УДК 517.946

НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ И НЁТЕРОВЫ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.С. Сакс (Новосибирск)

Настоящая статья является продолжением работ [1,2] . В [1] введен класс обобщенно эллиптических систем дифференциальных уравнений более широкий, чем класс систем, эллиптических по Дуглису-Ниренбергу, и доказана гипоэллиптичность обобщенно эллиптического оператора с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и аналитическая гипоэллиптичность операторов с аналитическими коэффициентами. Там же была сформулирована основная теорема о нормальной разрешимости оператора краевой задачи на многообразии с краем в соответствующих пространствах С.Л. Соболева. Эта теорема доказана в [2] .

Целью статьи является приложение полученных результатов к проблеме выделения и изучения нётеровых краевых задач для различных систем уравнений математической физики таких, как системы Максвелла, Стокса и кристаллооптики в стационарном случае, когда процессы зависят от времени определенным образом.

Обобщенная эллиптичность системы, в отличие от эллиптичности по Дуглису-Ниренбергу, не зависит от исходного выбора порядков для строк и столбцов оператора системы, а также от вида, в котором записана система. Мы покажем, что, используя это свойство для каждой из рассмотренных систем, можно получить различные нётеровы краевые задачи в соответствующих пространствах. Для краткости мы не будем повторять определений и обозначений работ [1,2] , кроме самых необходимых.

Статья состоит из 3-х параграфов. В § 1 формулируется основная теорема из [1,2] , и указываются различные подходы к изучению коядра нормально разрешимого оператора. Эти результаты затем применяются в § 2,3, где изучается нормальная разрешимость и нётеровость общих краевых задач для систем уравнений математической физики.

§ 1. Нётеровы краевые задачи для слабоэллиптических систем дифференциальных уравнений

Пусть $G \subset R^n$ - ограниченная область с границей Γ класса C^∞ и $A(x, \partial/\partial x)$ - слабоэллиптический в $\bar{G}$ оператор порядка (s,t), т.е. оператор, для которого существует цепочка эллиптических в $\bar{G}$ операторов $Q_1, \ldots, Q_p$ порядков $(q_1, -s_0), \ldots, (q_p, -s_{p-1})$ соответственно, такая, что оператор $A_p = Q_p \ldots Q_1 A$ имеет порядок $(s_p; t)$ и эллиптичен в области $\bar{G}$. Здесь $s_0 = s$, $s_1, \ldots, s_p$ и $q_1, \ldots, q_p$ - целочисленные векторы различной длины, удовлетворяющие условию $q_j > s_j$, $j = 1, \ldots, p$ (см. [1]).

Операторы Q_j, имеющие бесконечномерные ядра, дополним граничными операторами $R_{j\Gamma}$, накрывающими Q_j, $j \in [1,p]$.

Положим $D_p = Q_p \ldots Q_1$ и

$$C_\Gamma = \begin{pmatrix} R_{1\Gamma} \\ R_{2\Gamma} Q_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ R_{p\Gamma} Q_{p-1} \ldots Q_1 \end{pmatrix}$$

в случае, когда все операторы Q_j сопровождаются краевыми условиями $R_{j\Gamma}$; если же какой-либо оператор Q_z имеет конечномерное ядро, то соответствующая строка в матрице C_Γ отсутствует.

Слабоэллиптический оператор A степени $\sigma > 0$ дополняется краевыми условиями B_Γ, число которых определяется размерностью $m(y,\tau)$ пространства $\mathfrak{M}_A^+$ решений следующей задачи на полупрямой $z \geq 0$, определяемой главными частями A_p^0 и $(CA)^0$ операторов A_p и CA порядков (s_p, t) и (c,t) :

$$\tilde{A}_p^0 v(z) \equiv A_p^0 (y, i\tau + \nu \frac{d}{dz}) v(y,\tau; z) = 0,$$

$$(\widetilde{C_\Gamma A})^0 v(z) \equiv (CA)^0 (y, i\tau + \nu \frac{d}{dz}) v(y,\tau; 0) = 0,$$

$$v(y,\tau;z)\to 0,\ z\to+\infty,\quad (y,\tau)\in T'(\Gamma).$$

Если $m(y,\tau)>0$, то система

$$A(x,\partial/\partial x)u(x)=f(x),\qquad x\in G, \tag{1}$$

дополняется краевыми условиями

$$B(x,\partial/\partial x)u(x)\big|_\Gamma=g(y),\qquad y\in\Gamma, \tag{2}$$

где B - $(\tau\times\ell)$ -матричный дифференциальный оператор порядка (b,t) с коэффициентами класса C^∞ в окрестности Γ и $\tau\geq m(y,\tau)$.

Мы говорим, что граничный оператор B_Γ дополняет слабоэллиптический оператор A , если граничный символ оператора $(A_\rho, C_\Gamma A, B_\Gamma)$ обратим слева [2] , другими словами, если оператор $B^o_\Gamma(y,i\tau+\nu\frac{d}{dz})$ на пространстве $\mathfrak{M}^+_\Lambda$ имеет тривиальное ядро. Доказывается, что условие дополнительности не зависит от произвола, который имеется при выборе операторов Q_j и $R_{j\Gamma}$ (см. [2]).

Оператор $\mathfrak{A}=(A,B_\Gamma)$ краевой задачи (1) , (2) мы изучаем в пространствах С.Л. Соболева

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}A\\ B_\Gamma\end{pmatrix}: H^{\kappa+t}(G)\to \begin{matrix}H^{\kappa-s}(G)\\ \oplus\\ H^{\kappa-b-\frac{1}{2}}(\Gamma)\end{matrix},\qquad \kappa\geq\kappa_0, \tag{3}$$

где $\kappa\in R^1$, $\kappa_0=\max\limits_{i,j}(b_i,c_j)+1$; $H^{\kappa+t}(G)$, $H^{\kappa-s}(G)$ и $H^{\kappa-b-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ - прямые произведения пространств $W_2^{\kappa+t_j}(G)$, $W_2^{\kappa-s_i}(G)$ и $W_2^{\kappa-b_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ Соболева-Слободецкого, а пространство $H_Q^{\kappa-s}(G)$ определяется вектором s_ρ и оператором (D_ρ, C_Γ) и в простейшей ситуации, когда ядро оператора D_ρ конечномерно и, следовательно, оператор C_Γ отсутствует (эта ситуация в основном будет встречаться в дальнейших приложениях) состоит из обобщенных вектор-функций v таких, что $D_\rho v\in H^{\kappa-s_\rho}(G)$; полунорма в этом пространстве (которая совпадает с нормой, если $\operatorname{Ker} D_\rho=\phi$) определяется формулой

$$\|v\|_{H_Q^{\kappa-s}(G)}\equiv\|D_\rho v\|_{H^{\kappa-s_\rho}(G)}. \tag{4}$$

В [2] доказана

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) оператор A порядка (s,t) слабоэллиптичен в $\overline{G}$ и граничный оператор B_Γ порядка $(b+\frac{1}{2},t)$ дополняет A ;

б) существует пространство $H_Q^{k-s}(G)$ такое, что оператор (3) имеет левый регуляризатор;

в) существует пространство $H_Q^{k-s}(G)$ такое, что оператор (3) имеет конечномерное ядро и замкнутую область значений;.

г) существует пространство $H_Q^{k-s}(G)$ такое, что для оператора $\mathfrak{A}$ выполняется априорная оценка

$$\|u\|_{H^{k+t}(G)}\leqslant c\left(\|Au\|_{H_Q^{k-s}(G)}+\|B_\Gamma u\|_{H^{k-b-\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\sum_{t_j>0}\|u_j\|_{L_2(G)}\right),$$

причем постоянная C не зависит от u и $K\geqslant K_0$.

Что касается коядра оператора $\mathfrak{A}$ краевой задачи, удовлетворяющей условию а) теоремы 1, то в общем случае оно бесконечномерно. Например, если число краевых условий $r>m(y,\tau)$ -размерности пространства $\mathfrak{M}_A^+$ или если $m(y,\tau)$ не постоянна на $T'(\Gamma)$. В последнем случае после дополнительного изучения оператора A можно указать нётеровы краевые задачи в областях специальных форм. Некоторые из таких задач мы рассмотрим в следующем параграфе. Поэтому естественно ограничиться случаем, когда $m(y,\tau)$ постоянна на $T'(\Gamma)$, и предположить, что $r=m$. Имеются различные методы изучения коядра оператора (3) .

1. Построение правого регуляризатора $\mathfrak{A}^R$ оператора (3).

Напомним, что слабоэллиптический оператор A порядка (s,t) приводим справа к коэллиптическому оператору $A^{(d)}=AQ'\dots Q^{(d)}$ порядка (s,t^d) с помощью цепочки коэллиптических операторов $Q^{(j)}$ порядков $(-t^{j-1},q^j)$ таких, что $q^j>t^j$, $j=1,\dots,d$, $t^0=t$ (см. [1]).

Если решение u задачи (1) , (2) имеет вид $u=D^{(d)}v$, $D^{(d)}\equiv Q'\dots Q^{(d)}$, то вектор-функция v удовлетворяет задаче

$$A^{(d)}\sigma \equiv AD^{(d)}\sigma(x)=f(x), \qquad x\in G, \tag{5}$$

$$B_{\Gamma}^{(d)}\sigma \equiv BD^{(d)}\sigma(x)\big|_{\Gamma}=g(y), \qquad y\in\Gamma, \tag{6}$$

где оператор $B^{(d)}$ имеет порядок (b^d, t^d) и, как нетрудно убедиться, $b^d > b$.

В силу коэллиптичности оператора $A^{(d)}$ внутренний символ оператора Грина [3] задачи (5), (6) обратим справа.

Рассмотрим теперь его граничный символ. Нетрудно видеть (см. [1, § 1]), что он обратим справа, если краевая задача на полупрямой $z\geqslant 0$:

$$\tilde{A}_0^{(d)}\sigma_0(z)\equiv A_0^{(d)}\Big(y, i\tau+\nu\frac{d}{dz}\Big)\sigma_0(y,\tau;z)=f_0(y,\tau;z), \tag{7}$$

$$\tilde{B}_{0\Gamma}^{(d)}\sigma_0(z)\equiv B_0^{(d)}\Big(y, i\tau+\nu\frac{d}{dz}\Big)\sigma_0(y,\tau;0)=g(y,\tau) \tag{8}$$

разрешима для любых $f_0\in\tilde{H}_\nu^+\otimes E'$ и $g\in F'$ в каждой точке $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$ и ее решение σ_0 принадлежит пространству $\tilde{H}_\nu^+\otimes E$, т.е. компоненты вектора σ_0 равны нулю при $z<0$, принадлежит классу C^∞ при $z\geqslant 0$ (в частности, имеют пределы при $z\to +0$) и убывают быстрее любой степени z при $z\to+\infty$ вместе со всеми своими производными (см. [3]). В силу коэллиптичности оператора $A^{(d)}$ для любой f_0 существует частное решение $\hat{\sigma}_0$ системы (7). Поэтому разрешимость задачи (7), (8) эквивалентна разрешимости задачи (7), (8) с $f_0\equiv 0$.

Как показывают примеры, разрешимость этой задачи иногда обеспечивается условием дополнительности на оператор B_Γ. Однако в общем случае коэллиптические операторы $Q^{(j)}$, а следовательно, и оператор $D^{(d)}$ имеют бесконечные ядра. Тогда задачи (1), (2) и (5), (6) не эквивалентны, и может случиться, что коядро оператора (3) конечномерно, однако граничный символ задачи (5), (6) необратим справа ни при каких B_Γ, дополняющих оператор A.

В этом случае задачу (5),(6) следует дополнить системой однородных уравнений

$$E(x, \partial/\partial x)\sigma(x)=0, \qquad x\in G, \tag{9}$$

и краевых условий

$$F(x, \partial/\partial x)\, v(x)\big|_\Gamma = 0, \tag{10}$$

таких, что система $D^{(d)} v = u$ остается разрешимой относительно v для любых u, удовлетворяющих, возможно, лишь конечному числу условий ортогональности. Условия (9), (10) можно отыскивать различными способами. Например, в § 2,3 мы получим эти условия, приравнивая к нулю главные части операторов $D_p A D^{(d)} v$ и $B_\Gamma^{(d)} v$:

$$(D_p A D^{(d)})_0\, v(x) = 0, \tag{11}$$

$$B_0^{(d)} v(x)\big|_\Gamma = 0, \tag{12}$$

где D_p - оператор, приводящий A к (s_p, t)-эллиптическому оператору A_p. Если (s'_p, t^d) - порядок оператора $D_p A D^{(d)}$, то $s'_p > s_p$. В случае $d = 1$, ввиду коэллиптичности оператора Q', условия (9), (10) можно получить методом, указанным в работе [4]. Мы скажем, что условия (9) эквивалентны условиям вида

$$PA^{(d)} v = Pf, \tag{13}$$

где P - некоторый дифференциальный оператор, если из уравнений (5), (9) следуют уравнения (13), и обратно, из (5), (13) следуют уравнения (9). Отметим, что главная часть оператора $PA^{(d)}$ определяется младшими членами оператора $A^{(d)}$.

При выполнении краевых условий (10) главная часть граничного оператора (6) также может меняться, например, при условиях (12) оператор (6) имеет вид

$$B_1^{(d)} v\big|_\Gamma \equiv (B^{(d)} - B_0^{(d)})\, v\big|_\Gamma = g, \tag{14}$$

и его главная часть порядка (b_1^d, t) определяется младшими производными оператора $B^{(d)}$, так как $b \prec b_1^d \prec b^d$.

Предположим теперь, что внутренний символ оператора (5), (13) обратим справа и что среди операторов B_Γ, дополняющих A, существуют операторы такие, что граничный символ оператора (5), (6), (10), (13) обратим справа на $T'(\Gamma)$.

Мы скажем тогда, что такие операторы удовлетворяют обобщенному условию Лопатинского.

Замечание. Во всех рассмотренных ниже примерах обобщенное условие Лопатинского совпадает с условием дополнительности. Однако в общем случае этот вопрос остается открытым.

Пусть оператор B_Γ удовлетворяет обобщенному условию Лопатинского. Тогда правый регуляризатор задачи (1), (2) строится в виде композиции $D^{(d)} \times \mathfrak{A}^{(d)R}$ оператора $D^{(d)} = Q'_1 \dots Q^{(d)}$ и правого регуляризатора $\mathfrak{A}^{(d)R}$ задачи (5), (6) или задачи (5), (6), (10), (13). Последний строится, как обычно, в два этапа. Вначале строится локальный, затем глобальный регуляризатор. При построении локального правого регуляризатора решается краевая задача в полупространстве для оператора с постоянными коэффициентами. В отличие от эллиптического случая (см., например, [5]) мы оцениваем не все решения задачи, а только те, которые заданы интегральным оператором Пуассона с ядром, выражающимся через канонический базис.

Пусть $\overset{\circ}{H}{}^{\kappa+t^d}(G)$ - пространство вектор-функций из $H^{\kappa+t^d}(G)$, удовлетворяющих условиям (9), (10), и $\overset{\circ}{H}{}^{\kappa+t}_{Q'}(G)$ - пространство вектор-функций u, представимых в виде $u = D^{(d)} v$ с $v \in \overset{\circ}{H}{}^{\kappa+t^d}(G)$. Из разрешимости уравнения $D^{(d)} v = u$ для любых $u \in H^{\kappa+t}(G)$ в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{\kappa+t^d}(G)$ следует, что

$$H^{\kappa+t}(G) \subset \overset{\circ}{H}{}^{\kappa+t}_{Q'}(G) \subset H^{\kappa-n+t}(G), \tag{15}$$

где $n = \sum_{j=1}^{d} [q^j - t^j]$.

Тогда имеем следующую цепочку отображений

$$\begin{matrix} H^{\kappa-s}_{Q}(G) & & H^{\kappa-s}(G) \\ \oplus & \subset & \oplus \\ H^{\kappa-b-\frac{1}{2}}(\Gamma) & & H^{\kappa-b^d-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{matrix} \xleftarrow{\ \mathfrak{A}\ } \overset{\circ}{H}{}^{\kappa+t}_{Q'}(G) \xleftarrow{\ D^{(d)}\ } \overset{\circ}{H}{}^{\kappa+t^d}(G). \tag{16}$$

Следовательно, оператор $\mathfrak{A}^R$ определен на пространстве данных задачи: $H^{\kappa-s}_{Q}(G) \oplus H^{\kappa-b-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Так как оператор $\mathfrak{A}$ в пространствах (3) имеет левый регуляризатор

$\mathfrak{A}^L$, то, рассматривая композицию $\mathfrak{A}^L \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^R$, легко убедиться, что

$$\mathfrak{A}^R = \mathfrak{A}^L + N, \tag{17}$$

где N - оператор Грина порядка $-\infty$, а также, что различные правые регуляризаторы $\mathfrak{A}_1^R$ и $\mathfrak{A}_2^R$ отличаются на оператор Грина N_1 , порядка $-\infty$:

$$\mathfrak{A}_1^R = \mathfrak{A}_2^R + N_1 \, . \tag{18}$$

Из соотношений (17) вытекает, что оператор $\mathfrak{A}^R$ ограничен также в пространствах (3) , а из соотношений (18) , что оператор $\mathfrak{A}^R$ по существу не зависит от произвола, который имеется при выборе операторов $\mathcal{D}^{(d)}$, E и F . Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. *Оператор* $\mathfrak{A}$ *задачи* (1) , (2) *нётеров в пространствах* (3) , *если оператор* A *слабоэллиптичен в* $\bar{G}$, *а оператор* B_Γ *удовлетворяет обобщенному условию Лопатинского. Если обобщенные условия Лопатинского совпадают с условиями дополнительности, то условия теоремы являются также необходимыми для нётеровости оператора* (3) .

2. Другой способ изучения коядра оператора (3) состоит в исследовании ядра сопряженного оператора $\mathfrak{A}^*$ относительно скалярного произведения в $L_2(G) \times L_2(\Gamma)$ (см. [6-8]). Здесь мы не будем останавливаться на нем.

3. В конкретных примерах краевых задач можно также применять методы, разработанные в работах [9-11] .

§ 2. Краевые задачи для стационарных систем Максвелла, кристаллооптики и их обобщений

1. Система уравнений Максвелла в однородной и изотропной среде $(\varepsilon, \mu, \sigma = \mathrm{const}, \ c=1)$ имеет вид [12] :

$$\mathrm{rot}\, H - \varepsilon E_t' - 4\pi\sigma E = 4\pi j^{(e)}, \quad \mathrm{rot}\, E + \mu H_t' = 0,$$

$$\varepsilon\, \mathrm{div}\, E = 4\pi\rho, \quad \mathrm{div}\, H = 0, \quad (\rho_t' + \sigma\, \mathrm{div}\, E = -\mathrm{div}\, j^{(e)}).$$

В [16] она приводится как пример гиперболической системы с кратными характеристиками. Рассмотрим следующую систему:

$$\operatorname{rot} u_1+\lambda_2 u_2=f_1\,,\quad \operatorname{rot} u_2+\lambda_1 u_1=f_2\,, \tag{1}$$

где $\lambda_1,\lambda_2\in C$; u_1,u_2,f_1,f_2 – трехмерные векторы. Система (1) при определенных λ_1 и λ_2 совпадает с системой Максвелла для установившихся процессов, зависящих по закону $e^{i\omega t}$. Положим

$$u=(u_1,u_2)=(u^{(1)},\dots,u^{(6)}),\quad f=(f_1,f_2)=(f^{(1)},\dots,f^{(6)}).$$

Система (1) не является эллиптической при любом выборе порядков (s,t). Но если

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\neq 0, \tag{2}$$

то система (1) слабоэллиптична степени 4. Действительно, пусть $(s;t)=(\bar 0_6;\bar 1_6)$. Тогда главная часть A_0 оператора A системы (1) имеет вид

$$A_0=\begin{pmatrix}\operatorname{rot} & 0\\ 0 & \operatorname{rot}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Легко видеть, что нижеследующий оператор Q_1 (из § 2) приводит оператор A к эллиптическому оператору A_1 порядка $(\bar 0_8;\bar 1_6)$:

$$Q_1=\begin{pmatrix}I_3 & 0\\ 0 & \operatorname{div}\\ 0 & I_3\\ \operatorname{div} & 0\end{pmatrix},\qquad A_1=Q_1A=\begin{pmatrix}\operatorname{rot} & \lambda_2 I_3\\ \lambda_1\operatorname{div} & 0\\ \lambda_1 I_3 & \operatorname{rot}\\ 0 & \lambda_2\operatorname{div}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Отметим, что определитель полного символа $A(\xi)$ системы (1) равен $\lambda_1\lambda_2(|\xi|^2+\lambda_1\lambda_2)^2$. Легко убедиться далее, что комплексное пространство $\mathfrak{M}_A^+=\mathfrak{M}^+(A_1)$ системы (1) порядка $(\bar 0_6,\bar 1_6)$ двумерно для любых $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$ и что его базис имеет вид

$$\Omega_1(y,\tau)e^{-|\tau|z},\quad \Omega_1=\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix},\quad \omega 1=i\tau-\nu|\tau|. \tag{5}$$

Изучим для системы (1) порядка (s,t) в ограниченной области G общую краевую задачу:

$$B(x,\partial/\partial x)u(x)\big|_\Gamma=(B_1u_1+B_2u_2)\big|_\Gamma=g(y),\quad y\in\Gamma, \tag{6}$$

где $B=(B_1,B_2)$ матричный $(r\times 6)$ - дифференциальный оператор скалярного порядка $\beta\geq 0$ и векторного порядка (b,t) с гладкими комплексными коэффициентами; $r\geq 2$.

Пусть $(s,t)=(\bar{0}_6,\bar{1}_6)$ и B_0 - главная часть оператора B порядка $(b,\bar{1}_6)$. В силу (5), оператор B дополняет слабоэллиптический оператор A системы (1), если

$$\operatorname{rang} B_0(y,\omega)\Omega_1(y,\tau)=2 \quad \forall (y,\tau)\in T'(\Gamma). \tag{7}$$

Это условие выполняется, например, с $\beta=0$, если заданы проекции векторов u_1 и u_2 на действительные векторные поля $\ell_1(y)$ и $\ell_2(y)$, нигде на Γ не выходящие в касательную плоскость $(\ell_j\cdot\nu\neq 0)$:

$$\ell_1\cdot u_1|_\Gamma=g_1, \qquad \ell_2\cdot u_2|_\Gamma=g_2, \tag{8}$$

в частности, при $\ell_1=\ell_2=\nu$ (см. [17]). Оно выполняется также, если на Γ заданы касательная составляющая вектора u_1 и нормальная составляющая вектора u_2:

$$(u_1)_\tau|_\Gamma=g_\tau \quad (g_\tau\cdot\nu=0), \quad \nu\cdot u_2|_\Gamma=g_2, \tag{9}$$

или если заданы условия М.Л. Леонтовича [18]:

$$[(u_2)_\tau-\alpha(u_1\times\nu)]|_\Gamma=(g\times\nu)|_\Gamma, \quad \alpha\neq 0, \tag{10}$$

или для задачи, рассмотренной в [19]:

$$\begin{gathered}(\nu\times u_1-\lambda\nu\times u_2)|_\Gamma=g_\tau, \quad g_\tau\cdot\nu=0,\\ \nu\cdot(\lambda u_1+u_2)|_\Gamma=g_2, \quad \lambda\neq\pm i.\end{gathered} \tag{11}$$

Здесь " x " обозначает векторное произведение.

Если $\beta=1$, то условие (7) выполняется, например, для краевой задачи:

$$\begin{gathered}\left(\ell_1\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\ell_2}+c_{11}(y)u_1+c_{12}(y)u_2\right)\Big|_\Gamma=g_1,\\ \left(\ell_3\cdot\frac{\partial u_2}{\partial\ell_4}+c_{21}(y)u_1+c_{22}(y)u_2\right)\Big|_\Gamma=g_2,\end{gathered} \tag{12}$$

если действительные векторы $\ell_j(y)$ нигде на Γ не выходят в касательную плоскость $(\ell_j\cdot\nu\neq 0,\ j=1,\dots,4)$, в частности, если $\ell_j=\nu$.

Задаче (1), (6) соответствует ограниченный оператор в пространствах:

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} A \\ B_\Gamma \end{pmatrix} : H^{\kappa+\bar{l}_6}(G) \longrightarrow \begin{matrix} H_{Q_1}^{\kappa-\bar{\sigma}_6}(G) \\ \oplus \\ H^{\kappa-b-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{matrix}, \quad \kappa \geq \kappa_0, \tag{13}$$

где пространство $H_{Q_1}^{\kappa-\bar{\sigma}_6}(G)$ состоит из таких векторов $f_1, f_2 \in H^{\kappa}(G)$, что $\operatorname{div} f_1$ и $\operatorname{div} f_2$ также принадлежат $H^{\kappa}(G)$.

Имеет место следующая

Теорема 3. *При $\tau \geq 2$ условия (2), (7) необходимы и достаточны для нормальной разрешимости оператора $\mathfrak{A}_1$ в пространствах (13) и конечномерности его ядра; при $\tau = 2$ эти же условия необходимы и достаточны для нётеровости оператора $\mathfrak{A}_1$. Если f и g из (13) таковы, что задача (1), (6) разрешима, то любое ее решение принадлежит пространству $H^{\kappa+1}(G)$.*

Доказательство. Основная часть теоремы вытекает из теоремы 1. При $\tau = 2$, нетрудно доказать, что условие (7) совпадает с обобщенным условием Лопатинского. Действительно, замена

$$u_1 = v_1 + \nabla w_1, \qquad u_2 = v_2 + \nabla w_2, \tag{14}$$

подчиненная условиям

$$\Delta \omega_1(x) = \Delta \omega_2(x) = 0, \quad x \in G, \qquad (B_0 \nabla w)|_\Gamma = 0, \quad \nabla \omega \equiv \begin{pmatrix} \nabla \omega_1 \\ \nabla \omega_2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

приводит задачу (1), (6), удовлетворяющую условиям (2), (7), к эллиптической задаче

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} v_1 + \lambda_2 \nabla w_2 + \lambda_2 v_2 = f_1, \qquad \operatorname{rot} v_2 + \lambda_1 \nabla w_1 + \lambda_1 v_1 = f_2, \\ \lambda_1 \operatorname{div} v_1 = \operatorname{div} f_2, \qquad \lambda_2 \operatorname{div} v_2 = \operatorname{div} f_1, \\ [Bv + B' \nabla w]|_\Gamma = g, \qquad (B' \equiv B - B_0), \end{gathered} \tag{16}$$

$$(B_0 \nabla w)|_\Gamma = 0 \tag{17}$$

со связанными правыми частями ($f_7 = \operatorname{div} f_2$, $f_8 = \operatorname{div} f_1$, $g_3 = g_4 = 0$), причем порядок эллиптической при $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ системы (16) равен $(\bar{\sigma}_8, \bar{l}_8)$, а порядок краевых условий равен $(b, b+1; T_8)$. В силу (7) она удовлетворяет условию Лопатинского. Действительно, пространство $\mathfrak{M}^+$ системы (16) определяется следующей системой уравнений на полуоси $z \geq 0$:

$$\widetilde{\mathrm{rot}}\, v_1^o + \lambda_2 \tilde{\nabla} w_2^o = 0, \quad \widetilde{\mathrm{rot}}\, v_2^o + \lambda_1 \tilde{\nabla} w_1^o = 0,$$
$$\widetilde{\mathrm{div}}\, v_1^o = 0, \quad \widetilde{\mathrm{div}}\, v_2^o = 0. \qquad (16')$$

Очевидно, что комплексная размерность $\mathfrak{M}^+$ равна 4 (легко вычислить его базис, однако в этом нет необходимости). Так как число комплексных краевых условий (17) также равно 4, то условие Лопатинского совпадает с условием накрытия, при которых система (16') с условиями

$$[\tilde{B}_0 v_0 + \tilde{B}_0' \tilde{\nabla} w^o]\big|_{z=0} = 0, \quad (\tilde{B}_0 \nabla w^o)\big|_{z=0} = 0 \qquad (17')$$

имеет только тривиальное решение. Из (16') имеем $\tilde{\Delta} w^o = 0$, откуда $w^o = C e^{-|t|z}$. Подставляя это значение в (17') и учитывая условие (7) , получаем $w_1^o = w_2^o = 0$. Но в этом случае система (16) , в силу (4) , совпадает с системой, определяющей пространство $\mathfrak{M}_A^+$, и из условия (7) следует, что $v_1^o = v_2^o = 0$. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Задачи (8) и (12) для системы (1) нётеровы в пространствах (13) , где* $b = -\bar{I}_2$, $K_0 = 0$ *и* $b = \bar{O}_2$, $K_0 = 1$ *соответственно.*

Следсвтие 2. *Краевые задачи (9)-(11) для системы (1)нормально разрешимы в пространствах (13) , где* $b = (-\bar{I}_4), (-\bar{I}_3), (-\bar{I}_4)$, *соответственно,* $K_0 = 0$ *,и имеют конечномерные ядра.*

Рассмотрим теперь оператор A системы (1) в других пространствах. Пусть $t = (\bar{Z}_3, \bar{I}_3)$, $s = (-\bar{I}_3, \bar{O}_3)$. Тогда операторы A_0, Q_2 и $A_2^o = (Q_2 A)_0$ имеют вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{rot} & \lambda_2 I_3 \\ 0 & \mathrm{rot} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} I_6 \\ \bar{O}_3, \mathrm{div} \end{pmatrix}, \quad A_2^o = \begin{pmatrix} \mathrm{rot} & \lambda_2 I_3 \\ 0 & \mathrm{rot} \\ \lambda_1 \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

(отличный от (3) , (4)), причем оператор A_2 порядка $(S_2; t) = (-\bar{1}_3, \bar{0}_3, -1; \bar{2}_3, \bar{1}_3)$ эллиптичен, так как $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

Легко убедиться, что пространство $\mathfrak{M}_A^+ = \mathfrak{M}^+(A_2)$ по-прежнему двумерно для любых $(y,\tau) \in T'(\Gamma)$, но его базис теперь имеет вид

$$\Omega_2(y,\tau)e^{-|\tau|x}, \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} \omega & i\lambda_2\tau\times\nu \\ 0 & |\tau|\omega \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Переходя к рассмотрению краевых задач (6) для системы (1) , отметим, что в этом случае главная часть B_0 оператора B порядка $(b; \bar{2}_3, \bar{1}_3)$ также отличается от B_0 предыдущего случая: в каждой строке $B_0 = (B_1^0, B_2^0)$ ненулевые операторы в B_1^0 имеют на единицу больший порядок, нежели операторы в B_2^0 .

В силу (19) условие дополнительности теперь имеет вид

$$\operatorname{rang} B_0(y,\omega)\Omega_2(y,\tau) = 2 \quad \forall (y,\tau) \in T'(\Gamma). \tag{20}$$

Оно выполняется, например, для задач (9) , (10) ,(12) , а также если на Γ задана только касательная составляющая вектора u_1 :

$$(u_1)_\tau\Big|_\Gamma = g_\tau \qquad (g_\tau \cdot \nu = 0) \tag{21}$$

или если заданы нормальные составляющие векторов $\frac{\partial u_1}{\partial \nu}$ и u_2 :

$$\nu\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = g, \qquad \nu\cdot u_2\Big|_\Gamma = g_2. \tag{22}$$

Замечание. Множества задач, удовлетворяющих условиям (7) и (20) , различны, так как задача (21) не удовлетворяет условию (7) , а задачи (10) , (11) - условию (20) , хотя и имеют непустое пересечение, ибо задачи (8) , (12) и (22) удовлетворяют обоим условиям.

Задаче (1) , (6) соответствует теперь ограниченный оператор

$$\mathfrak{A}_2 : H^{k+(\bar{2}_3,\bar{1}_3)}(G) \longrightarrow \begin{matrix} H_{Q_2}^{k+(\bar{1}_3,\bar{0}_3)}(G) \\ \oplus \\ H^{k-b-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{matrix} \tag{23}$$

причем пространство $H_{a_2}^{k+(\bar{1}_3,\bar{0}_3)}(G)$ состоит из векторов $f_1 \in H^{k+1}(G)$ и $f_2 \in H^k(G)$ таких, что $\operatorname{div} f_2 \in H^{k+1}(G)$. Аналогично теореме 9 доказывается следующая

Теорема 4. *При $\tau \geq 2$ условия (2), (20) необходимы и достаточны для нормальной разрешимости оператора $\mathfrak{A}_2$ в пространствах (23) и конечномерности его ядра; при $\tau = 2$ эти же условия необходимы и достаточны для нётеровости оператора $\mathfrak{A}_2$. Если f и g из (23) таковы, что задача (1), (6) разрешима, то любое ее решение u принадлежит пространству $H^{k+(\bar{2}_3,\bar{1}_3)}(G)$ (т.е. $u_1 \in H^{k+2}(G)$, а $u_2 \in H^{k+1}(G)$).*

Действительно, чтобы доказать, что при $\tau = 2$ условия (20) совпадают с обобщенными условиями Лопатинского, сделаем замену

$$u_1 = v_1 + \nabla w, \qquad u_2 = v_2, \tag{24}$$

с условиями на функцию w :

$$\Delta w(x) = 0, \quad x \in G, \quad w|_{\Gamma} = 0. \tag{25}$$

Так как из (25) следует, что $w(x) \equiv 0$ в G, то краевая задача (1), (6) эквивалентна следующей эллиптической задаче со связанными данными:

$$\operatorname{rot} v_1 + \lambda_2 v_2 = f_1, \qquad \lambda_1 \operatorname{div} v_1 = \operatorname{div} f_2,$$
$$\operatorname{rot} v_2 + \lambda_1 \nabla w + \lambda_1 v_1 = f_2, \tag{26}$$
$$(B_1 v_1 + B_2 v_2)|_{\Gamma} = g, \qquad w|_{\Gamma} = 0, \tag{27}$$

причем порядок эллиптической при $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ системы (26) равен $(s'; t') \equiv \equiv (-\bar{1}_4, \bar{0}_3; \bar{2}_3, \bar{1}_4)$, а порядок краевых условий равен $(b'; t') \equiv (b, -1; \bar{2}_3, \bar{1}_4)$. Так же, как в предыдущем случае, доказывается, что задача удовлетворяет условию Лопатинского при выполнении условий (20) и $\tau = 2$. Отметим еще, что уравнение (25) следует из (26).

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 1. *Краевые задачи (8), (12) и (22) для системы (1) нётеровы в пространствах (23), где $b = (-2, -1)$, $k_0 = 0$; $b = (-1, 0)$, $k_0 = 1$ и $b = (-1, -1)$, $k_0 = 0$, соответственно.*

Рассмотрим случай, когда $t = (\bar{p}_3, \bar{1}_3)$, $p > 2$, $s = (-\bar{1}_3, \bar{0}_3)$. Тогда операторы A_0, Q_p и $A_p^0 = (Q_p A)_0$ имеют вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 I_3 \\ 0 & \mathrm{rot} \end{pmatrix}, \quad Q_p = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ -\mathrm{rot} & \lambda_2 I_3 \\ 0 & \mathrm{div} \end{pmatrix}, \quad A_p^0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 I_3 \\ -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} & 0 \\ \lambda_1 \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

причем оператор A_p порядка $(-\bar{T}_3, (2-p)_3, 1-p; \bar{p}_3, \bar{I}_3)$ эллиптичен при $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Система (1) в этом случае эквивалентна системе

$$\mathrm{rot}\, u_1 + \lambda_2 u_2 = f_1, \tag{29}$$

$$(\Delta - \nabla \mathrm{div}) u_1 + \lambda_1 \lambda_2 u_1 = \lambda_2 f_2 - \mathrm{rot} f_1,$$
$$\lambda_1 \mathrm{div}\, u_1 = \mathrm{div} f_2, \tag{30}$$

которая распадается на эллиптическую систему (30) относительно u_1 и уравнение (29) для определения u_2.

Ввиду (28) легко видеть, что базис пространства $\mathfrak{M}_A^+$ теперь имеет вид:

$$\Omega_p(y,\tau) e^{-|\tau| z}, \quad \Omega_p = \begin{pmatrix} \omega & \omega \times \nu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Следовательно, условие дополнительности на оператор (6) порядка $(b; \bar{p}_3, \bar{T}_3)$ состоит в том, что

$$\mathrm{rang}\, B_0(y,\omega)\Omega_p(y,\tau) = \mathrm{rang}\, B_1^0(y,\omega)(\omega \;\; \omega\times\nu) = 2 \quad \forall (y,\tau) \in T'(\Gamma), \tag{32}$$

где B_0 и B_1^0 - главные части операторов B и B_1 соответственно. Это условие выполняется, в частности, для задач (9), (21), а также когда на Γ задана касательная состоавляющая наклонной производной $\frac{\partial u_1^+}{\partial \ell}$, если $\ell \cdot \nu \neq 0$ всюду на Γ:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial \ell}\right)_\tau \Big|_\Gamma = g_\tau, \quad g_\tau \cdot \nu = 0. \tag{33}$$

Замечание. Множества задач, удовлетворяющих условиям (7), (20) и (32), все различны, хотя и имеют непустое пересечение (задача (9)).

Задаче (1) , (6) теперь соответствует оператор

$$\mathfrak{A}_p : H^{k+(\bar p_3, \bar 1_3)}(G) \longrightarrow \begin{matrix} H^{k+(\bar 1_3,\bar 0_3)}_{Q_p}(G) \\ \oplus \\ H^{k-b-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{matrix}, \quad k \geq k_0, \tag{34}$$

где пространство $H^{k+(\bar 1_3,\bar 0_3)}_{Q_p}(G)$ состоит из таких векторов $f_1 \in H^{k+1}(G)$, $f_2 \in H^k(G)$, что $\lambda_2 f_2 - \operatorname{rot} f_1 \in H^{k+p-2}(G)$, $\operatorname{div} f_2 \in H^{k+p-1}(G)$.

Аналогично предыдущему доказывается следующая

Теорема 5. *При $\tau \geq 2$ условия (2) , (32) необходимы и достаточны для нормальной разрешимости оператора $\mathfrak{A}_p$ в пространствах (34) и конечномерности его ядра; при $\tau = 2$ эти же условия необходимы и достаточны для нётеровости оператора $\mathfrak{A}_p$. Если f и g из (34) таковы, что задача (1), (6) разрешима, то любое ее решение принадлежит пространству $H^{k+(\bar p_3,\bar 1_3)}(G)$.*

Следствие 1. *Краевые задачи (21) и (33) для системы (1) нормально разрешимы в пространствах (34) , где $b = (-\bar p_3), (\bar 1 - p)_3$, соответственно, $k_0 = 0$, и имеют конечномерные ядра.*

Рассмотрим, наконец, случай, когда $t = (1,1,2,\ 1,1,2)$, $S = \bar 0_6$. Нетрудно проверить, что операторы

$$Q_1 = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1}\operatorname{div} \\ 0 & I_3 \\ \lambda_2^{-1}\operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ \partial_2\ \partial_1\ 0\ \partial_3 & 0\ 0\ \lambda_2\ 0 \\ 0 & I_4 \\ 0\ 0\ \lambda_1\ 0 & \partial_2\ -\partial_1\ 0\ \partial_3 \end{pmatrix} \tag{35}$$

приводят оператор A к $(\bar 0_{10};\ t)$ -эллиптическому оператору $A_2 = Q_1 Q_2 A$ с главной частью A_2^0 вида

$$A_2^0 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & 0 \\ \partial_3 & 0 & 0 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 \\ \partial_1 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}; \quad \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} . \tag{36}$$

Легко убедиться, что размерность $m(y,\tau)$ пространства $\mathfrak{M}_A^+$ над полем комплексных чисел равна

$$m(y,\tau) = \begin{cases} 2, & \omega_3 \neq 0, \\ 4, & \omega_3 = 0, \end{cases} \qquad \omega_3 \equiv i\tau_3 - |\tau| \nu_3 . \tag{37}$$

а его базис имеет вид

$$\begin{pmatrix} e_3 & 0 \\ 0 & e_3 \end{pmatrix} e^{-|\tau| z}, \qquad \omega_3 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} e_3 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & e_3 & 0 & \omega \end{pmatrix} e^{-|\tau| z}, \qquad \omega_3 = 0 . \tag{38}$$

Предположим, что область G удовлетворяет условиям:

а) G выпукла относительно направлений, параллельных $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, и ее проекция Ω на плоскость $x_3 = 0$ диффеоморфна единичному кругу,

б) в $\Gamma_3 \subset \Gamma$, где $\nu_3 \equiv \nu \cdot e_3 = 0$, имеется кривая γ, на которую внутри G можно натянуть пленку S, задаваемую уравнением $x_3 = s(x')$, где $S(x') \in C^{K+1}(\bar{\Omega})$, K - нецелое, большее нуля, $x' = (x_1, x_2)$.

Система $A_2 u = Q_2 Q_1 f$, эквивалентная, в силу (35), системе (1), имеет вид

$$\operatorname{rot} u_1 + \lambda_2 u_2 = f_1, \qquad \operatorname{div} u_1 = \lambda_1^{-1} \operatorname{div} f_2, \tag{39}$$

$$\lambda_1 u_1 + \operatorname{rot} u_2 = f_2, \qquad \operatorname{div} u_2 = \lambda_2^{-1} \operatorname{div} f_1,$$

$$\Delta u^{(3)} + \lambda_1 \lambda_2 u^{(3)} = F_3, \quad F_3 \equiv \partial_2 f^{(1)} - \partial_1 f^{(2)} + \lambda_2 f^{(6)} + \lambda_1^{-1} \partial_3 \operatorname{div} f_2, \tag{40}$$

$$\Delta u^{(6)} + \lambda_1 \lambda_2 u^{(6)} = F_6, \quad F_6 \equiv \partial_2 f^{(4)} - \partial_1 f^{(5)} + \lambda_1 f^{(3)} + \lambda_2^{-1} \partial_3 \operatorname{div} f_1 .$$

Напомним, что вектор-функции u_1 и u_2 и постоянные λ_1, λ_2 комплексны с мнимой единицей $i = \sqrt{-1}$. Введем в рассмотрение еще одну мнимую единицу j ($j^2 = -1$), перестановочную с i, и положим

$$w_1 = u^{(2)} + j u^{(1)}, \quad w_2 = u^{(5)} + j u^{(4)}, \quad w = (w_1, w_2),$$

$$z = x_1 + j x_2, \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + j \partial_2), \quad \zeta = \xi_1 + j \xi_2 . \tag{41}$$

Тогда система (39) эквивалентна системе

$$\partial_3 w_1 + j\lambda_1 w_2 = \Phi_1\,, \quad \Phi_1 \equiv 2j\partial_z u^{(3)} - f^{(1)} + jf^{(2)},$$
$$\partial_3 w_2 + j\lambda_2 w_1 = \Phi_2\,, \quad \Phi_2 \equiv 2j\partial_z u^{(6)} - f^{(4)} + jf^{(5)}, \tag{42}$$

$$2\partial_{\bar z} w_1 = \psi_1\,, \quad \psi_1 \equiv -j\partial_3 u^{(3)} - \lambda_2 u^{(6)} + j\lambda_1^{-1}\operatorname{div} f_2 + f^{(3)},$$
$$2\partial_{\bar z} w_2 = \psi_2\,, \quad \psi_2 = -j\partial_3 u^{(6)} - \lambda_1 u^{(3)} + j\lambda_2^{-1}\operatorname{div} f_1 + f^{(6)}. \tag{43}$$

Нетрудно доказать (см. [15]) следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $u^{(3)}, u^{(6)} \in C^{K+2}(\bar G)$ *- фиксированные решения уравнений (40) , которые подставим в* $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ *и* $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ *. Тогда для решений* $w = (w_1, w_2)^{\dagger}$ *системы (42) , (43) класса* $C^{K+1}(\bar G)$ *тогда имеет место общее представление:*

$$w = \varphi_1(z)\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_2}\\ ij\sqrt{\lambda_1}\end{pmatrix} e^{ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} + \varphi_2(z)\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_2}\\ -ij\sqrt{\lambda_1}\end{pmatrix} e^{-ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} + w^{(0)}, \tag{44}$$

где $\varphi_n(z) = \alpha_n + j\beta_n$ *- произвольные аналитические в* Ω *функции класса* $C^{K+1}(\bar\Omega)$, $\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{|\lambda_n|}\, e^{i\arg\lambda_n/2}$, $0 \le \arg\lambda_n < 2\pi$, $n=1,2$, $\sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_2}$,

$$w^{(0)}(x) = w^{(1)}(x) + \begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_2}\; e^{ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} & \sqrt{\lambda_2}\, e^{-ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\\ ij\sqrt{\lambda_1}\; e^{ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} & -ij\sqrt{\lambda_1}\, e^{-ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\end{pmatrix} w^{(2)}(x'), \tag{45}$$

$$w^{(1)}(x) = \int\limits_{s(x')}^{x_3} \begin{pmatrix}\cos(x_3-t)\sqrt{\lambda_1\lambda_2} & -j\dfrac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}}\sin(x_3-t)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\\ -j\dfrac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}}\sin(x_3-t)\sqrt{\lambda_1\lambda_2} & \cos(x_3-t)\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\end{pmatrix}\Phi(x',t)\,dt, \tag{46}$$

$$w^{(2)}(x') = -\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}(\sqrt{\lambda_2})^{-1} & ij(\sqrt{\lambda_1})^{-1}\\ (\sqrt{\lambda_2})^{-1} & -ij(\sqrt{\lambda_1})^{-1}\end{pmatrix}\iint\limits_{\Omega}\left(\psi|_s - 2\frac{\partial s}{\partial\bar z}\Phi|_s\right)\frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}\,. \tag{47}$$

Отделяя в соотношении (44) реальную и мнимую по j части, получаем

$$\begin{pmatrix} u^{(2)} \\ u^{(4)} \\ u^{(1)} \\ u^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0^{(2)} \\ u_0^{(4)} \\ u_0^{(1)} \\ u_0^{(5)} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

где комплексные вектор-функции $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ удовлетворяют системе Коши-Римана

$$\partial_1 \alpha_n - \partial_2 \beta_n = 0, \quad \partial_2 \alpha_n + \partial_1 \beta_n = 0, \quad n = 1, 2, \tag{49}$$

а (2×2) -матрицы Λ и Λ' имеют вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_2}\, e^{ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} & \sqrt{\lambda_2}\, e^{-ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \\ i\sqrt{\lambda_1}\, e^{ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} & -i\sqrt{\lambda_1}\, e^{-ix_3\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda . \tag{50}$$

Лемма подсказывает постановки корректных краевых задач для системы (39), (40). Пусть, например, $\tau = 2$ в (6) и оператор B имеет столбцы $\beta_j \equiv 0$ для $j = 1, 2, 4, 5$, т.е.

$$B_\Gamma u \equiv (\beta_3 u^{(3)} + \beta_6 u^{(6)})\big|_\Gamma = g(y), \quad y \in \Gamma, \tag{51}$$

и пусть B' - матричный (2×6)- дифференциальный оператор порядка $(-1/2; t)$. Зададим дополнительно условия на γ :

$$B'_\gamma u \equiv (\beta'_1 u^{(1)} + \ldots + \beta'_6 u^{(6)})\big|_\gamma = h(y'), \quad y' \in \gamma, \tag{52}$$

где $g \in C^{k-b}(\Gamma)$, $h \in C^{k+1}(\gamma)$, k - нецелое, большее $[b]$. Обозначим $B_{36} = (\beta_3\, \beta_6)$, $B'_{kj} = (\beta'_k\, \beta'_j)$.

В силу (48), эта задача распадается на задачу (40), (51) в области G и задачу

$$(B'_{24}\Lambda_\gamma, B'_{15}\Lambda'_\gamma) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \tilde h(t), \quad t \in \partial\Omega, \tag{53}$$

относительно вектора (α, β) класса $C^{k+1}(\bar\Omega)$, удовлетворяющего в Ω системе Коши-Римана (49), где $\Lambda_\gamma = \Lambda|_\gamma$, $\Lambda'_\gamma = \Lambda'|_\gamma$.

$$\tilde{h}=h(t,s(t))-\left[B'_{36}\begin{pmatrix}u^{(3)}\\ u^{(6)}\end{pmatrix}-B'_{24}\begin{pmatrix}u_0^{(2)}\\ u_0^{(4)}\end{pmatrix}-B'_{15}\begin{pmatrix}u_1^{0}\\ u_5^{0}\end{pmatrix}\right]\Bigg|_{\gamma}. \tag{54}$$

Условие Лопатинского задачи (40) , (51) состоит в том, что

$$\det B^{0}_{36}(y,\omega)\neq 0 \qquad \forall (y,\tau)\in T'(\Gamma). \tag{55}$$

Аналогичное условие для задачи (49) , (53) имеет вид

$$\det\left[B'_{25}(t)\pm iB'_{14}(t)\right]=\det(\beta'_2\pm i\beta'_1,\ \beta'_5\pm i\beta'_4)\neq 0 \quad \forall t\in\partial\Omega. \tag{56}$$

Действительно, пространство $\mathfrak{M}^{+}$ (над полем комплексных чисел) системы (49) двумерно и имеет базис

$$\begin{pmatrix}\omega_2\cdot I_2\\ \omega_1\cdot \bar{I}_2\end{pmatrix}e^{-|\tau|z}, \qquad \omega=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=i\tau-|\tau|\nu. \tag{57}$$

Так как $\omega_1^2+\omega_2^2=0$, то $\omega_1=\pm i\omega_2$. Но $|\omega|=\sqrt{2}\,|\tau|\neq 0$, поэтому $\omega_1,\omega_2\neq 0$ на $T'(\partial\Omega)$. Следовательно, условие Лопатинского задачи (53) состоит в невырожденности на $T'(\partial\Omega)$ матриц

$$(B'_{24}\Lambda_\gamma\pm iB'_{15}\Lambda'_\gamma)=(\beta'_2\pm i\beta'_1\quad \beta'_4\mp i\beta'_5)\Lambda_\gamma .$$

Определитель матрицы Λ_γ равен $-2i\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, поэтому это условие совпадает с условием (56) . Отметим, что условия (55) , (56) совпадают с условиями дополнительности, если $\Gamma_3=\gamma$.

Задаче (1) , (51),(52) соответствует ограниченный оператор

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}A\\ B_\Gamma\\ B'_\gamma\end{pmatrix}: C^{\kappa+t}(\bar{G}) \longrightarrow \begin{matrix}C^{\kappa}_{Q}(\bar{G})\\ \oplus\\ C^{\kappa-6}(\Gamma)\\ \oplus\\ C^{\kappa+1}(\gamma)\end{matrix}, \quad \kappa\geqslant\kappa_0, \tag{58}$$

где $t=(1,1,2,1,1,2)$, а пространство $C^{\kappa}_{Q}(\bar{G})$ состоит из векторов f_1,f_2 из $C^{\kappa}(\bar{G})$ таких, что $\operatorname{div} f_1, \operatorname{div} f_2$,

$$\partial_2 f^{(1)} - \partial_1 f^{(2)} + \lambda_1^{-1}\partial_3 \operatorname{div} f_2 \qquad \text{и} \qquad \partial_2 f^{(4)} - \partial_1 f^{(5)} + \lambda_2^{-1}\partial_3 \operatorname{div} f_1$$

также принадлежат $C^{K}(\bar{G})$; K - нецелое большее $K_0 = max(b_1, b_2, 0)$.

Итак, имеет место следующая

Теорема 6. *Пусть область* G *удовлетворяет условиям а) , б) , а задача (1) , (51) , (52) - условиям (2) , (55) , (56) . Тогда оператор* $\mathfrak{A}$ *нётеров в пространствах (58) . Если задача разрешима, то любое ее решение принадлежит пространству* $C^{K+t}(\bar{G})$ *, (т.е.* $u^{(j)} \in C^{K+1}(\bar{G})$ *для* $j = 1,2,4,5$; $u^{(3)}, u^{(6)} \in C^{K+2}(\bar{G})$).

Условия (55) ,(56) выполняются, например, для задачи

$$u^{(3)}\big|_{\Gamma} = g_1 , \quad u^{(6)}\big|_{\Gamma} = g_2 , \tag{59}$$

$$u^{(2)}\big|_{\gamma} = h_1 , \quad u^{(4)}\big|_{\gamma} = h_2 . \tag{60}$$

При этом задача Дирихле (40) ,(59) фредгольмова, а если $\lambda_1 \lambda_2$ таково, что однородная задача (40), (59) имеет только тривиальное решение, то неоднородная задача безусловно разрешима. Определитель Λ_γ отличен от нуля, поэтому задача (53) , соответствующая условиям (60) $(B'_{24} = I_2 , B'_{15} = 0)$, сводится к задаче $\alpha(t) = \Lambda_\gamma^{-1}\tilde{h}(t)$, $t \in \partial\Omega$. При этом неизвестный вектор (α, β) в односвязной области Ω определяется однозначно, если задать $\beta(t_0) = C$ в некоторой точке $t_0 \in \partial\Omega$, что равносильно условию

$$u^{(1)}(p) = c_1 , \quad u^{(5)}(p) = c_2 \qquad p \in \gamma , \ c_1, c_2 \in \mathbb{C} . \tag{61}$$

Итак, мы приходим к следующему результату.

Теорема 7. *Оператор* $\mathfrak{A}$ *задачи (1) , (59) - (61) фредгольмов в пространствах (58) , где* $b = -(2,2)$, $K_0 = 0$ *. Если* $-\lambda_1 \lambda_2$ *не является собственным значением задачи Дирихле для оператора Лапласа, то задача (1) , (59) - (61) безусловно и однозначно разрешима, а ее решение принадлежит пространству* $C^{K+t}(G)$, $t = (1,1,2,1,1,2)$.

Таким образом, выбирая по разному векторы S и t , мы показали, что задаче (1) , (6) соответствуют различные нормально разрешимые и нётеровы операторы $\mathfrak{A}$, действующие в пространствах (13), (23), (32), (58), при этом условия дополнительности (7), (20), (32) и (55), (56) также различны.

В заключение отметим, что краевые задачи для стационарной системы Максвелла изучались разными авторами (см., например, [10-12, 17-20] и дополнительно ссылки там же), которые рассматривают ее как переопределенную эллиптическую систему. Следуя [16], мы рассматриваем ее как определенную, но слабоэллиптическую систему, и в тех случаях, когда это возможно, получаем теоремы о нётеровости задачи в других пространствах.

2. Система уравнений кристаллооптики [16]:

$$\operatorname{rot} E + \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{rot} H - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{62}$$

где μ, ε_j - положительные постоянные, обобщает систему Максвелла. Рассмотрим систему вида

$$\operatorname{rot} u_1 + a_2(x) u_2 = f_1, \qquad \operatorname{rot} u_2 + a_1(x) u_1 = f_2, \tag{63}$$

где $a_j(x)$ - квадратные комплексные матрицы класса $C^\infty(\bar{G})$, которая является слабоэллиптической при условии эллиптичности в $\bar{G}$ операторов $\operatorname{div} a_j(x)\nabla$:

$$\xi \cdot a_j(x) \cdot \xi \neq 0 \qquad \forall (x,\xi) \in T'(\bar{G}), \quad j = 1,2. \tag{64}$$

Стационарный аналог системы (62) (для установившихся процессов) очевидно содержится в этом классе систем. Для системы (63) справедливы аналоги теорем 3-5. Приведем один из них. Пусть $(s,t) = (\bar{0}_6, \bar{1}_6)$. Тогда главная часть оператора (63) совпадает с (3), оператор Q_1 тот же, что и в (4). Следовательно, краевой задаче (63), (6) соответствует оператор $\mathfrak{A}_1$ в пространствах (13). Базис пространства $\mathfrak{M}_A^+$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \omega^{(1)} e^{\varkappa_1 z} & 0 \\ 0 & \omega^{(2)} e^{\varkappa_2 z} \end{pmatrix}, \tag{65}$$

где $\omega^{(j)} = i\tau + \varkappa_j \nu$ а $\varkappa_j(y,\tau)$ - корень уравнения

$$(i\tau + \varkappa\nu)\cdot a_j(y)\cdot(i\tau+\varkappa\nu) = 0, \qquad y\in\Gamma,\ j=1,2, \tag{66}$$

с $Re\,\varkappa_j < 0$. Условие дополнительности на оператор B порядка $(b,\overline{l}_6)$ состоит в том, что

$$rang\,(B_1^0(y,\omega^{(1)})\,\omega^{(1)}, B_2^0(y,\omega^{(2)})\,\omega^{(2)}) = 2 \quad \forall (y,\tau)\in T'(\Gamma). \tag{67}$$

Этим условиям удовлетворяют, в частности, задачи (8) - (12). Так же, как теорема 3, доказывается следующая

Теорема 8. *При $\tau \geqslant 2$ условия (64), (67) необходимы и достаточны для нормальной разрешимости оператора $\mathfrak{A}_1$ задачи (6), (63) в пространствах (13) и конечномерности его ядра; при $\tau = 2$ эти же условия необходимы и достаточны для нётеровости оператора $\mathfrak{A}_1$. Если f и g из (13) таковы, что задача (63), (6) разрешима, то любое ее решение принадлежит пространству $H^{k+1}(G)$.*

Следствие 1. *Краевые задачи (8), (12) для системы (63) нётеровы в пространствах (13), где $b = -(1,1), K_0 = 0$ и $b = (0,0), K_0 = 1$, соответственно.*

§ 4. Краевые задачи для системы Стокса

Известно [22], что система Стокса (см. [21]):

$$\Delta u - \nabla p = f, \qquad div\, u = \varphi \tag{1}$$

- стационарный аналог линеаризованной системы Навье-Стокса $(\nu = 1)$, является эллиптической при $(s;t) = (\overline{\overline{0}}_3, -1; \overline{2}_3, 1)$. Здесь $u = (u_1, u_2, u_3)$, $f = (f_1, f_2, f_3)$. Обозначим $U = (u,p)$, $F = (f,\varphi)$. Отметим, что в системе (1), простоты ради, мы оставили лишь старшие производные от u и p, так как добавление младших членов в наших рассуждениях ничего не меняет. Краевые задачи для системы (1) рассматривались разными авторами [21 - 27]. Рассмотрим для нее в ограниченной области G с гладкой границей Γ общие краевые условия вида

$$B_\Gamma U \equiv (B_1 u + B_2 p)\big|_\Gamma = g(y), \quad y\in\Gamma, \tag{2}$$

где $B=(B_1,B_2)$ - матричный (3×4) - дифференциальный оператор порядка $(b; t)$ с гладкими коэффициентами.

Сначала кратко рассмотрим эллиптический случай. Нетрудно убедиться, что пространство $\mathfrak{M}^+$ трехмерно и его базис имеет вид

$$\begin{pmatrix}\omega & \omega\times\nu & -\bar\omega - 2|\tau| z\,\omega \\ 0 & 0 & 4|\tau|^2\end{pmatrix} e^{-|\tau| z}, \quad \omega = i\tau - |\tau|\nu.$$

Следовательно, условие Лопатинского состоит в том, что для любых $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$

$$\det\left(B_1^0\omega,\ B_1^0(\omega\times\nu),\ 4|\tau|^2 B_2^0 - B_1^0\bar\omega - 2|\tau| B_1^{0(1)}\omega\right) \neq 0, \tag{3}$$

где $B_j^0 = B_j^0(y,\omega)$, $\quad B_1^{0(1)} = \frac{\partial}{\partial\zeta} B_1^0(y, i\tau+\nu\zeta)\big|_{\zeta=-|\tau|}$.

Этому условию удовлетворяют, в частности, задача Стокса

$$u\big|_\Gamma = g, \tag{4}$$

а также вторая краевая задача

$$T(U)\cdot\nu\big|_\Gamma = g, \quad T(U)\equiv(\nu\cdot\nabla)u + [\nabla(\nu\cdot u)]^0 - \nu p; \tag{5}$$

где $T(U)$ - тензор напряжений [21, 22], $[\nabla(\nu\cdot u)]^0$ - главная часть оператора $\nabla(\nu\cdot u)$ первого порядка.

Условия (3) необходимы и достаточны для нётеровости оператора задачи (1), (2) в пространствах

$$\mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix}A\\ B_\Gamma\end{pmatrix} : H^{k+(\bar 2_3,1)}(G) \longrightarrow \begin{matrix} H^{k+(\bar 0_3,1)}(G) \\ \oplus \\ H^{k-b-1/2}(\Gamma)\end{matrix}, \quad k\ge k_0. \tag{6}$$

Пусть теперь $s=(\bar 0_3,-1)$, $t=\bar 2_4$, т.е. мы хотим найти такое решение задачи, что u и p имеют одинаковую гладкость. Тогда система (1) слабоэллиптична. Ее главная часть A^0, Q - преобразование и оператор $A_1=$

$= QA$ имеют вид

$$A^{o} = \begin{pmatrix} \Delta I_3 & 0 \\ \operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ -\operatorname{div} & \Delta \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \Delta I_3 & -\nabla \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \tag{7}$$

причем оператор A_1 имеет порядок $(\bar{0}_4 ; \bar{2}_4)$ и эллиптичен. Так как ядро оператора Q бесконечномерно, дополним его граничным оператором $C_\Gamma F \equiv \equiv \varphi|_\Gamma$ таким, что ядро оператора (Q, C_Γ) тривиально. Система (1) эквивалентна при этом эллиптической системе второго порядка

$$\Delta u - \nabla p = f, \qquad \Delta p = \Delta\varphi - \operatorname{div} f \tag{8}$$

с дополнительным условием

$$\operatorname{div} u|_\Gamma = \varphi|_\Gamma , \tag{9}$$

где $F = (f, \varphi) \in H_Q^{\kappa+(0_3,1)}(G)$, т.е $f \in H^\kappa(G)$,

$$\varphi \in H^{\kappa+1}(G) \quad \text{и} \quad \Delta\varphi - \operatorname{div} f \in H^\kappa(G).$$

Легко убедиться, что пространство $\mathfrak{M}_A^+$ трехмерно и его базис имеет вид

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega \times \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-|\tau| z} . \tag{10}$$

Следовательно, условие дополнительности состоит в том, что

$$\det\left(B_1^{o}(y,\omega)\omega,\ B_1^{o}(y,\omega)(\omega\times\nu),\ B_2(y,\omega)\right) \neq 0 \quad \forall (y,\tau) \in T'(\Gamma). \tag{11}$$

Этому условию удовлетворяет, например, задача

$$(\nu \times u + \nu p)|_\Gamma = g, \qquad g \in H^{\kappa+1/2}(\Gamma), \quad \kappa > 0. \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что задачи (4), (5) не удовлетворяют условию (11). Задаче (1), (2) теперь соответствует ограниченный оператор

$$\mathfrak{A}_1 : H^{\kappa+\bar{2}_4}(G) \longrightarrow \begin{matrix} H_Q^{\kappa+(0_3,1)}(G) \\ \oplus \\ H^{\kappa-b-1/2}(\Gamma) \end{matrix}, \quad \kappa \geq \kappa_0 . \tag{13}$$

Учитывая, что система (8) не переопределена и число краевых условий (2), (9) равно 4, получаем следующие результаты.

Теорема 9. *Условие* (11) *необходимо и достаточно для нётеровости оператора* $\mathfrak{A}_1$ *в пространствах* (13) . *Если задача* (1) , (2) *разрешима, то любое ее решение* (u, p) *принадлежит пространству* $H^{k+\bar{2}_4}(G)$.

Следствие 1. *Краевая задача* (1), (12) *нётерова в пространствах* (13) , *где* $b = -\bar{2}_3$, $k_0 = 0$.

Далее, пусть $s = (\bar{0}_3, -1)$, $t = (\bar{2}_3, n)$, $n > 2$. Операторы $\overset{o}{A}, Q$ и $A_1 = QA$ снова имеют вид (7), только порядок оператора A_1 равен $(\bar{0}_3, 2-n;\ \bar{2}_3, n)$. Базис пространства $\mathfrak{M}_A^+$ совпадает с (10) , поэтому условие дополнительности также имеет вид (11), только главные части $\overset{o}{B_j}$ оператора (2) порядка (b, t) определяются по-иному. Задача (12) не удовлетворяет этому условию. Ему удовлетворяет, например, следующая задача:

$$\left.\left(\nu \times u + \nu \frac{\partial^{n-2} p}{\partial \nu^{n-2}}\right)\right|_{\Gamma} = g. \tag{14}$$

Краевой задаче (1) , (2) соответствует оператор

$$\mathfrak{A}_n : H^{k+(\bar{2}_3, n)}(G) \longrightarrow \begin{array}{c} H_{Q_n}^{k+(\bar{0}_3, 1)}(G) \\ \oplus \\ H^{k-b-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{array}, \quad k \geq k_0 , \tag{15}$$

где пространство $H_{Q_n}^{k+(\bar{0}_3,1)}(G)$ состоит из вектор-функций $F = (f, \varphi)$ таких, что $f \in H^k(G)$, $\varphi \in H^{k+1}(G)$ и $\Delta\varphi - \operatorname{div} f \in H^{k+n-2}(G)$.

Повторяя приведенные выше рассуждения, имеем следующий результат.

Теорема 10. *Условие* (11) *необходимо и достаточно для нётеровости оператора* $\mathfrak{A}_n$ *в пространствах* (15) . *Если задача* (1) , (2) *разрешима, то любое ее решение* (u, p) *таково, что* $u \in H^{k+2}(G)$, *а* $p \in H^{k+n}(G)$.

Следствие 1. *Задача* (1) , (14) *нётерова в пространствах* (15) , *где* $b = -\bar{2}_3$, $k_0 = 0$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $s = (\bar{0}_3, -1)$, $t = (\bar{m}_3, 1)$ и $m \geq 3$. Операторы $\overset{o}{A}, Q$ и $\overset{o}{A}_1 = (QA)^o$ имеют вид

$$A^{0}=\begin{pmatrix}0 & -\nabla\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}I_3 & 0\\ \mathrm{rot} & 0\\ 0 & \Delta\end{pmatrix},\quad A_1^{0}=\begin{pmatrix}0 & -\nabla\\ \mathrm{rot}\,\Delta & 0\\ \mathrm{div}\,\Delta & 0\end{pmatrix}, \tag{16}$$

причем оператор A_1 имеет порядок $(\bar{0}_3, (3-\bar{m})_4; \bar{m}_3, 1)$ и эллиптичен. При условии (9) система (1) эквивалентна системе

$$\nabla p = \Delta u - f, \tag{17}$$

$$\mathrm{rot}\,\Delta u = \mathrm{rot} f, \qquad \mathrm{div}\,\Delta u = \Delta\varphi, \tag{18}$$

где $(f,\varphi)\in H_Q^{k+(\bar{0}_3,1)}(G)$, т.е. $f\in H^{k}(G)$, $\mathrm{rot} f\in H^{k+m-3}(G)$, $\varphi\in H^{k+m-1}(G)$.

Нетрудно убедиться, что базис пространства $\mathfrak{M}_A^{+}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_3 + |\tau|^{-1} z\,\omega \dagger \vec{\omega}\\ 0\end{pmatrix} e^{-|\tau| z}. \tag{19}$$

Следовательно, условие дополнительности на оператор порядка B_Γ состоит в том, что

$$\det\left(B_1^{0}(y,\omega)+B_1^{0(1)}(y,\omega)|\tau|^{-1}\omega\dagger\vec{\omega}\right)\neq 0 \quad \forall (y,\tau)\in T'(\Gamma). \tag{20}$$

Этому условию удовлетворяет, например, задача (4), но не удовлетворяют (5), (12), (14). Задаче (1) , (2) соответствует теперь оператор

$$\mathfrak{A}_{m,1} : H^{k+(\bar{m}_3,1)}(G) \longrightarrow \begin{matrix} H_Q^{k+(\bar{0}_3,1)}(G)\\ \oplus\\ H^{k-b-\frac{1}{2}}(\Gamma)\end{matrix}, \quad k\geq k_0 . \tag{21}$$

Имеет место

Теорема 11. *Условие (20) необходимо и достаточно для нётеровости оператора* $\mathfrak{A}_{m,1}$ *в пространствах (21) . Если задача (1) , (2) разрешима, то любое ее решение* (u,p) *таково, что* $u\in H^{k+m}(G)$, $p\in H^{k+1}(G)$.

Для доказательства конечномерности коядра оператора достаточно заметить, что из уравнений (17) функция $p(x)$ восстанавливается с точностью до постоянной, если вектор-функция $u(x)$ удовлетворяет системе (18) . Последняя система может быть расширена до квадратной эллиптической системы [10] :

$$\operatorname{rot} \Delta u + \nabla w = \operatorname{rot} f, \quad \operatorname{div} \Delta u = \Delta \varphi \tag{22}$$

порядка $((3-m)_4 ; m_3, m-2)$, эквивалентной системе (18) , если положить

$$w|_\Gamma = 0. \tag{23}$$

Наконец, пространство $\mathfrak{M}^+$ системы (17) , (22) при условиях (9) и (23) совпадает с пространством $\mathfrak{M}_A^+$.

Следствие 1. *Задача (1) , (4) нётерова в пространствах (21) , где* $b = -m, \kappa_0 = 0$.

Литература

1. Сакс Р.С. Слабоэллиптические системы дифференциальных уравнений и их свойства.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара академика С.Л. Соболева), 1979, № 1, с.91-118.
2. Сакс Р.С. Краевые задачи для обобщенно эллиптических систем дифференциальных уравнений.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара академика С.Л. Соболева), 1981, № 2, с. 86-108.
3. Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudo-differential operators. - Acta math., 1971, v.126, No 12, p.10-51.
4. Солонников В.А. О краевых задачах для систем с постоянным дефектом.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара академика С.Л. Соболева), 1976, № 2, с. 109-128.
5. Волевич Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем.- Мат. сб., 1965, т. 68, № 3, с. 373-416.
6. Диканский А.С. Сопряженные краевые задачи к эллиптическим дифференциальным и псевдодифференциальным краевым задачам в ограниченной области.- Мат, сб., 1973, т. 91, № 1, с. 62-77.

7. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1973.- 232 с.

8. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.- М.: Мир, 1965.- 380 с.

9. Кон Дж. Дж., Ниренберг Л. Некоэрцитивные краевые задачи.- В кн.: Псевдодифференциальные операторы.- М., Мир, 1967, с.88-165.

10. Гудович И.С., Крейн С.Г. Краевые задачи для переопределенных систем уравнений в частных производных.- В кн.: Дифференциальные уравнения и их применения, Вильнюс, 1974, вып. 9, с. 1-143.

11. Солонников В.А. Об одном классе нётеровых переопределенных эллиптических краевых задач.- Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1974, т. 47, № 5, с. 138-145.

12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики.- М.: Наука, 1966.- 724 с.

13. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции.- М.: Физматгиз, 1959.- 628 с.

14. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.- М.: Физматгиз, 1968.- 511 с.

15. Сакс Р.С. О краевых задачах для системы $\mathrm{rot}\,u + \lambda u = h$. Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 1, с. 39-42.

16. Курант Р. Уравнения с частными производными.- М.: Мир, 1964.

17. Солонников В.А. Переопределенные эллиптические краевые задачи.- Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1971, т.21, № 5, с.112-158.

18. Гудович И.С., Крейн С.Г., Куликов И.М. Краевые задачи для уравнений Максвелла.- Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 2, с.321-324.

19. Schuldenberger J.R., Wilcox C.H. Coerciveness inequalities for nonelliptic systems of partial differential equations. - Annali di matem. pura ed appl., 1971, t.88, p.229-305.

20. Фам Нгок Тхао. Естественные дифференциальные операторы на многообразиях и граничные задачи эллиптические в подпространстве.- Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 10, с. 1872-1884.

21. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.- М.: Наука, 1970.- 288 с.

22. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А.Даглиса - Л. Ниренберга, ч. 1.- Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 3, с.665-706 ; ч. II - Тр. Мат. ин-та АН СССР.-М.-Л.: Наука, 1966, т. 42, № 4, с.233-297.

23. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса.- Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1976, т. 59, № 9, с. 81-116.

24. Бицадзе А.В. Об одной системе линейных уравнений с частными производными.- Докл. АН СССР, 1972, т.204, № 3, с. 1031-1033.

25. Bitsadze A.V. On the application of function-theoretical methods in the linearized Navier-Stokes boundary value problem. - Ann.Acad.Sc.Fennicae, Ser.A,I Math. 1974, No 571, p. 3-9.

26. Солонников В.А., Шадиков В.Е. Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье-Стокса.- Тр. Мат. ин-та АН СССР.- Л.: Наука, 1973, т. 75, № 8, с. 196-210.

27. Крейн С.Г. Лаптев Г.И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде.- Функцион. анализ и его прил., 1968, т. 2, в.1, № 1, с. 40-50.