УДК 517.946

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. Камышников (Новосибирск)

В области $Q=(0,T)\times(0,1)\times(0,1)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv K(x,t)u_t + i(u_{xx}-u_{yy}) + a(x,t)u = f, \tag{I}$$

где $x\in(0,1)$, $y\in(0,1)$, $t\in(0,T)$.

Относительно функций $K(x,t)$ и $a(x,t)$ будем предполагать следующее: $K(x,t), a(x,t)$ - вещественные, $K(x,t), a(x,t)\in C^1([0,1]\times[0,T])$,

$$K(x,0)\leqslant 0, \quad K(x,T)\geqslant 0.$$

Уравнение вида (I) при $K=1$ возникает в теории распространения света в турбулентной среде.

В случае $K(x,t)\geqslant\delta>0$ краевые задачи для уравнения вида (I) в неограниченных областях изучались в работах [1,2], а в случае ограниченных областей в [3].

К р а е в а я   з а д а ч а . Найти в области Q решение уравнения (I), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0. \tag{2}$$

Л е м м а I . Пусть выполнено условие $2a-|K_t|\geqslant\delta>0$. Тогда решение задачи (I),(2) из класса $u, u_t, u_{xx}, u_{yy}\in L^2(Q)$ единственное.

Доказательство этой леммы следует из интегрирования по частям тождества

$$\int_0^t\int_0^1\int_0^1 (Lu\bar{u}+\overline{Lu}u)\,dx\,dy\,d\tau = 0. \tag{3}$$

Решение задачи (I),(2) будем искать в виде ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x,t)\,\varphi_n(y),$$

где $\varphi_n(y)=\sqrt{2}\,\sin n\pi y$, а $V_n(x,t)\in W^{1,2}_{2,t,x}(Q_1)$ определяются как решения в области $Q_1=(0,T)\times(0,1)$ следующей задачи:

$$MV_n \equiv KV_{nt}+i\,(V_{nxx}+\lambda_n^2 V_n)+aV_n=f_n\,, \tag{4}$$

$$V_n\big|_{x=0}=V_n\big|_{x=1}=0,$$

$$f_n=\int_0^1 f(x,y,t)\varphi_n(y)\,dy,\quad \lambda_n^2=\pi^2 n^2. \tag{5}$$

Наравне с задачей (4),(5) рассмотрим следующую задачу ($\varepsilon>0$):

$$M_\varepsilon V_{n\varepsilon}\equiv \varepsilon V_{n\varepsilon tt}+V_{n\varepsilon xx}+\lambda_n^2 V_{n\varepsilon}-iKV_{n\varepsilon t}-iaV_{n\varepsilon}=-if_n\,, \tag{6}$$

$$V_{n\varepsilon}\big|_{x=0}=V_{n\varepsilon}\big|_{x=1}=0\,,\quad V_{n\varepsilon t}\big|_{t=0}=V_{n\varepsilon t}\big|_{t=T}=0. \tag{7}$$

Разрешимость задачи (6),(7) при каждом $\varepsilon>0$ следует из общей теории краевых задач для эллиптических уравнений [4] . Причем если $f_n\in W^{0,1}_{2,x,t}$, то решение $V_{n\varepsilon t}\in W_2^2(Q_1)$.

Л е м м а 2 . <u>Пусть выполнено условие</u> $2a-|K_t|\geq\delta>0$. <u>Тогда для решения задачи (6),(7) справедливы следующие оценки</u>:

$$\int_{Q_1}|V_{n\varepsilon}|^2dxdt\leq c\int_{Q_1}|f_n|^2dxdt,$$

$$\int_{Q_1}|V_{n\varepsilon t}|^2dxdt\leq c\int_{Q_1}\left[|f_n|^2(1+\lambda_n^4)+|f_{nt}|^2\right]dxdt,$$

$$\int_{Q}|V_{h\varepsilon xx}|^2dxdt\leq c\int_{Q_1}\left[|f_n|^2(1+\lambda_n^4)+|f_{nt}|^2\right]dxdt,$$

<u>где постоянная</u> C <u>не зависит от</u> ε,h .

Д о к а з а т е л ь с т в о . В результате интегрирования по частям выражения

$$\int_{Q_1}\left[\overline{M_\varepsilon V_{n\varepsilon}}\,(iV_{n\varepsilon})+M_\varepsilon V_{n\varepsilon}(-i\overline{V}_{n\varepsilon})\right]dxdt=\int_{Q_1}\left[-\bar{f}_n V_{n\varepsilon}-f_n\overline{V}_{n\varepsilon}\right]dxdt$$

получим

$$-\int_{Q_1}(2a-K_t)|V_{n\varepsilon}|^2dxdt+\int_0^1 KV_{n\varepsilon}^2\big|_{t=0}dx-\int_0^1 KV_{n\varepsilon}^2\big|_{t=T}dx=$$

$$= \int_Q (-\bar{f}_n V_{n\varepsilon} - f_n \bar{V}_{n\varepsilon})dxdt. \tag{8}$$

Из тождества (8) и условий на функции a и K следует первая оценка леммы 2.

Для доказательства второй оценки леммы 2 заметим, что функции $g = V_{n\varepsilon t}$ в области Q_1 являются решениями следующей задачи:

$$\varepsilon g_{tt} + g_{xx} + \lambda_n^2 g - iKg_t - iag - iK_t g - ia_t V_{n\varepsilon} = -if_{nt}, \tag{9}$$

$$g|_{x=0} = g|_{x=1} = g|_{t=0} = g|_{t=T} = 0. \tag{10}$$

Тогда из тождества

$$\int_{Q_1} \Big[(\varepsilon \bar{g}_{tt} + \bar{g}_{xx} + \lambda_n^2 \bar{g} + iK\bar{g}_t + ia\bar{g} + iK_t\bar{g} + ia_t \bar{V}_{n\varepsilon}) ig +$$

$$+ (\varepsilon g_{tt} + g_{xx} + \lambda_n^2 g - iKg_t - iag - iK_t g - ia_t V_{n\varepsilon})(-i\bar{g}) \Big] dxdt =$$

$$= \int_{Q_1} (-\bar{f}_{nt} g - f_{nt}\bar{g})dxdt$$

после интегрирования по частям с учетом граничных условий получим вторую оценку из леммы 2.

Доказательство последней оценки из леммы 2 следует из первых двух оценок и того, что

$$\varepsilon V_{n\varepsilon tt} + V_{n\varepsilon xx} \equiv -if_n + iaV_{n\varepsilon} + iKV_{n\varepsilon t} - \lambda_n^2 V_n \equiv \Phi \in L^2(Q_1),$$

$$V_{n\varepsilon}|_{x=0} = V_{n\varepsilon}|_{x=1} = 0, \quad V_{n\varepsilon t}|_{t=0} = V_{n\varepsilon t}|_{t=T} = 0.$$

Теорема I. <u>Пусть выполнено условие</u> $2a - |K_t| \geq \delta > 0$. <u>Тогда для любой функции</u> $f_n \in W^{0,1}_{2,x,t}$ <u>существует единственное решение задачи (4),(5) из</u> $W^{1,2}_{2,t,x}$, <u>для которого справедливы оценки леммы 2</u>.

Доказательство. Существование решения задачи (4), (5) устанавливается предельным переходом при $\varepsilon \to 0$. В самом деле, на основании оценок из леммы 2 следует, что из последовательности $V_{\varepsilon n}$ можно извлечь подпоследовательность $V_{n\varepsilon_k}$, которая при $\varepsilon_k \to 0$ будет слабо сходиться к функции V_n в $W^{1,2}_{2,t,x}$.

Далее, подпоследовательность $V_{n\varepsilon_k}$ почти всюду в Q_1 удовлетворяет задаче (6),(7) с ε, равным ε_k, т.е.

$$M_{\varepsilon_k} V_{n\varepsilon_k} = -if_n,$$

$$V_{n\varepsilon_k}|_{x=0} = V_{n\varepsilon_k}|_{x=1} = V_{n\varepsilon_k t}|_{t=0} = V_{n\varepsilon_k t}|_{t=T} = 0.$$

Тогда

$$-\int_{Q_1}\varepsilon_k\overline{V}_{n\varepsilon_k t}\psi dQ_1+\int_{Q_1}(\overline{V}_{n\varepsilon_k xx}+\lambda_n^2\overline{V}_{n\varepsilon_k}+ik\overline{V}_{n\varepsilon_k t}+$$
$$+ia\overline{V}_{n\varepsilon_k})\psi dQ_1 = \int_{Q_1} i\overline{f}_n\psi dQ_1 \qquad (II)$$

для любой $\psi\in W^{1,2}_{2t,x}(Q_1)$.

Из (II) и того факта, что

$$\varepsilon_k\int_{Q_1}\overline{V}_{n\varepsilon_k t}\,\psi dQ_1\to 0,$$

следует, что предельная функция V_n удовлетворяет тождеству

$$\int_{Q_1}(\overline{V}_{nxx}+\lambda_n^2\overline{V}_n+iK\overline{V}_{nt}+ia\overline{V}_n)\psi dQ_1=\int_{Q_1}i\overline{f}_n\psi dQ_1,$$

а следовательно, функция V_n является решением задачи (4),(5) из указанного класса.

Единственность решения вытекает из интегрирования по частям выражения

$$\int_{Q_1}(\overline{MV_n}V_n+MV_n\overline{V}_n)dxdt=0.$$

Л е м м а 3 . <u>Пусть правая часть уравнения такова, что</u>

$$f,f_t,D_y^4 f\in L^2(Q),$$

$$f|_{y=0}=f|_{y=1}=f_t|_{y=0}=f_t|_{y=1}=f_{yy}|_{y=0}=f_{yy}|_{y=1}=0.$$

<u>Тогда для</u>

$$f_n=\int_0^1 f(x,y,t)\varphi_n(y)dy$$

<u>справедлива оценка</u>

$$\int_Q|f_n|^2dxdt\le\frac{C}{1+n^8}\int_Q(D_y^4 f)^2dxdydt,$$

<u>где</u> C <u>не зависит от</u> n .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из определения f_n и того, что φ_n является решением задачи $\varphi_n''+\lambda_n^2\varphi_n=0$, $\varphi_n(0)=\varphi_n(1)$, следует

$$f_n(x,t)=\frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^1 D_y^4 f\varphi_n dy.$$

Тогда

$$\int_Q|f_n|^2dxdt\le\frac{C}{1+n^8}\int_Q(D_y^4 f)^2dxdydt.$$

Л е м м а 4 . Если выполнены условия лемм I,3, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n(x,t)\varphi_n(y)$$

сходится в $L^2(Q)$ вместе со своими производными первого порядка по t и вторыми по переменным x и y.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Обозначим через

$$u^N=\sum_{n=1}^{N} V_n(x,t)\varphi_n(y).$$

Тогда, используя лемму 3, нетрудно показать, что

$$\int_Q |u^N|^2 dxdydt \le c\sum_{n=1}^{N}\int_{Q_1}|V_n|^2(1+n^{2\alpha})dxdt \le$$

$$\le c\sum_{n=1}^{N}\int_{Q_1}|f_n|^2 dxdt(1+n^{2\alpha}) \le c\sum_{n=1}^{N}\frac{1+n^{2\alpha}}{1+n^{8}},$$

$$\frac{3}{2}>2\alpha>1.$$

Аналогично показывается, что

$$\int_Q |u^N_{xx}|^2 dxdydt+\int_Q |u^N_t|^2 dxdydt \le c\sum_{n=1}^{N}\int_{Q_1}\Big[|f_n|^2(1+n^{4+2\alpha})+$$

$$+|f_{nt}|^2(1+n^{2\alpha})\Big]dxdt \le c\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1+n^{4+2\alpha}}{1+n^{8}}+\frac{1+n^{2\alpha}}{1+n^{8}}\right)\le const,$$

$$\int_Q |u^N_{yy}|^2 dxdydt \le c\int_Q\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^4|V_n|^2(1+n^{2\alpha})dxdt \le const.$$

Т е о р е м а 2 . Пусть выполнено условие $2a-|K_t|\ge\delta>0$. Тогда для любой функции f, удовлетворяющей условиям из леммы 3, существует единственное решение задачи (I),(2) из класса $u,u_t,u_{xx},u_{yy}\in L^2(Q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Единственность следует из леммы I, а существование из леммы 4.

Л и т е р а т у р а

I. Б у б н о в Б . А . Краевые задачи для одного класса уравнений, содержащих производную по времени.- Докл. АН СССР, 1982, т. 265, № 6, с. 1292-1297.

2. Б у б н о в Б . А . Задача Дирихле для одного класса ультрагиперболических уравнений в классах конечной гладкости.- В сб.: Неклассичес-

кие уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск, 1983, с. 83-91.

3. Семягин Н.Б. Краевая задача для одного класса неклассических уравнений.- В сб.: Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. Новосибирск, 1983, с. 172-177.

4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.- М.: Наука, 1976.- 391 с.