, т.I03, с. II7-I4I.

6. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. Системы Соболева в случае двух пространственных переменных.- Докл. АН СССР, I975, т. 22I, № 3, с. 563-566.

7. Масленникова В.Н., Боговский М.Е. Асимптотическое поведение решений краевых задач для системы Соболева в полупространстве и явление погранслоя.- В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики.- М.: Наука, 1978, с. 109-152.

8. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О смешанных краевых задачах для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л. Соболева).Новосибирск, 1980, № 2, с. 92-115.

9. Демиденко Г.В. Общие смешанные задачи для уравнений с переменными коэффициентами, не разрешенных относительно старшей производной: Автореферат на соиск. учен. степ. к.ф.-м. наук (01.01.02).- Новосибирск, Б.и., 1981.- 120 с.

10. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О поведении на бесконечности решений одной задачи С.Л.Соболева.- Сиб. мат. журн., 1983, т. 24, № 5, с. 199 - 210.

11. Нафиков Ш. Г. Об оценках решений первой краевой задачи для уравнений типа Соболева.- В кн.: Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики (Труды семинара С.Л. Соболева). Новосибирск, 1983, № 1, с. 90-107.