УДК 518+517.392

ВЕСОВЫЕ ЭРМИТОВЫ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ В $L_p^m(\Omega)$

Л.И. Дидур (Красноярск)

Проблема построения асимптотически оптимальных последовательностей решетчатых кубатурных формул в пространствах $L_p^m(\Omega), L_p^m(E_n)$ была поставлена С.Л. Соболевым [1] и решена им для пространств $L_2^m(E_n)$. В.И. Половинкин [2-5] провел аналогичное исследование для пространств $L_p^m(\Omega), L_p^m(E_n), p\in(1,\infty)$, в случае постоянного веса и в случае, когда весовая функция берется из $L_q(\Omega)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$.

В настоящей работе методом [4], подробно изложенном в [5], с использованием ряда результатов из [6,7], строятся асимптотически оптимальные последовательности весовых эрмитовых кубатурных формул в $L_p^m(\Omega), L_p^m(E_n)$.

Введем обозначения:

E_n - n-мерное евклидово пространство;

Ω - кусочно-гладкая ограниченная область в E_n;

$$G=\{x=(x_1,\dots,x_n):\ 0<x_i<1,\ i=1,\dots,n\};$$

m, p, q - числа, m - натуральное, $mp>n$, $p^{-1}+q^{-1}=1$;

R -множество n-мерных целочисленных векторов;

$$\mu=\left\{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n):\ |\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\le m-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\ 0\le\alpha_i\le m-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\ i=1,\dots,n\right\};$$

h - положительный параметр; если $\gamma\in R$, то

$$\Omega_\gamma^h=\{x: x=hy+h\gamma,\ y\in G\};\quad Q(h,\gamma)=\Omega_\gamma^h\cap\Omega;\quad B_h=\{\gamma:\gamma\in R,\ mes\,Q(h,\gamma)>0\};$$

$$\Omega_\gamma^{s,h}=\left\{x=(x_1,\dots,x_n): x\in\Omega,\ \left|x_i-\gamma_i h-\frac{h}{2}\right|<\frac{sh}{2},\ i=1,\dots,n\right\};$$

s - натуральное число;

если $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ - функция, то

$$f^{(\alpha)}=f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}};$$

P^m - множество многочленов степени меньше m ;

$\widetilde{W}_p^{(m)}$ - линейное многообразие определенных во всем E_n периодических по переменным $x_1,\dots,x_n$ с единичным периодом функций, обладающих локально-суммируемыми в степени p обобщенными производными порядка m ;

$\widetilde{L}_p^{(m)}$ - банахово пространство, индуцированное на W_p^m полунормой:

$$\|f\|_{L_p^m(G)}=\left\{\int_G\left[\sum_{j_1=1}^{n}\dots\sum_{j_m=1}^{n}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1},\dots,\partial x_{j_m}}\right)^2\right]^{p/2}dx\right\}^{1/p}.$$

Для удобства изложения будем рассматривать не сами кубатурные формулы, а их функционалы ошибок.

Прежде чем перейти к построению равномерно распределенных эрмитовых операторов, напомним необходимое для дальнейшего

Определение 1 (см. [6]). Последовательность функционалов $\{\ell^h\}$ называется последовательностью равномерно распределенных эрмитовых функционалов ошибок порядка m в Ω , если существуют константа $K>0$, натуральные числа t, s (s нечетное), функционалы ℓ_γ^h, $\gamma\in B_h$, вида

$$(\ell_\gamma^h,f)=\int\limits_{Q(h,\gamma)}f(x)dx-\sum_{\alpha\in\mu}\sum_{i=1}^{t}c_{\gamma,i}^{h,\alpha}f^{(\alpha)}(x_{\gamma,i}^h),\qquad(1)$$

удовлетворяющие условиям:

$$(\ell_\gamma^h,x^\beta)=0\quad\text{при }|\beta|<m$$

(здесь $c_{\gamma,i}^{h,\alpha}$ постоянные), такие, что

а) $\ell^h=\sum\limits_{\gamma\in B_h}\ell_\gamma^h$, б) точки $x_{\gamma,i}^{h} \in \Omega_{\gamma}^{s,h}, \quad i=1,\dots,t,$ (2)

в) $|c_{\gamma,i}^{h,\alpha}| < K h^{n+|\alpha|}$.

Определение 2. Последовательность операторов $\{\mathcal{J}_{\mu}^{h}\}$ назовем последовательностью равномерно распределенных в области Ω эрмитовых операторов, если все $\mathcal{J}_{\mu}^{h}$ определены на множестве функций из $C^{|\alpha|}(\Omega)$, представимы в виде

$$\mathcal{J}_{\mu}^{h} = \sum_{\gamma \in B_h} \mathcal{J}_{\mu,\gamma}^{h} \tag{3}$$

и справедливы следующие соотношения:

1) если $f(x) \in P^{m}$,

то

$$(\mathcal{J}_{\mu}^{h} f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q(h,\gamma); \\ 0, & x \bar{\in} Q(h,\gamma); \end{cases} \tag{4}$$

2) существуют такие функции $\varphi_{\gamma,i}^{h,\alpha}(x)$, равные нулю вне $Q(h,\gamma)$, и точки $x_{\gamma,i}^{h} \in \bar{\Omega}_{\gamma}^{s,h}$, $\gamma \in B_k$, $i=1,\dots,t$; t,s - натуральные числа, что

$$(\mathcal{J}_{\mu,\gamma}^{h} f)(x) = \sum_{\alpha \in \mu} \sum_{i=1}^{t} f^{(\alpha)}(x_{\gamma,i}^{h})\, \varphi_{\gamma,i}^{h,\alpha}(x), \; x \in Q(h,\gamma); \tag{5}$$

3) справедливо

$$|\varphi_{\gamma,i}^{h,\alpha}| < K h^{|\alpha|} , \tag{6}$$

где $K>0$ - константа, не зависящая от h, α, γ, i .

Исходя из определений 1 и 2, функционалы вида

$$(\ell^{h}, f) = \int_{\Omega} [f - \mathcal{J}_{\mu}^{h} f](x)\, dx$$

образуют последовательность равномерно распределенных эрмитовых функционалов ошибок в Ω .

Действительно, положив

$$(\ell_\gamma^h, f) = \int\limits_{Q(h,\gamma)} [f - \mathcal{J}_\mu^h f](x)dx,$$

получим (2) , где ℓ_γ^h - функционалы (1),

$$\left(c_{\gamma,i}^{h,\alpha} = \int\limits_{Q(h,\gamma)} \varphi_{\gamma,i}^{h,\alpha}(x)dx\right).$$

Используя (5) , (6), при $\alpha\in\mu$, $\gamma\in B_h$, $i=1,\dots,t$, получим

$$|c_{\gamma,i}^{h,\alpha}| \le \int\limits_{Q(h,\gamma)} |\varphi_{\gamma,i}^{h,\alpha}(x)|dx \le Kh^{|\alpha|} \operatorname{mes} Q(h,\gamma) = Kh^{n+|\alpha|}$$

($K>0$ - константа, не зависящая от h,α,γ,i).

Кроме того, из свойства (4) оператора $\mathcal{J}_{\mu,\gamma}^h$ следует, что $(\ell_\gamma^h, f)=0$, если $f\in P^m$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{J}_\mu^h$ *- последовательность равномерно распределенных в* Ω *эрмитовых операторов,* ℓ^h *- функционалы ошибок весовых эрмитовых кубатурных формул вида*

$$(\ell^h, f) = \int\limits_{\Omega} g(x)[f - \mathcal{J}_\mu^h f](x)dx, \quad g\in L_q(\Omega). \tag{7}$$

Тогда при $mp>n$, $\alpha\in\mu$ *существует константа* $K>0$ *такая, что*

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} < Kh^m \|g\|_{L_q(\Omega)} . \tag{8}$$

Доказательство. Пусть последовательность операторов $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$ и функционалы ℓ^h удовлетворяют условиям теоремы 1. Для функционалов вида (7) справедливо (2) , где

$$(\ell_\gamma^h, f) = \int\limits_{Q(h,\gamma)} g(x)\left[f - \mathcal{I}_{\mu,\gamma}^h f\right](x)dx.$$

Тогда

$$|(\ell_\gamma^h, f)| \leq \left\{ \int\limits_{Q(h,\gamma)} |g(x)|^q dx \right\}^{1/q} \left\{ \int\limits_{Q(h,\gamma)} \left|\left[f - \mathcal{I}_{\mu,\gamma}^h f\right](x)\right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|g\|_{L_q(Q(h,\gamma))} \|f - \mathcal{I}_{\mu,\gamma}^h f\|_{L_p(Q(h,\gamma))} . \tag{9}$$

Из дискретного неравенства Гёльдера, а также из (2) и (9) получим

$$|(\ell^h, f)| \leq \left(\sum_{\gamma \in B_h} \|g\|^q_{L_q(Q(h,\gamma))} \right)^{1/q} \left(\sum_{\gamma \in B_h} \|f - \mathcal{I}_{\mu,\gamma}^h f\|^p_{L_p(Q(h,\gamma))} \right)^{1/p} =$$

$$= \|g\|_{L_q(\Omega)} \left(\sum_{\gamma \in B_h} \|f - \mathcal{I}_{\mu,\gamma}^h f\|^p_{L_p(Q(h,\gamma))} \right)^{1/p}. \tag{10}$$

Пусть $f \in L_p^m(\Omega_\gamma^{s,h})$ и имеет в $\Omega_\gamma^{s,h}$ все непрерывные производные порядка m. Тогда справедливо представление функций $f(x)$ [8] в виде:

$$f(x) = \sum_{|\kappa|<m} \frac{1}{\kappa!} f^{(\kappa)}(y)(x-y)^\kappa + m \sum_{|\kappa|=m} \frac{1}{\kappa!} \int\limits_0^1 (1-t)^{m-1} f^{(\kappa)}(y+t(x-y))(x-y)^\kappa dt, \tag{11}$$

$x \in \Omega_\gamma^{s,h}$, $y \in V_\tau^\rho$, где V_τ^ρ - открытая сфера с центром в точке τ радиуса ρ. Отсюда $f(x) = P_{h,\gamma}(x) + u_{h,\gamma}(x)$, где $P_{h,\gamma} \in P^m$, $u_{h,\gamma}(x)$ - второе слагаемое правой части (11) и

$$f^{(\alpha)}(x) = P_{h,\gamma}^{(\alpha)}(x) + u_{h,\gamma}^{(\alpha)}(x), \quad P_{h,\gamma}^{(\alpha)}(x) \in P^m.$$

Из свойств (4), (5) оператора $\mathcal{I}_{\mu,\gamma}^h$ следует:

$$|[f-\mathcal{J}^h_{\mu,\gamma} f](x)| = |u_{h,\gamma}(x) - (\mathcal{J}^h_{\mu,\gamma} u_{h,\gamma})(x)| =$$

$$= |u_{h,\gamma}(x) - \sum_{\alpha\in\mu}\sum_{i=1}^{t} u^{(\alpha)}_{h,\gamma}(x^h_{\gamma,i})\,\varphi^{h,\alpha}_{\gamma,i}(x)| \leq$$

$$\leq |u_{h,\gamma}(x)| + |\sum_{\alpha\in\mu}\sum_{i=1}^{t} u^{(\alpha)}_{h,\gamma}(x^h_{\gamma,i})\,\varphi^{h,\alpha}_{\gamma,i}(x)|.$$

Используя оценки [6] :

$$|u^{(\alpha)}_{h,\gamma}(x)| < K_1 h^{m-\frac{n}{p}-|\alpha|} \|f\|_{L^m_p(\Omega^{s,h}_\gamma)}$$

($\alpha\in\mu$, $K_1>0$ - константа) и (6) , получаем

$$|[f-\mathcal{J}^h_{\mu,\gamma} f](x)| < K_2 h^{m-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^m_p(\Omega^{s,h}_\gamma)}$$

($K_2>0$ - константа),

или

$$\|f-\mathcal{J}^h_{\mu,\gamma}\|^p_{L_p(Q(h,\gamma))} = \int_{Q(h,\gamma)} |[f-\mathcal{J}^h_{\mu,\gamma} f](x)|^p dx < K_2 h^{mp} \|f\|^p_{L^m_p(\Omega^{s,h}_\gamma)}.$$

Отсюда и из (10) следует, что

$$|(\ell^h, f)| < \|g\|_{L_q(\Omega)} \left(\sum_{\gamma\in B_h} K_2^p h^{mp} \|f\|^p_{L^m_p(\Omega^{s,h}_\gamma)}\right)^{1/p} = K_2 h^m \|g\|_{L_q(\Omega)} \|f\|_{L^m_p(\Omega)}.$$

Таким образом, справедливость теоремы 1 установлена.

Определение 3. Последовательность операторов $\{\mathcal{J}^h_\mu\}$ вида

$$(\mathcal{J}_\mu^h f)(x) = \sum_{\alpha\in\mu} \sum_{\substack{\gamma \\ [h\gamma]\in\bar{\Omega}}} f^{(\alpha)}(h\gamma)\varphi_\gamma^{h,\alpha}(x)$$

назовем последовательностью эрмитовых операторов с пограничным слоем в Ω, если справедливы равенства (3), (4), где

$$(\mathcal{J}_{\mu,\gamma}^h f)(x) = \sum_{\alpha\in\mu}' \sum_{\beta\in\eta} f^{(\alpha)}(h\gamma + h\beta)\varphi_{\gamma,\beta}^{h,\alpha}(x), \tag{12}$$

$\eta\subset R$ конечно, $\varphi_{\gamma,\beta}^{h,\alpha}(x)$ - функции, определенные в Ω и равные нулю вне $Q(h,\gamma)$, причем

$$|\varphi_{\gamma,\beta}^{h,\alpha}(x)| < Kh^{|\alpha|} \tag{13}$$

($K>0$ - константа, не зависящая от h,α,γ,β); существуют функции $\varphi_\beta^\alpha(x)$, $\beta\in\eta$, определенные в E_n, равные нулю вне G, число $c>0$, такие что

$$\varphi_{\gamma,\beta}^{h,\alpha}(x) = \varphi_\beta^\alpha\left(\frac{x}{h}-\gamma\right),\quad \gamma\in B_h,\quad \Omega_\gamma^h = Q(h,\gamma), \tag{14}$$

и расстояние от точек $h\cdot\gamma$ до границы Ω больше ch.

Замечание. Из определений 2,3 следует, что последовательности эрмитовых операторов с пограничным слоем в Ω являются в Ω последовательностями равномерно распределенных эрмитовых операторов.

Определение 4. Если $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$ - последовательность эрмитовых операторов с пограничным слоем в Ω, то оператор $\mathcal{J}_\mu$ вида

$$(\mathcal{J}_\mu f)(x) = \sum_{\alpha\in\mu}' \sum_{\beta\in\eta}' f^{(\alpha)}(\beta)\varphi_\beta^\alpha(x)$$

назовем сопутствующим эрмитовым оператором последовательности $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$.

Замечание. Если $f\in P^m$, то $(\mathcal{J}_\mu f)(x)=f(x)$ при $x\in G$.

Определение 5. Если $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$ – последовательность эрмитовых операторов с пограничным слоем в Ω , $\mathcal{J}_\mu$ – сопутствующий эрмитов оператор $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$, то функционал

$$(\ell, f) = \int_G [f - \mathcal{J}_\mu f](x)dx$$

назовем сопутствующим функционалом последовательности $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$.

Определение 6. Последовательность функционалов $\{\ell^h\}$ называется эрмитовой последовательностью функционалов с пограничным слоем, если ℓ^h имеют вид

$$(\ell^h, f) = \int_\Omega f(x)dx - \sum_{\alpha\in\mu} \sum_{\substack{\gamma \\ [h\gamma]\in\bar{\Omega}}} c_\gamma^{h,\alpha} f^{(\alpha)}(h\gamma)$$

($c_\gamma^{h,\alpha}$ – постоянные) и представимы в виде (2) , где ℓ_γ^h – функционалы с носителями в Ω , равные нулю на многочленах степени ниже m , вида

$$(\ell_\gamma^h, f) = \int_{Q(h,\gamma)} f(x)dx - \sum_{\alpha\in\mu} \sum_{\beta\in\eta} c_{\gamma,\beta}^{h,\alpha} f^{(\alpha)}(h\gamma + h\beta)$$

($c_{\gamma,\beta}^{h,\alpha}$ – постоянные, η – конечное подмножество R) , причем существуют число $T>0$ и функционал ℓ , удовлетворяющие условиям:

а) $|c_{\gamma,\beta}^{h,\alpha}| < Th^{n+|\alpha|}$;

б) если $\gamma\in B_h$ таковы, что расстояние от $[h\gamma]$ до границы Ω больше Th , то $\ell_\gamma^h(x) = \ell\left(\frac{x}{h} - \gamma\right)$.

Лемма. *Если* $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$ *– последовательность эрмитовых операторов с пограничным слоем в* Ω ; ℓ *– ее сопутствующий функционал,* ℓ^h *– функционалы:*

$$(\ell^h, f) = \int_\Omega [f - \mathcal{J}_\mu^h f](x)dx,$$

то $\{\ell^h\}$ *- последовательность эрмитовых функционалов ошибок с пограничным слоем в* Ω *и* ℓ *- сопутствующий функционал последовательности* $\{\ell^h\}$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Из (3) , (4) следует, что $(\ell^h, f) = 0$, если $f(x) \in P^m$, и $\ell^h = \sum\limits_{\gamma \in B_h} \ell^h_\gamma$.

Если ℓ^h_γ, $\gamma \in B_h$,- функционалы вида

$$(\ell^h_\gamma, f) = \int\limits_{Q(h,\gamma)} [f - J^h_\mu f](x)\,dx, \tag{15}$$

то из (12) следует

$$(\ell^h_\gamma, f) = \int\limits_{Q(h,\gamma)} f(x)dx - \sum_{\alpha\in\mu}\sum_{\beta\in\eta} f^{(\alpha)}(h\gamma + h\beta)\int\limits_{Q(h,\gamma)} \varphi^{h,\alpha}_{\gamma,\beta}(x)dx.$$

Полагая

$$c^{h,\alpha}_{\gamma,\beta} = \int\limits_{Q(h,\gamma)} \varphi^{h,\alpha}_{\gamma,\beta}(x)dx,$$

используя (13) , получаем $|c^{h,\alpha}_{\gamma,\beta}| < Kh^{n+|\alpha|}$.

Осталось установить, что ℓ- сопутствующий функционал последовательности $\{\ell^h\}$.

При $\gamma \in B_h$, $d(h\gamma, E_n \setminus \bar{\Omega}) > Ch$ из (14) , (15) следует

$$(\ell^h_\gamma, f) = \int\limits_{\Omega^h_\gamma} [f - J^h_\mu f](x)dx = \int\limits_{\Omega^h_\gamma} f(x)dx -$$

$$- \sum_{\alpha\in\mu}\sum_{\beta\in\eta} f^{(\alpha)}(h\gamma + h\beta)\int\limits_{\Omega^h_\gamma} \varphi^{h,\alpha}_{\gamma,\beta}(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^h_\gamma} f(x)dx - \sum_{\alpha\in\mu}\sum_{\beta\in\eta} f^{(\alpha)}(h\gamma + h\beta)\int\limits_{\Omega^h_\gamma} \varphi^\alpha_\beta\left(\frac{x}{h} - \gamma\right)dx.$$

С другой стороны, из определений 4 и 5 имеем

$$\left(\ell\left(\frac{x}{h} - \gamma\right), f(x)\right) = h^n(\ell(x), f(hx + h\gamma)) = h^n \int\limits_G [f(hx + h\gamma) -$$

$$-\left(\mathcal{J}_\mu f(hx+h\gamma)\right)(x)\Big]dx=\int_{\Omega_\gamma^h} f(x)dx-h^n\sum_{\alpha\in\mu}\sum_{\beta\in\eta} f^{(\alpha)}(h\gamma+h\beta)\int_G\varphi_\beta^\alpha(x)dx=$$

$$=\int_{\Omega_\gamma^h} f(x)dx-\sum_{\alpha\in\mu}\sum_{\beta\in\eta} f^{(\alpha)}(h\gamma+h\beta)\int_{\Omega_\gamma^h}\varphi_\beta^\alpha\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)dx.$$

Таким образом установлено, что при $\gamma\in B_h,\ d(h\gamma,E_n\setminus\Omega)>Ch$ функционал $\ell_\gamma^h(x)=\ell\left(\frac{x}{h}-\gamma\right)$, и лемма полностью доказана.

Обозначим

$$\mathcal{L}_\mu=\left\{\ell:(\ell,f)=\int_G f(x)dx-\sum_{\alpha\in\mu}c^\alpha f^{(\alpha)}(0),\ c^0=c^{(0,\dots,0)}=1\right\},$$

$$\mathcal{A}_{p,\mu}^m=\min_{\ell\in\mathcal{L}_\mu}\left\{\|\ell\|_{\tilde{L}_p^{m*}}\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $g\in L_q(\Omega)$. Существует последовательность $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$ эрмитовых операторов с пограничным слоем в Ω, такая, что для функционалов ℓ^h вида*

$$(\ell^h,f)=\int_\Omega g(x)[f-\mathcal{J}_\mu^h f](x)dx \tag{16}$$

при $p\in(1,\infty),\ mp>n,\ \alpha\in\mu$, выполняется

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}\le h^m\mathcal{A}_{p,\mu}^m\|g\|_{L_q(\Omega)}(1+o(1)).$$

Доказательство. Обозначим $\Phi=\bigcup_{h\in H}\Phi^h$; Φ^h – множество функций, постоянных в каждом $Q(h,\gamma)$; H – некоторое множество параметров h. Покажем вначале справедливость теоремы в случае, когда $g(x)\in\Phi^\tau$ при некотором $\tau\in H$. Построим в каждом $Q(\tau,\gamma),\gamma\in B_\tau$, последовательность эрмитовых операторов $\{\mathcal{J}_{\mu,\gamma}^h\}$ с тем же сопутствующим эрмитовым оператором, что и у $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$.

Пусть

$$(\rho_\gamma^h,f)=\int_{Q(\tau,\gamma)} g(x)[f-\mathcal{J}_{\mu,\gamma}^h f](x)dx,\quad \rho^h=\sum_{\gamma\in B_\tau}\rho_\gamma^h.$$

Если $f\in L_p^m(\Omega)$, то из дискретного неравенства Гёльдера следует

$$|(\rho^h,f)|=\sum_{\gamma\in B_\tau}|(\rho_\gamma^h,f)|\leqslant\sum_{\gamma\in B_\tau}\|\rho_\gamma^h\|_{L_p^{m*}(Q(\tau,\gamma))}\|f\|_{L_p^m(Q(\tau,\gamma))}\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\sum_{\gamma\in B_\tau}\|\rho_\gamma^h\|^q_{L_p^{m*}(Q(\tau,\gamma))}\Big)^{1/q}\|f\|_{L_p^m(\Omega)}. \tag{17}$$

Пусть $g\in\Phi^\tau$ при некотором $\tau\in H$. Обозначим $g(x)=g_\gamma$, γ - вектор из B_τ, при $x\in Q(\tau,\gamma)$; тогда

$$(\rho_\gamma^h,f)=g_\gamma\int_{Q(\tau,\gamma)}[f-\mathcal{J}_{\mu,\gamma}^h f](x)dx.$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуется

Теорема [7] : *Существует последовательность эрмитовых функционалов ошибок с пограничным слоем $\{\ell^h\}$ такая, что*

а) $\{\ell^h\}$ *асимптотически оптимальна в* $L_p^m(\Omega)$;

б) при $h\to 0$ *выполняется*

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}=\mathcal{A}_{p,\mu}^m(\operatorname{mes}\Omega)^{1/q}h^m(1+o(1)).$$

Используя данную теорему и лемму, доказанную выше, имеем при $h\to 0$

$$\|\rho_\gamma^h\|_{L_p^{m*}(Q(\tau,\gamma))}=g_\gamma(\operatorname{mes}Q(\tau,\gamma))^{1/q}h^m\mathcal{A}_{p,\mu}^m(1+o(1))=$$

$$=h^m\mathcal{A}_{p,\mu}^m\|g\|_{L_q(Q(\tau,\gamma))}(1+o(1)). \tag{18}$$

Таким образом, при $h\to 0$ из (17) , (18) следует

$$\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}\leqslant h^m\mathcal{A}_{p,\mu}^m\|g\|_{L_q(\Omega)}(1+o(1)). \tag{19}$$

Каждый эрмитов оператор $\mathcal{J}_{\mu,\gamma}^h$, $\gamma\in B_\tau$, представим в виде, аналогичном (3) :

$$\mathcal{J}^{h}_{\mu,\gamma}=\sum_{\beta}\mathcal{J}^{h,\beta}_{\mu,\gamma}\quad,\quad mes\{\Omega^{h}_{\beta}\cap Q(\tau,\gamma)\}>0.$$

Пусть $\ell^{h,\gamma}_{\beta}$ - функционалы вида

$$(\ell^{h,\gamma}_{\beta},f)=\int\limits_{\Omega^{h}_{\beta}\cap Q(\tau,\gamma)}[f-\mathcal{J}^{h,\beta}_{\mu,\gamma}f](x)dx;$$

$\mathcal{J}^{h}_{\mu,\gamma}$, $\gamma\in B_{\tau}$ - эрмитовы операторы, соответствующие данной $\{\mathcal{J}^{h}_{\mu}\}$ в определении 3. Считаем также, что ℓ^{h} представимы в виде (2) , где ℓ^{h}_{γ} - функционалы (15) .

Из построения ℓ^{h}, ℓ^{h}_{γ}, $\ell^{h,\gamma}_{\beta}$ следует, что существует число $C>0$, такое, что при $\Omega^{h}_{\beta}\subset Q(\tau,\gamma)$, $\gamma\in B_{\tau}$, $\beta\in R$, у которых $d(h\beta,E_n\setminus Q(\tau,\gamma))>ch$, выполняется

$$\ell^{h,\gamma}_{\beta}=\ell^{h}_{\gamma}. \tag{20}$$

Совокупность $\beta\in R$, у которых $mes\{\Omega^{h}_{\beta}\cap Q(\tau,\gamma)\}>0$ и (20) не выполняется, обозначим η_{γ} . Пусть $\eta=\bigcup\limits_{\gamma\in B_{\tau}}\eta_{\gamma}, M_h=\bigcup\limits_{\beta\in\eta}Q(h,\beta)$.

Имеем

$$(\ell^{h}-\rho^{h},f)=\sum_{\beta\in\eta}\int\limits_{Q(h,\beta)}g(x)[f-\mathcal{J}^{h}_{\mu,\beta}f](x)dx-$$

$$-\sum_{\gamma\in B_{\tau}}\sum_{\beta\in\eta_{\gamma}}\int\limits_{\Omega^{h}_{\beta}\cap Q(\tau,\gamma)}g(x)[f-\mathcal{J}^{h,\beta}_{\mu,\gamma}f](x)dx.$$

Аналогично (8) получим

$$\|\ell^{h}-\rho^{h}\|_{L^{m*}_{p}(\Omega)}<Kh^{m}\|g\|_{L_q(M_h)},$$

где $K>0$ - константа, не зависящая от h . Так как при $h\to 0$ величина $\|g\|_{L_q(M_h)}\to 0$, то

$$\|\ell^h - \rho^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} = o(h^m). \tag{21}$$

Оценки (19), (21) доказывают теорему при $g \in \Phi$.

Пусть $g \in L_q(\Omega)$ произвольна. Зададим $\varepsilon > 0$. Покажем, что при малых h

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leq h^m \|g\|_{L_q(\Omega)} \mathcal{A}^m_{p,\mu} (1+\varepsilon). \tag{22}$$

Выберем $g_0 \in \Phi$ так, чтобы

$$\|g-g_0\|_{L_q(\Omega)} (K + \mathcal{A}^m_{p,\mu}) \leq \frac{\varepsilon}{2} \|g\|_{L_q(\Omega)} \mathcal{A}^m_{p,\mu}, \tag{23}$$

здесь K - константа из (8), соответствующая рассматриваемой $\{\mathcal{J}^h_\mu\}$.

Представим ℓ^h в виде

$$\ell^h = \ell^h_1 + \ell^h_2, \tag{24}$$

где ℓ^h_1, ℓ^h_2 - функционалы:

$$(\ell^h_1, f) = \int_\Omega (g-g_0)[f - \mathcal{J}^h_\mu f](x)dx,$$

$$(\ell^h_2, f) = \int_\Omega g_0 [f - \mathcal{J}^h_\mu f](x)dx.$$

Из теоремы 1 следует

$$\|\ell^h_1\|_{L_p^{m*}(\Omega)} < K h^m \|g-g_0\|_{L_q(\Omega)}. \tag{25}$$

Для ℓ^h_2 при $g_0 \in \Phi$ и малых h имеет место (22), поэтому

$$\|\ell^h_2\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leq h^m \mathcal{A}^m_{p,\mu} \|g_0\|_{L_q(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2} h^m \mathcal{A}^m_{p,\mu} \|g\|_{L_q(\Omega)} \leq$$

$$\leq h^m \mathcal{A}^m_{p,\mu} \left[\|g\|_{L_q(\Omega)} + \|g-g_0\|_{L_q(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2} \|g\|_{L_q(\Omega)}\right] \tag{26}$$

Из (24) , (25) , (26) имеем

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \le \|\ell_1^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} + \|\ell_2^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \le Kh^m\|g-g_0\|_{L_q(\Omega)} +$$

$$+ h^m \mathcal{A}_{p,\mu}^m \left[\|g\|_{L_q(\Omega)} + \|g-g_0\|_{L_q(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\|g\|_{L_q(\Omega)}\right].$$

Воспользовавшись неравенством (23) , получим при малых h

$$\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2} h^m \mathcal{A}_{p,\mu}^m \|g\|_{L_q(\Omega)} - h^m \mathcal{A}_{p,\mu}^m \|g-g_0\|_{L_q(\Omega)} +$$

$$+ h^m \mathcal{A}_{p,\mu}^m \left[\|g\|_{L_q(\Omega)} + \|g-g_0\|_{L_q(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\|g\|_{L_q(\Omega)}\right] =$$

$$= h^m \mathcal{A}_{p,\mu}^m \|g\|_{L_q(\Omega)} (1+\varepsilon).$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует теорема 2.

Определение 7. Последовательность функционалов $\{\ell^h\} \subset L_p^{m*}(\Omega)$ вида

$$(\ell^h, f) = \int_\Omega g(x) f(x) dx - \sum_{\alpha\in\mu} \sum_{\substack{\gamma \\ [h\gamma]\in\bar\Omega}} b_\gamma^{h,\alpha} f^{(\alpha)}(h\gamma) \tag{27}$$

($b_\gamma^{h,\alpha}$ - константы) называется асимптотически оптимальной в $L_p^m(M)$ (M - одно из множеств Ω, E_n), если для любой последовательности функционалов $\{\rho^h\} \subset L_p^{m*}(M)$ того же вида (27) выполняется

$$\underline{\lim}_{h\to 0} \left\{\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(M)} \|\ell^h\|^{-1}_{L_p^{m*}(M)}\right\} \ge 1.$$

Теорема 3. *Для любых функционалов* $\{\rho^h\} \subset L_p^{m*}(\Omega)$ *вида* (27) *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *при* $p\in(1,\infty)$, $mp>n$, $\alpha\in\mu$ *и малых* h *выполняется*

$$\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \ge h^m \mathcal{A}_{p,\mu}^m \|g\|_{L_q(\Omega)} (1-\varepsilon).$$

Доказательство. Пусть $\{\rho^h\}$ удовлетворяют условиям теоремы.

Докажем сначала теорему в случае, когда $g \in \Phi$. Выберем $\tau \in H$ и конечный набор $\Omega^{\tau}_{\gamma(1)}, \ldots, \Omega^{\tau}_{\gamma(s)} \subset \Omega$, $\gamma(1), \ldots, \gamma(s) \in B_{\tau}$, так, что $\Omega^{\tau}_{\gamma(i)} \cap \Omega^{\tau}_{\gamma(j)}$ пусты при $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ и

$$mes\left[\bigcup_{i=1}^{s} \Omega^{\tau}_{\gamma(i)}\right] \geq mes\,\Omega\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{q}. \tag{28}$$

Из того, что $g \in \Phi$, следует, что $g = g_0$ постоянна в каждом $\Omega^{\tau}_{\gamma(i)}$, принимает там значения g_i и равна нулю вне $\bigcup_{i=1}^{s} \Omega^{\tau}_{\gamma(i)}$.

Из приведенной выше теоремы из [7] следует, что при $h < \tau$, $i=1, \ldots, s$, существует такая функция $f_i^h \in \widetilde{W}^m_p$, что

$$\| f_i^h \|_{L^m_p(G)} = 1, \quad f_i^h(0) = 0, \quad (\ell_i^h, f_i^h) \geq A_{p,\mu},$$

где

$$(\ell_i^h, f) = \int_G f(x)dx - \sum_{\alpha \in \mu} c_i^{h,\alpha} f^{(\alpha)}(0) \tag{29}$$

($c_i^{h,\alpha}$ - константы).

Через ω обозначим m раз непрерывно дифференцируемую функцию одного переменного на $(0,1)$ такую, что

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \\ 0, & x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right), \end{cases}$$

$$\omega\left(x + \frac{1}{2}\right) + \omega\left(\frac{1}{2} - x\right) = 1, \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

(Пример такой функции см. в [1 , с 105] .)

На $(0, \tau)$ определим функцию

$$\omega_h^{\tau}(x) = \begin{cases} 1 - \omega(x/h), & x \in (0, h), \\ 1, & x \in [h, \tau - h], \\ \omega((x - \tau + h)/h), & x \in (\tau - h, \tau). \end{cases}$$

При $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_0^{\tau} = \Omega^{\tau}_{(0,\ldots,0)}$ положим

$$\omega_h^{\tau,n}(x) = \prod_{i=1}^{n} \omega_h^{\tau}(x).$$

На функциях из $\widetilde{W}_p^m$ определим оператор A_h^τ соотношением

$$[A_h^\tau f](x)=\begin{cases} f(x/h)\omega_h^{\tau,n}(x), & x\in\Omega_0^\tau, \\ 0, & x\in E_n\setminus\Omega_0^\tau. \end{cases}$$

Пусть

$$f^h(x)=\sum_{i=1}^{s}[A_h^\tau f](x-\gamma(i)\tau)$$

и

$$\bar f^h(x)=\sum_{i=1}^{s}|g_i|^{q-1}\operatorname{sign} g_i\,[A_h^\tau f](x-\gamma(i)\tau).$$

Тогда

$$\|\bar f^h\|^p_{L_p^m(\Omega)}=\sum_{i=1}^{s}\|g_i^{q-1}\operatorname{sign} g_i\,[A_h^\tau f](x-\gamma(i)\tau)\|_{L_p^m(\Omega^\tau_{\gamma(i)})}=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}|g_i|^{(q-1)p}\|A_h^\tau f_i^h\|^p_{L_p^m(\Omega_0^\tau)}=\sum_{i=1}^{s}|g_i|^q\|A_h^\tau f_i^h\|^p_{L_p^m(\Omega_0^\tau)}.$$

Для функционалов из некоторой фиксированной последовательности $\{\rho^h\}$ вида (27) имеем

$$(\rho^h,\bar f^h)=\int_\Omega g\bar f^h(x)dx-\sum_{\alpha\in\mu}\sum_{\substack{\gamma\\ [h\gamma]\in\bar\Omega}} b_\gamma^{h,\alpha}(\bar f^h)^{(\alpha)}(h\gamma)=$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\Big\{|g_i|^q\int_{\Omega^\tau_{\gamma(i)}}[A_h^\tau f_i^h](x-\gamma(i)\tau)dx-$$

$$-\sum_{\alpha\in\mu}\sum_{\substack{\gamma\\ [h\gamma]\in\Omega^\tau_{\gamma(i)}}} b_\gamma^{h,\alpha}|g_i|^{q-1}\operatorname{sign} g_i\big[(A_h^\tau f_i^h)(x-\gamma(i)\tau)\big]\Big|_{x=h\gamma}\Big\}. \qquad (30)$$

Определим при $i=1,\dots,s$, $h<\tau$, $\alpha\in\mu$ коэффициенты $c_i^{h,\alpha}$ из (29), положив

$$c_i^{h,\alpha}|g_i|\operatorname{sign} g_i=(\tau-h)^{-n}h^{-|\alpha|}\sum_{\substack{\gamma\\ [h\gamma]\in\Omega^\tau_{\gamma(i)}}} b_\gamma^{h,\alpha}. \qquad (31)$$

Тогда из построения оператора $[A_h^{\tau} f](x)$, из (30) , (31) и принадлежности f_i^h к $\widetilde{W}_p^m$ следует

$$(\rho^h, \bar{f}^h) = \sum_{i=1}^{s} |g_i|^q (\tau-h)^n \Big[\int_G f_i^h(x)dx - \sum_{\alpha\in\mu} c_i^{h,\alpha} (f_i^h)^{(\alpha)}(0)\Big] = \sum_{i=1}^{s} |g_i|^q (\tau-h)^n (\ell_i^h, f_i^h).$$

Далее, аналогично доказательству ранее сформулированной теоремы из [7] , получим при малых h

$$(\rho^h, \bar{f}^h) \geq \mathcal{A}_{p,\mu}^m (1+o(1)) \sum_{i=1}^{s} |g_i|^q \operatorname{mes} \Omega_{\gamma(i)}^{\tau}.$$

и

$$\|\bar{f}^h\|_{L_p^m(\Omega)}^p = h^{-mp}(1+o(1)) \sum_{i=1}^{s} |g_i|^q \operatorname{mes} \Omega_{\gamma(i)}^{\tau}.$$

Отсюда, учитывая (28) , при малых h имеем

$$\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \geq h^m \mathcal{A}_{p,\mu}^m \|g\|_{L_q(\Omega)} (1-\tfrac{\varepsilon}{2}). \tag{32}$$

Таким образом, справедливость теоремы 3 при $g\in\Phi$ установлена. Пусть теперь $g\in L_q(\Omega)$ произвольна, тогда

$$(\rho^h, \bar{f}^h) = \int_\Omega g(x)\bar{f}^h(x)dx - \sum_{\alpha\in\mu} \sum_{\substack{\gamma \\ [h\gamma]\in\bar{\Omega}}} b_\gamma^{h,\alpha} (\bar{f}^h)^{(\alpha)}(h\gamma) \geq$$

$$\geq \int_\Omega g_0 \bar{f}^h(x)dx - \sum_{\alpha\in\mu} \sum_{\substack{\gamma \\ [h\gamma]\in\bar{\Omega}}} b_\gamma^{h,\alpha} (\bar{f}^h)^{(\alpha)}(h\gamma) -$$

$$- \Big|\int_\Omega (g-g_0)\bar{f}^h(x)dx\Big| = (\rho_1^h, \bar{f}^h) - \Big|\int_\Omega (g-g_0)\bar{f}^h(x)dx\Big|. \tag{33}$$

Выберем некоторую последовательность удовлетворяющих условиям определения 2 эрмитовых операторов $\{\mathcal{J}_\mu^h\}$, у которой $\varphi_{\gamma,i}^{h,\alpha} \equiv 0$ при $\alpha \neq 0$. Обозначим ее $\{\mathcal{J}_0^h\}$. Такие последовательности операторов названы в [4,5] последовательностями равномерно распределенных интерполяционных операторов; $g_0 \in \Phi$ выберем так, чтобы (23) было справедливо с константой K из (8).

Имеем

$$\left|\int_{\Omega}(g-g_0)\bar{f}^h(x)dx\right|=\left|\int_{\Omega}(g-g_0)\left[\bar{f}^h-\mathcal{J}_0^h\bar{f}^h\right](x)dx\right|=(\rho_2^h,\bar{f}^h). \tag{34}$$

Из (8) и (34) следует

$$\|\rho_2^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}<Kh^m\|g-g_0\|_{L_q(\Omega)}. \tag{35}$$

Используя (33) , (34) , получаем

$$\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}\geqslant\|\rho_1^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}-\|\rho_2^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}.$$

Тогда при малых h из оценок (32) , (35) имеем

$$\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}\geqslant h^m\mathcal{A}_{p,\mu}^m\|g_0\|_{L_q(\Omega)}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-Kh^m\|g-g_0\|_{L_q(\Omega)}.$$

Отсюда, учитывая (23) , получаем

$$\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}\geqslant h^m\mathcal{A}_{p,\mu}^m\|g_0\|_{L_q(\Omega)}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-h^m\mathcal{A}_{p,\mu}^m\|g\|_{L_q(\Omega)}\frac{\varepsilon}{2}+$$
$$+h^m\mathcal{A}_{p,\mu}^m\|g-g_0\|_{L_q(\Omega)}\geqslant h^m\mathcal{A}_{p,\mu}^m\|g\|_{L_q(\Omega)}(1-\varepsilon),$$

и теорема 3 полностью доказана.

Замечание. Анализируя доказательства теорем данной работы и учитывая неравенства $\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(E_n)}\leqslant\|\ell^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}$, справедливые при $\ell^h\in L_p^{m*}(\Omega)$, можно убедиться, что теоремы остаются верными, если в их формулировках пространства $L_p^m(\Omega)$ заменить на $L_p^m(E_n)$. Кроме того, результаты обобщаются на области, границы которых не являются кусочно-гладкими, но удовлетворяют условиям, описанным в [4-6] .

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974.- 808 с.

2. Половинкин В.И. Последовательности функционалов с пограничным слоем.- Сиб.мат.журн., 1974, т.15, № 2, с.413-429.

3. Половинкин В.И. Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул.- Сиб.мат.журн., 1971, т. 12, № 1, с.177-196.

4. Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы в $L_p^m(\Omega)$.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, изд-во Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1975, вып. 32, с.99-104.

5. Половинкин В.И. Последовательности кубатурных формул и функционалов с пограничным слоем: Дис. на соиск. учен. степ. д-ра физ.-мат.наук (01.01.01.).- 1979.

6. Половинкин В.И., Дидур Л.И. О порядке сходимости кубатурных формул.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, изд-во Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1975, вып.34, с.3-14.

7. Половинкин В.И., Дидур Л.И. Асимптотически оптимальные последовательности эрмитовых кубатурных формул.- Сиб.мат.журн., 1978, т.19, № 3, с.663-669.

8. Буренков В.И. Интегральное представление Соболева и формула Тейлора.- Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1974, т. 131, с.33-38.