УДК 517.956.4

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М. М. Лаврентьев - мл. (Новосибирск)

Настоящая работа посвящена изучению поведения решений смешанных задач для нелинейных параболических уравнений второго порядка с одной пространственной переменной при неограниченном возрастании времени. Центральным моментом исследования является построение на решении рассматриваемой задачи, которое предполагается существующим, монотонной функции t специального вида так называемого функционала Ляпунова. Идея применения этой методики для изучения асимптотики и получения априорных оценок принадлежит Т.И. Зеленяку. Как показано в [1], существование таких функционалов Ляпунова в той или иной форме тесно связано со свойствами стабилизации при $t \to \infty$ равномерно для $t \geq 0$ ограниченных решений вышеуказанных задач к стационарным решениям и устойчивостью последних. В автономном случае, когда параметры задач не зависят явно от временной переменной, применение метода функционалов позволило дать достаточно полную картину поведения решений в целом по времени [1]. Эта же техника позволяет рассмотреть некоторые неавтономные ситуации [2,3].

Нижеследующие результаты относятся к случаю автономных уравнений с зависящими от t граничными условиями, не охваченному ранее. Главной особенностью применения указанной методики является зависимость построенных функционалов не только от коэффициентов задачи, но и от явного вида решения. Это не позволяет указать явные формулы даже для конкретных ситуаций, но в ряде случаев оказывается достаточным для справедливости вывода о стабилизации при $t \to \infty$ изучаемого решения к стационарному.

Итак, для $0 < x < 1$, $t \geq 0$ будем рассматривать задачу

$$u_t = a(x,u,u_x)u_{xx} + b(x,u,u_x),$$

$$u|_{x=0} = \theta_0(t), \quad u|_{x=1} = \theta_1(t), \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x).$$

Здесь $\theta_j(t) \in C^{1+\alpha}$, a и b – дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, причем $a \geq \delta > 0$.

Будем считать, что существуют пределы функций $\theta_j(t)$ при $t \to \infty$. Не ограничивая общности, положим

$$\lim_{t\to\infty} \theta_j(t) = 0. \tag{2}$$

Такое предположение действительно не приводит к сужению класса рассматриваемых задач, поскольку если предельные значения $\tilde{\theta}_j$ отличны от 0, то для функции $v(x,t) = u(x,t) - (1-x)\tilde{\theta}_0 - x\tilde{\theta}_1$ получим задачу вида (I), граничные условия которой уже удовлетворяют (2).

Допустим, что для зафиксированных данных $u_0(x)$ существует решение $u(x,t)$ задачи (I), причем равномерно для $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\sup_t \|u(x,t)\|_{C^{2+\alpha}(0,1)} + \sup_{x,t}(|u_t| + |u_{xt}|) \leq K. \tag{3}$$

Пусть, кроме того, каждая из граничных функций подчиняется одному из условий

$$\int_0^\infty |\theta_j(\tau)|\,d\tau < \infty, \tag{4}$$

$$\int_0^\infty |\theta_j'(\tau)|\,d\tau < \infty. \tag{5}$$

Отметим, что неравенство (5) справедливо, если, например, $\theta_j(\tau)$ – монотонная функция.

Определение. Функцию $v(x) \in C^{2+\alpha}(0,1)$ назовем стационарным решением задачи (I), если она удовлетворяет уравнению (I) и

$$v(0) = v(1) = 0. \tag{6}$$

Теорема I. <u>Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (I) и выполнены ограничения (2)-(5). Тогда всякий частичный предел</u>

$$v(x) = \lim_{t_i\to\infty} u(x,t_i)$$

<u>есть стационарное решение задачи (I)</u>.

Доказательству предпосылается

Лемма I. <u>При сформулированных условиях (2)-(5) найдутся такие функции</u> $\rho(x,\xi,\eta)$, $\Phi(t,x,\xi,\eta)$, <u>что на решении</u> $u(x,t)$ <u>задачи (I) справедливо неравенство</u>

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \Phi(t,x,u,u_x)dx \leq -\int_0^1 \rho(x,u,u_x)\,u_t^2 dx, \tag{7}$$

причем

$$\rho \geq \delta > 0. \tag{8}$$

Доказательство. Следуя [I], в предположении, что указанные ρ и Φ существуют, будем получать для них уравнения. После дифференцирования под знаком интеграла в левой части (7) и интегрирования по частям в силу (I) из (7) получим

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial u_x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial u_x}u_x - \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_x^2}u_{xx}\right)u_t dx +$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial u_x}u_t\Big|_{x=0}^{1} \leq -\int_0^1 \rho(x,u,u_x)(au_{xx}+b)u_t dx - \int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial t}dx. \tag{9}$$

Для удовлетворения (9) потребуем, чтобы

$$\frac{\partial^2\Phi(t,x,\xi,\eta)}{\partial\eta^2} = \rho a(x,\xi,\eta), \tag{IO}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial\eta} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\partial\eta}\eta = -\rho b(x,\xi,\eta)\cdot\omega(\xi,\eta), \tag{II}$$

$$\frac{\partial\Phi(t,x,u,u_x)}{\partial u_x}\Big|_{x=0}^{1} = 0, \tag{I2}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial\Phi(t,x,u,u_x)}{\partial t}dx \leq 0. \tag{I3}$$

Отметим, что равенства (IO), (II) должны выполняться при любых ξ и η, а (I2), (I3) лишь на решениях рассматриваемой задачи.

Множитель в правой части (II) $\omega(\xi,\eta)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая финитная функция своих аргументов, обладающая свойством

$$\omega(\xi,\eta) \equiv 1 \tag{I4}$$

для $|\xi| \leq K$, $|\eta| \leq K$ с константой K из (3).

Согласно (3),(I4), выполнение условий (IO)-(I3) влечет справедливость (9) на решениях задачи (I), и, следовательно, будет иметь место (7).

Не повторяя имеющихся в литературе выкладок [I], укажем, что удовлетворяющие (IO),(II) ρ и Φ имеют вид

$$\Phi(t,x,\xi,\eta) = \Phi_1(x,\xi,\eta) + z_1(t,x)\eta + z_3(t,\xi), \qquad (15)$$

$$\Phi_1(x,\xi,\eta) = \int_0^{\eta} (\eta - \zeta)\rho a(x,\xi,\zeta)d\zeta + z_2(x,\xi), \qquad (16)$$

$$\rho(x,\xi,\eta) = \left(\Psi(y_0,y_1) e^{-\int_{x_0}^{x} F(x_0,\zeta,y_0,y_1)d\zeta} \right)\Bigg|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=A(x,\xi,\eta) \\ y_1=B(x,\xi,\eta)}}, \qquad (17)$$

где $\Psi(y_0,y_1)$ - произвольная гладкая положительная функция своих аргументов,

$$F(x_0,x,y_0,y_1) = \frac{a_x + \eta a_\xi(x,\xi,\eta) - (b\omega)_\eta}{a(x,\xi,\eta)}\Bigg|_{\substack{\xi = \varphi(x_0,x,y_0,y_1), \\ \eta = \varphi_x(x_0,x,y_0,y_1)}}$$

$$A(x,\xi,\eta) = \varphi(x,0,\xi,\eta),$$

$$B(x,\xi,\eta) = \varphi_{x_0}(x,x_0,\xi,\eta)\big|_{x_0=0},$$

функции z_i должны удовлетворять уравнению

$$z_{2\xi} + z_{3\xi} - z_{1x} = -\rho b(x,\xi,0)\cdot\omega(\xi,0). \qquad (18)$$

Здесь $\varphi(x_0,x,y_0,y_1)$ является решением задачи Коши

$$y'' = -\omega(y,y')\frac{b(x,y,y')}{a(x,y,y')}, \quad y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_1, \qquad (19)$$

которое, как хорошо известно, определено и регулярно для всех $x,x_0 \in [0,1]$ и любых $-\infty < y_i < \infty$ в силу финитности $\omega(y,y')$.

Легко видеть, что выбор в (17) положительной функции Ψ гарантирует справедливость оценки (8) на решении задачи (1).

Подберем в (15),(16) такие удовлетворяющие (18) z_i, чтобы выполнялись соотношения (12),(13). Для этого положим

$$z_1(x,t) = (x-1)\left(\int_0^{u_x}\rho a d\zeta\right)\Bigg|_{x=0} - x\left(\int_0^{u_x}\rho a d\zeta\right)\Bigg|_{x=1} = (x-1)\gamma_0(t) + x\gamma_1(t), \qquad (20)$$

где функции $\gamma_i(t)$ определяются через ρ, a и значения $\theta_i(t)$, $u_x(x,t)\big|_{x=i}$. Согласно (3) мы можем гарантировать неравенство

$$|\gamma_j(t)| + |\gamma_j'(t)| \leq K_1. \tag{21}$$

Для удовлетворения (18) выберем в (15),(16)

$$z_2(x,\xi) = -\int_0^\xi \rho b(x,\zeta,0)\cdot\omega(\zeta,0)d\zeta, \tag{22}$$

$$z_3(t,\xi) = (\gamma_0(t)+\gamma_1(t))\xi + \int_t^\infty [\gamma_0'(\tau)\theta_0(\tau)+\gamma_1'(\tau)\theta_1(\tau)]d\tau, \tag{23}$$

причем сходимость интеграла в правой части (23) вытекает из оценки (21) и условий (4),(5). Действительно, рассмотрим выражение

$$\int_t^\infty \gamma_j'(\tau)\theta_j(\tau)d\tau. \tag{24}$$

Если для данного j функция $\theta_j(t)$ обладает свойством (4), то благодаря (21) заключаем, что этот интеграл сходится при любом $t \geq 0$. Если же $\theta_j(t)$ удовлетворяет (5), то в силу (2), формально интегрируя по частям, приводим выражение (24) к виду

$$-\gamma_j(t)\theta_j(t) - \int_t^\infty \gamma_j(\tau)\theta_j'(\tau)d\tau,$$

из которого в силу (5),(21) снова следует сходимость (24).

Из (15),(20),(23) имеем, что

$$\int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial t}dx = \int_0^1 ((x-1)\gamma_0'(t) + x\gamma_1'(t))u_x dx +$$

$$+ \int_0^1 (\gamma_0'(t)+\gamma_1'(t))u dx - \gamma_0'(t)\theta_0(t) - \gamma_1'(t)\theta_1(t).$$

Интегрируя по частям, теперь легко убедиться, что согласно (1) имеет место равенство

$$\int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial t}dx = 0,$$

т.е., в частности, выполнено неравенство (13).

Как уже отмечалось, соотношения (10)-(13) являются достаточными условиями справедливости (7).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Дальнейшие рассуждения представляют собой естественное развитие выкладок, позволяющих доказать лемму 8.2 из [1].

Рассмотрим произвольный частичный предел

$$\sigma(x) = \lim_{t_i\to\infty} u(x,t_i).$$

В силу оценки (3)

$$\| u(x,t_i) - v(x) \|_{C^{2+\alpha}(0,1)} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0. \tag{25}$$

Покажем, что тогда для некоторого $\tau > 0$

$$u(x, t_i + t) \xrightarrow[t_i \to \infty]{} v(x, t), \tag{26}$$

где

$$v_t = a(x, v, v_x) v_{xx} + b(x, v, v_x),$$

$$v|_{x=j} = 0, \quad j = 0,1; \quad v|_{t=0} = v(x), \tag{27}$$

причем $0 \leq t \leq \tau$.

Действительно, пусть $v(x,t)$ является решением задачи (27). Тогда, как нетрудно видеть, функцию $w_i(x,t) = u(x,t_i+t) - v(x,t)$ можно отыскивать исходя из соотношений

$$w_{it} = a_{i1}(x,t) w_{ixx} + a_{i2}(x,t) w_{ix} + a_{i3}(x,t) w_i,$$

$$w_i|_{x=0} = \theta_0(t_i+t), \quad w_i|_{x=1} = \theta_1(t_i+t),$$

$$w_i|_{t=0} = u(x,t_i) - v(x),$$

где коэффициенты $a_{ik}(x,t)$, определяемые через $a, b, u(x, t_i+t)$, $v(x,t)$, согласно (3) равномерно относительно i непрерывны по Гёльдеру. Тогда, как хорошо известно (см., например, [4]),

$$\sup_{x,t} |w_i(x,t)| \leq K_2 \cdot \left(\max_{i,j,t} |\theta_j(t_i+t)| + \max_{i,x} |u(x,t_i) - v(x)| \right),$$

причем K_2 зависит от τ, $\sup |a_{i3}|$ и может быть выбрано не зависящим от i . Вспоминая условие (2), из (25) заключаем, что последняя оценка гарантирует справедливость (26).

Положим

$$J(t) = \int_0^1 \Phi(t, x, u(x,t), u_x(x,t)) dx, \tag{28}$$

где Φ строится в соответствии с (7) по формулам, полученным при доказательстве леммы I.

Из (7),(8) следует монотонность $J(t)$. Кроме того, эта функция ограничена при $t \geq 0$. Действительно, используя соотношения (3),(I6),(I7), (22), легко удостовериться в ограниченности слагаемого Φ_1 в (I5). Согласно (2I), $|z_1|$ не превосходит некоторой константы. Из рассуждений, проведенных при доказательстве леммы I для исследования сходимости интеграла в правой части (23), следует, в частности, его ограниченность в силу (4), (5). Таким образом, все слагаемые правой части (I5) на решении задачи (I) не превосходят по модулю некоторой величины, и функция $J(t)$ ограничена. Следовательно, согласно ее монотонности, существует

$$J_\infty = \lim_{t\to\infty} J(t).$$

Из (20),(23) имеем

$$\int_0^1 [z_1(x,t)u_x + z_3(t,u)]dx = \int_0^1 [(x-1)\gamma_0(t) + x\gamma_1(t)]u_x dx +$$

$$+\int_0^1 (\gamma_0(t) + \gamma_1(t))u dx + \int_t^\infty (\gamma_0'(\tau)\theta_0(\tau) + \gamma_1'(\tau)\theta_1(\tau))d\tau =$$

$$= \gamma_0(t)\theta_0(t) + \gamma_1(t)\theta_1(t) + \int_t^\infty (\gamma_0'\theta_0 + \gamma_1'\theta_1)d\tau,$$

т.е. вышеотмеченная сходимость интеграла (23) и соотношения (2),(2I) гарантируют выполнение

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 (z_1 u_x + z_3)dx = 0.$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\lim_{t\to\infty} J(t) = \lim_{t_i\to\infty} J(t_i+t) = \int_0^1 \Phi_1(x,\sigma(x,t),\sigma_x(x,t))dx = J_\infty. \tag{29}$$

Воспользовавшись (7), мы получим, что

$$0 = \frac{d}{dt}\int_0^1 \Phi_1(x,\sigma,\sigma_x)dx \leqslant -\int_0^1 \rho(x,\sigma,\sigma_x)\cdot \sigma_t^2 dx$$

и, согласно (8), в (27) $\sigma_t \equiv 0$, т.е. частичный предел $\sigma(x)$ в (25) является, по определению I, стационарным решением задачи (I).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I. Теорема I остается справедливой в случае краевых условий (I) вида

$$u_x - \psi_j(u)|_{x=j} = \beta_j(t),$$

где $\beta_j(t)$ удовлетворяет одному из неравенств (4), (5).

Чтобы убедиться в этом, надо повторить все проведенные выше рассуждения, полагая в (20), (23)

$$z_1(x,u,t) = (x-1)\int\limits_0^{\psi_0(u)+\beta_0(t)} \rho a\Big|_{x=0} d\zeta - x\int\limits_0^{\psi_1(u)+\beta_1(t)} \rho a(1,u,\zeta)d\zeta,$$

$$z_3(t,u) = \int\limits_0^u z_{1x}(x,\xi,t)d\xi + f(t),$$

где

$$f(t) = \int\limits_t^{\infty}\left(\int\limits_0^{u(x,\tau)} \frac{\partial z_1(x,\xi,\tau)}{\partial\tau}d\xi\right)\Bigg|_{x=0}^{1} d\tau. \qquad (30)$$

Сходимость интеграла (30) показывается так же, как в случае (23). Действительно, легко видеть, что

$$\frac{\partial z_1(x,\xi,\tau)}{\partial\tau}\Bigg|_{x=j} = -\rho a\left(j,\xi,\psi_j(\xi)+\beta_j(\tau)\right)\cdot\beta_j'(\tau),$$

т.е. согласно (3) под знаком интеграла (30) стоит сумма произведений ограниченных в C^1 функций на $\beta_j'(\tau)$.

Выполнение неравенства (I3) следует из того, что

$$z_1(x,u,t)\cdot u_x + z_3(t,u) - f(t) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^{u(x,t)} z_1(x,\xi,t)d\xi.$$

Благодаря этому же свойству можно показать, что

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^1 (z_1\cdot u_x + z_3)dx = 0$$

и имеет место (29).

С л е д с т в и е. <u>Если множество ограниченных стационарных решений задачи (I)</u> $\{v_k(x)\}$ <u>конечно, то найдется такая функция</u> $v_{k_0}(x)$, <u>что</u>

$$\lim_{t\to\infty}\|u(x,t) - v_{k_0}(x)\|_{C^{2+\alpha}(0,1)} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Идея дальнейших рассуждений принадлежит Т.И. Зеленяку. Допустим, что множество частичных пределов решения $u(x,t)$ задачи (I) состоит по крайней мере из двух функций $v_{k_1}(x)$ и $v_{k_2}(x)$, каждая из которых по теореме I является стационарным решением. В силу конечности количества функций $v_k(x)$, найдутся такие точка x^* и число v^* , что для всех k верно $v_k(x^*) \neq v^*$ и кроме того, v^* лежит между $v_{k_1}(x^*)$ и $v_{k_2}(x^*)$. Из гладкости функции $u(x,t)$ (3)

следует, что для некоторой последовательности $t_i \to \infty$ имеет место равенство

$$\lim_{t_i \to \infty} u(x^*, t_i) = v^*.$$

Выбрав из этой последовательности подпоследовательность $\{t_{i_j}\}$, для которой существует $\lim\limits_{t_{i_j} \to \infty} u(x, t_{i_j})$, мы получим, что этот предел есть стационарное решение задачи, принимающее в точке $x = x^*$ значение v^*. Как указывалось выше, этого быть не может.

Следствие доказано.

Т е о р е м а 2. <u>Если в условиях теоремы I</u>

$$|\theta_0(t)| + |\theta_1(t)| < \frac{K_3}{1 + t^{1+\varepsilon}},$$

<u>то найдется такое стационарное решение задачи (I)</u> $v(x)$, <u>что</u>

$$\lim_{t \to \infty} \| u(x,t) - v(x) \|_{C^{2+\alpha}(0,1)} = 0.$$

<u>При этом если</u> $|\theta_j(t)| \leq \dfrac{K_3}{1 + t^{n+\varepsilon}}$, $n \geq 1$,

<u>то</u>

$$\| u(x,t) - v(x) \|_{L_1(0,1)} \leq \frac{K_4}{1 + t^{\frac{n-1+\varepsilon}{2}}},$$

<u>если же</u> $|\theta_j(t)| \leq K_3 \cdot e^{-\lambda t}$, <u>то</u>

$$\| u(x,t) - v(x) \|_{L_1(0,1)} \leq K_4 \cdot e^{-\lambda_1 t}.$$

Для того чтобы убедиться в справедливости этих утверждений, надо, опираясь на построенный в лемме I функционал (28), с незначительными изменениями повторить доказательства теорем 9.I, 9.2 из [I] и теоремы 3 главы I из [2].

Л и т е р а т у р а

I. Б е л о н о с о в В.С., З е л е н я к Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений.- Новосибирск: НГУ, 1975.- 156 с.

2. З е л е н я к Т.И. Качественная теория краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка параболического типа.- Новосибирск: НГУ, 1972. - 148 с.

3. П р о в о р о в а О.Г. К вопросу о поведении при большом времени решений параболических уравнений.- Дифференциальные уравнения, т.5, № I, 1969.- с.I08-II4.

4. Л а д ы ж е н с к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.- М.: Наука, 1967.- 736 с.