УДК 519.633.6

СУЩЕСТВОВАНИЕ ДОСТАТОЧНО ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Р.Д. Алаев, А.М. Блохин (Новосибирск)

Для системы уравнений акустики [1] в области $t, x>0, |y|<\infty$ рассматривается смешанная задача

$$AU_t + BU_x + CU_y = 0, \qquad (\mathrm{I})$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 \\ 0 & 0 & M^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & M^2 & 0 \\ 0 & 0 & M^2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix},$$

с граничными условиями при $x=0$

$$u + d\cdot p = 0, \qquad v_t - \lambda\cdot p_y = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

и с начальными данными при $t=0$

$$U(0,x,y) = U_0(x,y). \qquad (\mathrm{III})$$

Здесь $M\,(0<M<1),\ d,\ \lambda$ - некоторые константы (см. [1]).

Для доказательства корректности смешанной задачи (I)-(III) в [1] был построен диссипативный интеграл энергии, из которого следует (см. [1,2]), что

$\bar{U}(t,x,y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2$ при всех t из некоторого промежутка $[0,T_0]$. Диссипативный интеграл энергии был построен при условии, что

$$m, n > 0, \quad \gamma_1^2 - 4\cdot m\cdot n > 0,$$

где $m = \beta\cdot d + \lambda M^2/\beta$, $n = -\lambda/\beta$,

$$\gamma_1 = \beta/M^2, \quad \beta^2 = 1 - M^2.$$

После следующей замены независимых переменных: $t' = t$, $x' = x$, $y' = y + \omega t$ смешанная задача (I)-(П) может быть переписана так (штрихи у независимых переменных опускаем):

$$\{AT + B\xi + C\eta\}U = 0, \tag{1'}$$

$$u + d\cdot p = 0, \quad T\sigma - \lambda\cdot\eta p = 0, \tag{П'}$$

где $T = \tau + \omega\cdot\eta$, $\tau = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\xi = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\eta = \dfrac{\partial}{\partial y}$,

$\omega > 0$ - некоторая константа.

В [3] была сконструирована разностная схема для численного решения смешанной задачи (I) - (Ш) так, чтобы сформулированная разностная модель допускала построение разностного аналога диссипативного интеграла энергии. Разностная модель строится так: в области $t, x \geqslant 0$, $|y| < \infty$ строим разностную сетку с шагами $\Delta t = \Delta$, $\Delta x = h_x$, $\Delta y = h_y$. Вводим в рассмотрение следующие обозначения:

$$U(k\Delta, ih_x, jh_y) = U_{i,j}^k, \quad k, i, |j| = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\varphi U_{i,j}^k = U_{i,j}^{k+1}, \quad \psi U_{i,j}^k = U_{i+1,j}^k,$$

$$\theta^{-1} U_{i,j}^k = U_{i,j-1}^k$$

и разностные отношения:

$$\tau = \frac{\varphi - 1}{\Delta}, \quad \xi = (\alpha\varphi + \delta)\frac{\psi - 1}{h_x}, \quad \eta = (\alpha\varphi + \delta)\frac{1 - \theta^{-1}}{h_y},$$

где α, $\delta > 0$ - некоторые константы $(\alpha + \delta = 1)$. Учитывая это, сформулируем следующую разностную модель смешанной задачи (I) - (III):

$$\{A\cdot T + B\cdot\xi + C\cdot\eta\} U^{\kappa}_{i,j} = 0, \quad \kappa, i, |j| = 0,1,2,\dots, \tag{1}$$

$$U^{\kappa}_{0,j} + d\cdot p^{\kappa}_{0,j} = 0, \quad T v^{\kappa}_{0,j} - \lambda\cdot\eta p^{\kappa}_{0,j} = 0, \quad \kappa, |j| = 0,1,2,\dots, \tag{2}$$

$$U^{0}_{i,j} = U_0(ih_x, jh_y), \quad i, |j| = 0,1,2,\dots . \tag{3}$$

В [3] была получена оценка разностного аналога диссипативного интеграла энергии

$$J_K \le const \cdot J_0 , \tag{4}$$

где $J_K = \|U^{\kappa}\|^2 + \|TU^{\kappa}\|^2 + \|\xi U^{\kappa}\|^2 + \|\eta U^{\kappa}\|^2 +$

$$+ \|T^2 U^{\kappa}\|^2 + \|T\xi U^{\kappa}\|^2 + \|T\eta U^{\kappa}\|^2 + \|\xi^2 U^{\kappa}\|^2 + \|\xi\eta U^{\kappa}\|^2 +$$

$$+ \|\eta^2 U^{\kappa}\|^2, \quad \|U^{\kappa}\|^2 = h_x h_y \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (U^{\kappa}_{i,j}, U^{\kappa}_{i,j}),$$

$$\|TU^{\kappa}\|^2 = h_x h_y \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (TU^{\kappa}_{i,j}, TU^{\kappa}_{i,j})$$ и т.д.

Теорема существования достаточно гладкого решения смешанной задачи (I) - (III) в [1] доказывалась так: сначала смешанная задача (I) - (III) сводилась к смешанной задаче для волнового уравнения. Для нее теорема существования достаточно гладкого решения была доказана в [4]. Из эквивалентности этих смешанных задач и следует теорема существования достаточно гладкого решения рассматриваемой смешанной задачи.

В настоящей работе излагается другой способ доказательства этой теоремы. Он основан на использовании оценки (4). Аналогичный способ подробно описан в [2, § 17-20]. Однако для применения всей аргументации этих параграфов из [2] к смешанной задаче (I)-(III) и ее разностной модели (1)-(3), мы должны оценить $\mathcal{J}_0$ через начальные данные, а это не является очевидным фактом.

Замечание 1. Оценка (4) справедлива и в том случае, если в агрегат $\mathcal{J}_\kappa$ включены также квадраты норм разностных отношений третьего порядка, т.е. $\|T^3 \cdot U^\kappa\|^2, \|\xi^3 U^\kappa\|^2, \|\eta^3 U^\kappa\|^2$ и т.д. (см. [1,3]).

Замечание 2. Оценка (4) была получена при условии выполнения следующих неравенств:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha-\delta>0, \quad h_y>\omega h_x, \\ &1<\omega M<\frac{M h_y+\sqrt{\beta^2 h_x^2+h_y^2}}{h_x}, \\ &\Delta>\frac{h_y h_x}{h_y-\omega h_x}\cdot\frac{1}{\alpha-\delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Для того чтобы оценить $\mathcal{J}_0$ через начальные данные, мы должны более тщательно изучить разностную модель (1)-(3). Предположим, что начальные данные $U_0(x,y)$ обращаются в нуль при $|y|\geqslant\frac{1}{2}Y$ и во всех точках x,y таких, что либо $x\geqslant X$, либо $0\leqslant x\leqslant\sigma<X$ для некоторого $\sigma>0$.
После несложных преобразований систему (1) можно переписать в следующем виде:

$$V_{i+1,j}=HV_{i,j}+F_{i,j}, \qquad (1')$$

где

$$V_{i,j}=\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)U^\kappa_{i,j}, \quad H=I-\frac{æ}{\alpha\tau_x}B^{-1}A-\frac{\tau_y}{\tau_x}B^{-1}C,$$

$$F_{i,j}=\frac{\tau_y}{\tau_x}B^{-1}(C+\omega A)V_{i,j-1}+\frac{1}{\alpha^2\tau_x}B^{-1}AU^\kappa_{i,j}, \quad æ=1+\omega\alpha\tau_y,$$

$\tau_y=\Delta/h_y$, $\tau_x=\Delta/h_x$, I - единичная матрица.

Граничные условия (2) перепишутся так:

$$S \cdot V_{0,j} = S_1 \cdot V_{0,j-1} + S_2 \cdot U^{\kappa}_{0,j} \ , \qquad (2')$$

где

$$S = \begin{bmatrix} d & 1 & 0 \\ -\lambda\alpha\tau_y & 0 & \varkappa \end{bmatrix}, \ S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\lambda\alpha\tau_y & 0 & \omega\alpha\tau_y \end{bmatrix}, \ S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}.$$

Будем предполагать, что при достаточно больших по модулю отрицательных j выполняется равенство $V_{ij} = 0, \ i = 0,1,2,\dots$. Найдем единственное ограниченное решение задачи(1')-(2') (при этом мы считаем, что $V_{i,j-1}$, $i=0,1,2,\dots$, уже найдено).

Матрицу H представим в виде

$$H = \hat{T}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \hat{T} \ ,$$

где

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} M^2(\varkappa+\ell) & M^2(\varkappa-\ell) & 0 \\ -M^2\varkappa-\ell & -M^2\varkappa+\ell & \alpha\tau_y \\ -\alpha\tau_y\beta^2 & -\alpha\tau_y\beta^2 & \varkappa \end{bmatrix},$$

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{\hat{d}} \begin{bmatrix} \ell(\varkappa-\ell) & -M^2\varkappa(\varkappa-\ell) & M^2\alpha\tau_y(\varkappa-\ell) \\ \ell(\varkappa+\ell) & M^2\varkappa(\varkappa+\ell) & -M^2\alpha\tau_y(\varkappa+\ell) \\ 2\alpha\tau_y\beta^2\ell & 2\alpha\tau_y\beta^2\ell & 2M^2\varkappa\beta^2\ell \end{bmatrix},$$

$$\ell = \sqrt{M^2\varkappa^2 - (\alpha\tau_y\beta)^2} \ , \quad \hat{d} = 2M^2\beta^2\ell\,[\varkappa^2 + (\alpha\tau_y)^2],$$

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\tau_x - \varkappa}{\alpha\tau_x} \ , \ \lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\varkappa-\ell}{\alpha\tau_x\beta^2} \ , \ \lambda_3 = \lambda_1 + \frac{\varkappa+\ell}{\alpha\tau_x\beta^2} \ .$$

Используя неравенства (5) , легко показать, что

$$\lambda_3 > 1 > \lambda_2 > \lambda_1 > 0.$$

Матрицу Грина G_i , которая удовлетворяет системе:

$$G_{i+1} = HG_i \quad \text{при} \quad i \leqslant -1,$$
$$G_1 = HG_0 + I \quad \text{при} \quad i = 0,$$
$$G_{i+1} = H \cdot G_i \quad \text{при} \quad i \geqslant 1,$$

возьмем в следующем виде:

$$G_i = \begin{cases} -\hat{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_3^{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{T} & \text{при } i \leqslant 0, \\ \\ \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{i-1} \end{pmatrix} \hat{T} & \text{при } i \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда единственное ограниченное решение задачи (1')-(2') записывается так:

$$V_{i,j} = W_{i,j} + \hat{V}_{i,j} ,$$

где $\hat{V}_{i,j} = \sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} G_{i-s} F_{s,j}$ $\qquad (F_{s,j} = 0 \quad \text{при } s < 0),$

$$W_{i,j} = \hat{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^i & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \hat{S}_-^{-1} \left\{ S_1 V_{0,j-1} + S_2 \cdot U_{0,j}^{\kappa} - S\hat{V}_{0,j} \right\},$$

$$\hat{S}_- = \frac{1}{\tilde{d}} \begin{bmatrix} M^2 \varkappa [\varkappa + \ell - d(\varkappa - \ell)] & M^2 \alpha \tau_y [d(\varkappa - \ell) - \varkappa - \ell] \\ \alpha \tau_y \varkappa [2\beta^2 \ell + \lambda M^2 (\varkappa - \ell)] & 2M^2 \varkappa^2 \beta^2 \ell - \lambda M^2 (\alpha \tau_y)^2 (\varkappa - \ell) \end{bmatrix},$$

$$\hat{S}_-^{-1} = \frac{1}{\det \hat{S}_-} \begin{bmatrix} 2M^2 \varkappa^2 \beta^2 \ell - \lambda M^2 (\alpha \tau_y)^2 (\varkappa - \ell) & M^2 \alpha \tau_y [\varkappa + \ell - d(\varkappa - \ell)] \\ -\alpha \tau_y \varkappa [(\varkappa - \ell) \lambda M^2 + 2\beta^2 \ell] & M^2 \varkappa [\varkappa + \ell - d(\varkappa - \ell)] \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если выполнено условие Лопатинского $\det \hat{S}_- \neq 0$, то задача (1')-(2') однозначно разрешима. Условие Лопатинского в данном случае записывается в следующей форме:

$$d \neq \frac{\text{æ}+\ell}{\text{æ}-\ell} . \tag{6}$$

Заметим, что для политропного газа с показателем адиабаты $\gamma > 1$ (см. [1]) величина

$$d = \frac{1}{M^2}\left\{\frac{\frac{3\gamma-1}{4}M^2 + \frac{3-\gamma}{4}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\right\} = \frac{1}{M^2} f(M^2)\,(f(M^2) \geq M^2).$$

Условие (6) в этом случае перепишется так:

$$\left(\frac{\alpha \tau_y}{\text{æ}}\right)^2 \cdot \beta^2 \neq M^2 - \left(\frac{f(M^2)-M^2}{f(M^2)+M^2}\right)^2 . \tag{6'}$$

В общем случае получаем

$$\left(\frac{\alpha \tau_y}{\text{æ}}\right)^2 \beta^2 \neq \left(M + \frac{d-1}{d+1}\right)\left(\frac{\frac{1+M}{1-M} - d}{d+1}\right)(1-M). \tag{6''}$$

Потребуем, чтобы выполнялось равномерное условие Лопатинского, т.е.

$$|\det \hat{S}_-| = \frac{|\text{æ}+\ell - d(\text{æ}-\ell)|}{2M^2\beta^2\left[\text{æ}^2 + (\alpha\tau_y)^2\right]^2 \ell} \cdot \left[M^2\text{æ}^2 + (\alpha\tau_y)^2\right]\text{æ} \geq \mathcal{L} > 0,$$

где $\mathcal{L}$ - некоторая постоянная.

Итак, по известным начальным данным мы определяем $U^1_{i,j}$, $i, |j| = 0, 1, 2, \ldots$, причем $U^1_{i,j} = 0$ только при $y < -\frac{1}{2}Y$, затем определяем $U^2_{i,j}$ и т.д. Оценим теперь полученное решение. Используя неравенство Минковского для числовых рядов, легко получаем, что

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|V_{i,j}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty}\|W_{i,j}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\hat{V}_{i,j}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty}\|W_{i,j}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|\hat{V}_{i,j}\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\|V_{i,j}\|^2 = (V_{i,j}, V_{i,j})$ и т.д.

Далее справедливы следующие, легкопроверяемые оценки:

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|\hat{V}_{i,j}\|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|G_i\|\right)\cdot\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|F_{i,j}\|^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{\lambda_3-\lambda_2}{(\lambda_3-1)(1-\lambda_2)}\|\hat{T}^{-1}\| \times$$

$$\times\|\hat{T}\|\left\{\tau_y\frac{\|B^{-1}(C+\omega A)\|}{\tau_x}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|V_{i,j-1}\|^2\right)^{1/2} + \frac{\|B^{-1}A\|}{\alpha^2\tau_x}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|U_{i,j}^{\kappa}\|^2\right)^{1/2}\right\},$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|W_{i,j}\|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{1}{1-\lambda_2^2}\right)^{1/2}\|\hat{T}^{-1}\|\cdot\|\hat{S}_-^{-1}\|\left\{\|S_1\|\cdot\|V_{0,j-1}\| + \right.$$

$$\left. + \|S_2\|\cdot\|U_{0,j}^{\kappa}\| + \|S\|\cdot\|\hat{V}_{0,j}\|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{1-\lambda_2^2}\right)^{1/2}\|\hat{T}^{-1}\|\cdot\|\hat{S}_-^{-1}\|\left\{\|S_1\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|V_{i,j-1}\|^2\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \|S_2\|\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|U_{i,j}^{\kappa}\|^2\right)^{1/2} + \|S\|\cdot\|\hat{V}_{0,j}\|\right\},$$

$$\|\hat{V}_{0,j}\| = \left\|\sum_{i=0}^{\infty} G_{-i}F_{i,j}\right\| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty}\|G_{-i}\|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|F_{i,j}\|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \|\hat{T}^{-1}\|\cdot\|\hat{T}\|\cdot\left(\frac{1}{\lambda_3^2-1}\right)^{1/2}\cdot\left\{\tau_y\frac{\|B^{-1}(C+\omega A)\|}{\tau_x}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|V_{i,j-1}\|^2\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\alpha^2\tau_x}\|B^{-1}A\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|U_{i,j}^{\kappa}\|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Здесь $\|\hat{T}\|$ - операторная норма матрицы $\hat{T}$ и т.д. При выводе этих оценок использовались также неравенство Коши-Буняковского для числовых рядов и аналог неравенства Юнга для свертки (см. [5]).

Окончательно мы получаем следующее неравенство:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|V_{i,j}\|^2\right)^{1/2} < q\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|V_{i,j-1}\|^2\right)^{1/2} + q_1\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|U_{i,j}^{\kappa}\|^2\right)^{1/2}, \tag{7}$$

где q, $q_1 > 0$ – некоторые постоянные.

Пусть

$$\Delta = C_\Delta \cdot \frac{h_y \cdot h_x}{h_y - \omega h_x} \cdot \frac{1}{\alpha - \delta},$$

где $C_\Delta > 1$ – некоторая константа.

Тогда

$$q = q\left(M, \alpha, \delta, \omega, C_\Delta, d, \lambda, \frac{h_x}{h_y}\right),$$

причем при $\left(\frac{h_x}{h_y}\right) \longrightarrow 0$ величина $q \longrightarrow 0$.

Из (7) легко получаем следующую оценку:

$$\|(\varphi+\frac{\delta}{\alpha})U^{\kappa}\|^2 < \hat{q}\,\|(\varphi+\frac{\delta}{\alpha})U^{\kappa}\|^2 + \hat{q}_1 \cdot \|U^{\kappa}\|^2, \tag{7'}$$

где $0<\hat{q}<1$, $\hat{q}_1 > 0$ – константы.

Таким образом, при надлежащем выборе отношения $\dfrac{h_x}{h_y}$ с помощью (7') можно оценить квадрат нормы $\|(\varphi+\frac{\delta}{\alpha})U^{o}\|^2$ через квадрат нормы начальных данных $\|U^{o}\|^2$.

Систему (1) можно переписать и таким образом:

$$V_{i+1,j} = H \cdot V_{i,j} + \tilde{F}_{i,j}, \tag{1''}$$

где

$$V_{i,j} = \frac{\varphi-1}{\Delta}U_{i,j}^{\kappa}, \quad \tilde{F}_{i,j} = \frac{\tau_y}{\tau_x}B^{-1}(C+\omega A)V_{i,j-1} -$$

$$-\frac{1}{\alpha\tau_x}B^{-1}(C+\omega A)\cdot\hat{\eta}\,U_{i,j}^{\kappa} - \frac{1}{\alpha\tau_x}\cdot\hat{\xi}\,U_{i,j}^{\kappa}, \quad \hat{\eta} = \frac{1-\theta^{-1}}{h_y}, \quad \hat{\xi} = \frac{\varphi-1}{h_x}.$$

Граничные условия (2) можно переписать так:

$$S V_{0,j} = S_1 V_{0,j-1} + \Gamma , \qquad (2'')$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \hat{\eta} P_{0,j}^{\kappa} - \omega \hat{\eta} v_{0,j}^{\kappa} \end{bmatrix} .$$

К задаче $(1'')-(2'')$ применимы все вышеизложенные рассуждения, с помощью которых можно получить оценку квадрата нормы $\| \frac{\varphi - 1}{\Delta} U^0 \|^2$ через квадраты норм разностных отношений первого порядка от начальных данных $\| \hat{\eta} U^0 \|^2$ и $\| \hat{\xi} U^0 \|^2$.

Агрегат $\tilde{\eta} U_{i,j}^{\kappa} = V_{i,j}$ удовлетворяет системе $(1')$ с $F_{i,j} = -\frac{\tau_y}{\tau_x} B^{-1}(C + \omega A) V_{i,j-1} + \frac{B^{-1} A}{\alpha^2 \tau_x} \hat{\eta} U_{i,j}^{\kappa}$, где $\tilde{\eta} = (\varphi + \frac{\delta}{\alpha}) \hat{\eta}$. В этом случае граничные условия (2) имеют следующий вид:

$$S V_{0,j} = \Gamma , \qquad (2''')$$

где

$$S = \begin{bmatrix} d & 1 & 0 \\ -\lambda\alpha & 0 & \omega\alpha \end{bmatrix} , \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\varphi - 1}{\Delta} v_{0,j}^{\kappa} \end{bmatrix} .$$

Условие Лопатинского для этой задачи аналогично условию (6) . А это означает, что мы можем получить оценку агрегата $\| (\varphi + \frac{S}{\alpha}) \frac{1 - \theta^{-1}}{h_y} U^0 \|^2$ через квадраты норм разностных отношений первого порядка от начальных данных $\| \hat{\eta} U^0 \|^2$ и $\| \hat{\xi} U^0 \|^2$. Через эти же разностные отношения первого порядка с помощью исходной системы (1) оценивается агрегат

$$\| (\varphi + \frac{\delta}{\alpha}) \frac{\varphi - 1}{h_x} U^0 \|^2 .$$

Используя вышеприведенные рассуждения, мы последовательно можем оценить агрегаты:

$\| (\varphi + \frac{\delta}{\alpha}) \frac{\varphi - 1}{\Delta} U^0 \|^2$ - через разностные отношения первого порядка от начальных данных;

$$\left\| \frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y} U^0 \right\|^2$$ - через разностные отношения второго порядка от начальных данных;

$$\left\| \left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\left(\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\right)^2 U^0 \right\|^2$$ - через разностные отношения второго порядка от начальных данных;

$$\left\| \left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y} U^0 \right\|^2$$ - через разностные отношения первого порядка от начальных данных;

$$\left\| \left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\frac{\psi-1}{h_x}\ \frac{1-\theta^{-1}}{h_y} U^0 \right\|^2$$ - через разностные отношения второго порядка от начальных данных с помощью исходной системы;

$$\left\| \left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y} U^0 \right\|^2$$ - через разностные отношения второго порядка от начальных данных;

$$\left\| \left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\left(\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\right)^2 U^0 \right\|^2$$ - через разностные отношения второго порядка от начальных данных;

$$\left\| \left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\ \frac{\psi-1}{h_x}\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y} U^0 \right\|^2$$ - через разностные отношения второго порядка от начальных данных с помощью исходной системы.

Таким образом, мы уже можем оценить через начальные данные следующие квадраты норм:

$$\| TU^0 \|^2 = \left\| \left(\frac{\varphi-1}{\Delta} + \omega(\alpha\varphi+\delta)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\right) U^0 \right\|^2,$$

$$\| \xi U^0 \|^2 = \left\| (\alpha\varphi+\delta)\frac{\psi-1}{h_x} U^0 \right\|^2,$$

$$\| \eta U^0 \|^2 = \left\| (\alpha\varphi+\delta)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y} U^0 \right\|^2,$$

$$\| T\eta U^0 \|^2 = \left\| \left(\frac{\varphi-1}{\Delta} + \omega(\alpha\varphi+\delta)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\right)(\alpha\varphi+\delta)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y} U^0 \right\|^2,$$

$$\| \xi\eta U^0 \|^2 = \left\| (\alpha\varphi+\delta)\frac{\psi-1}{h_x}(\alpha\varphi+\delta)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y} U^0 \right\|^2,$$

$$\| \eta^2 U^0 \|^2 = \left\| (\alpha\varphi+\delta)^2\left(\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\right)^2 U^0 \right\|^2.$$

Чтобы оценить другие нормы, сформулируем задачу для $V_{i,j} = \frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{\psi-1}{h_x}U^{o}_{i,j}$. Очевидно, $V_{i,j}$ удовлетворяет системе (1'') с правой частью

$$\tilde{F}_{i,j} = \frac{\tau_y}{\tau_x}B^{-1}(C+\omega A)V_{i,j-1} - \frac{1}{\alpha\tau_x}B^{-1}(C+\omega A)\hat{\xi}\,\hat{\eta}\,U^{o}_{i,j} - \frac{1}{\alpha\tau_x}\hat{\xi}^{2}\,U^{o}_{i,j}.$$

Привлекая к рассмотрению уравнения системы (1) и граничные условия (2) и учитывая, что начальные данные обращаются в нуль в узкой полосе около границы $x=0$, мы получаем следующие граничные условия:

$$SV_{0,j} = \Gamma,$$

где

$$S = \begin{bmatrix} 1+M^2 d & M^2(1+d) & 0 \\ 0 & 0 & M^2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -M^2 d\,\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\,U^{o}_{0,j} \\ -(M^2\lambda+1)\,\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\,P^{o}_{0,j} \end{bmatrix}.$$

Тогда условие Лопатинского формулируется так:

$$d \neq -\left\{\frac{1+M^2}{2M^2} - \frac{\beta^2}{2M^2}\cdot\frac{\varkappa}{\ell}\right\}.$$

Оценив агрегат $\left\|\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{\psi-1}{h_x}U^{o}_{i,j}\right\|^2$, мы с помощью исходной системы оценим агрегат $\left\|\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\left(\frac{\psi-1}{h_x}\right)^2 U^{o}_{i,j}\right\|^2$. Задача для $V_{i,j} = \left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{\psi-1}{h_x}U^{o}_{i,j}$ формулируется аналогично, а именно: $V_{i,j}$ удовлетворяет системе (1'') с правой частью

$$\tilde{F}_{ij} = \frac{\tau_y}{\tau_x}B^{-1}(C+\omega A)V_{i,j-1} - \frac{1}{\alpha\tau_x}B^{-1}(C+\omega A)\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\hat{\xi}\,\hat{\eta}\,U^{o}_{i,j} -$$

$$-\frac{1}{\alpha\tau_x}\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\left(\frac{\psi-1}{h_x}\right)^2 U^{o}_{i,j}$$

и граничными условиями

$$SV_{0,j} = \Gamma,$$

где

$$\Gamma = \left[\begin{array}{l} -M^2 d\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\cdot\frac{\varphi-1}{\Delta}v^{o}_{o,j}-\frac{M^2(1+d)}{\alpha}\,\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{\psi-1}{h_x}u^{o}_{o,j}- \\ -\frac{1+M^2 d}{\alpha}\,\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{\psi-1}{h_x}p^{o}_{o,j}-\frac{M^2 d}{\alpha}\cdot\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}v^{o}_{o,j} \\ -(M^2\lambda+1)\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\cdot\frac{\varphi-1}{\Delta}p^{o}_{o,j}-\frac{M^2}{\alpha}\cdot\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{\psi-1}{h_x}v^{o}_{o,j}- \\ -\frac{M^2\lambda+1}{\alpha}\cdot\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}p^{o}_{o,j} \end{array}\right].$$

Покажем, как в этом случае получаются граничные условия. При $i=0$ из системы (1) и граничных условий (2) можно получить следующие соотношения:

$$M^2(1+d)\xi u^{\kappa}_{o,j}+(1+M^2 d)\xi p^{\kappa}_{o,j}+M^2 d\cdot\eta v^{\kappa}_{o,j}=0,$$

$$M^2\xi v^{\kappa}_{o,j}+(M^2\lambda+1)\eta p^{\kappa}_{o,j}.$$

Действуя на эти соотношения оператором $\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)$, получаем

$$\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\left[M^2\xi v^{\kappa}_{o,j}+(M^2\lambda+1)\eta p^{\kappa}_{o,j}\right]=M^2(\alpha\varphi+\delta)\frac{\psi-1}{h_x}\left(\varphi-1+\frac{1}{\alpha}\right)v^{\kappa}_{o,j}+$$

$$+(M^2\lambda+1)(\alpha\varphi+\delta)\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\left(\varphi-1+\frac{1}{\alpha}\right)p^{\kappa}_{o,j}=$$

$$=M^2(\alpha\varphi+\delta)\frac{\psi-1}{h_x}(\varphi-1)v^{\kappa}_{o,j}+(M^2\lambda+1)(\alpha\varphi+\delta)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}(\varphi-1)p^{\kappa}_{o,j}+$$

$$+M^2\frac{\psi-1}{h_x}(\varphi-1)v^{\kappa}_{o,j}+(M^2\lambda+1)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}(\varphi-1)p^{\kappa}_{o,j}+$$

$$+\frac{M^2}{\alpha}\,\frac{\psi-1}{h_x}v^{\kappa}_{o,j}+\frac{M^2\lambda+1}{\alpha}\,\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}p^{\kappa}_{o,j}=0.$$

Отсюда, полагая $K=0$ и учитывая, что начальные данные обращаются в нуль в узкой полосе около границы $x=0$, окончательно получаем

$$M^2\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\cdot\frac{\psi-1}{h_x}\cdot\frac{\varphi-1}{\Delta}v^o_{o,j}=-(M^2\lambda+1)\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\cdot\frac{\varphi-1}{\Delta}\rho^o_{o,j}-$$

$$-\frac{M^2}{\alpha}\frac{\psi-1}{h_x}\cdot\frac{\varphi-1}{\Delta}v^o_{o,j}-\frac{M^2\lambda+1}{\alpha}\cdot\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\cdot\frac{\varphi-1}{\Delta}\rho^o_{o,j}$$ и т.д.

Оценив агрегат $\left\|\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)\frac{\varphi-1}{\Delta}\cdot\frac{\psi-1}{h_x}U^o_{i,j}\right\|^2$, мы с помощью системы (1) оценим агрегаты $\left\|\left(\frac{\varphi-1}{\Delta}\right)^2 U^o_{i,j}\right\|^2$, $\left\|\left(\varphi+\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{\psi-1}{h_x}\right)^2 U^o_{i,j}\right\|^2$. Значит, через начальные данные мы можем оценить следующие квадраты норм:

$$\|\tau^2 U^o\|^2=\left\|\left(\frac{\varphi-1}{\Delta}+\omega(\alpha\varphi+\delta)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\right)^2 U^o\right\|^2,$$

$$\|\xi^2 U^o\|^2=\left\|(\alpha\varphi+\delta)^2\left(\frac{\psi-1}{h_x}\right)^2 U^o\right\|^2,$$

$$\|\tau\xi U^o\|=\left\|\left(\frac{\varphi-1}{\Delta}+\omega(\alpha\varphi+\delta)\frac{1-\theta^{-1}}{h_y}\right)(\alpha\varphi+\delta)\frac{\psi-1}{h_x}U^o\right\|^2.$$

Если, следуя замечанию 1, в агрегат $\mathcal{J}_\kappa$ включить квадраты норм разностных отношений третьего порядка, то, применяя аналогичные рассуждения, можно оценить квадраты норм $\|\tau^3 U^o\|^2,\ldots,\|\eta^3 U^o\|^2$ через разностные отношения третьего порядка от начальных данных. Таким образом,

$$\mathcal{J}_o\leq const\left\{\|U^o\|^2+\|\hat{\xi}U^o\|^2+\|\hat{\eta}U^o\|^2+\|\hat{\xi}^2U^o\|^2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\|\hat{\xi}^3U^o\|^2+\|\hat{\xi}^2\hat{\eta}U^o\|^2+\ldots+\|\hat{\eta}^3U^o\|^2\right\}=const\cdot I_o.$$

Ясно, что оценку (4) можно без труда переписать так:

$$\max_\kappa I_\kappa\leq const\cdot I_o,\tag{8}$$

где

$$I_\kappa=\|U^\kappa\|^2+\|\tau U^\kappa\|^2+\ldots+\|\tau^3U^\kappa\|^2+\ldots+\|\hat{\eta}^3U^\kappa\|^2.$$

При этом мы предполагаем, что $0 \leq t = k\cdot\Delta \leq T_0$. Неравенство (8) мы получаем, последовательно оценивая следующие нормы:

$$\|\tau U^k\| = \|TU^k - \omega\eta U^k\| \leq \|TU^k\| + \omega\|\eta U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2};$$

$$\|\alpha\varphi\hat{\xi} U^k\| = \|\xi U^k - \delta\hat{\xi} U^k\| \leq \|\xi U^k\| + \delta\|\hat{\xi} U^k\|;$$

$$\alpha \max_k \|\hat{\xi} U^k\| \leq \delta\cdot\max_k \|\hat{\xi} U^k\| + \max_k \|\xi U^k\|;$$

$$\max_k \|\hat{\xi} U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2} \quad (\alpha > \delta!);$$

$$\max_k \|\hat{\eta} U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2};$$

$$\|\alpha\varphi(\alpha\varphi+\delta)\hat{\xi}^2 U^k\| = \|\xi^2 U^k - \delta(\alpha\varphi+\delta)\hat{\xi}^2 U^k\| \leq$$

$$\leq \max_k \|\xi^2 U^k\| + \delta\cdot\max_k \|(\alpha\varphi+\delta)\hat{\xi}^2 U^k\|;$$

$$\max_k \|(\alpha\varphi+\delta)\hat{\xi}^2 U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2};$$

$$\max_k \|\hat{\xi}^2 U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2};$$

$$\max_k \|\hat{\eta}^2 U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2};$$

$$\|\alpha\varphi(\alpha\varphi+\delta)\hat{\xi}\hat{\eta} U^k\| \leq \|\xi\eta U^k - \delta(\alpha\varphi+\delta)\hat{\xi}\hat{\eta} U^k\|;$$

$$\max_k \|(\alpha\varphi+\delta)\hat{\xi}\hat{\eta} U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2};$$

$$\max_k \|\hat{\xi}\hat{\eta} U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2};$$

$$\|\alpha\varphi\frac{\varphi-1}{\Delta}\hat{\xi} U^k\| \leq \|(T-\omega\eta)\xi U^k - \delta\tau\hat{\xi} U^k\|;$$

$$\max_k \|\tau\hat{\xi} U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2};$$

$$\max_k \|\tau\hat{\eta} U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2};$$

$$\|\tau^2 U^k\| = \|(T-\omega\breve{\eta})(T-\omega\eta)U^k\|;$$

$$\max_k \|\tau^2 U^k\| \leq const\cdot I_0^{1/2}$$

и т.д.

Теперь уже все готово, чтобы, пользуясь оценкой (8) и применяя аргументацию из [2, см § 17 – критерии компактности сеточных функций; § 19 – оценки разностных отношений и компактность приближенных решений; § 20 – теорема существования решения смешанной задачи], доказать теорему существования достаточно гладкого решения смешанной задачи (I-III).

Теорема. *В предположениях, что*

1) *область, где строится решение, задается неравенствами*

$$x>0, \quad |y|<\infty, \quad 0\leq t< T_0;$$

2) *начальные данные* $U_0(x,y)$, *достаточно гладкие* $(U_0(x,y)\in C^2)$, *равны нулю при* $|y|\geq \frac{1}{2}Y$ *и во всех точках* x,y *таких, что либо* $0\leq x\leq \sigma<X$, *либо* $x\geq Y$ *для некоторого* $\sigma>0$;

решение поставленной задачи существует, отлично от нуля лишь в ограниченной части описанной в п.1) области и принадлежит в этой части пространству C^1.

Замечание 3. Смешанная задача для системы уравнений акустики в [1] (см. также [3]) формулируется несколько иначе: к системе (1) добавляется еще одно уравнение для функции S

$$S_t+S_x=0$$

с граничным условием при $x=0$

$$S+\rho=0$$

и с начальным условием при $t=0$

$$S(0,x,y)=S_0(x,y).$$

Добавление этого уравнения, очевидно не приводит к принципиальным трудностям.

Замечание 4. Как отмечается в [2], в формулировке предположения 2 можно отказаться от того, чтобы $U_0(x,y)$ в окрестности границы $x=0$ обращалась в нуль, и заменить это требование требованием выполнения условий согласования начальных данных с граничными соотношениями достаточно высокого порядка.

Замечание 5. При наличии оценки диссипативного интеграла энергии смешанной задачи (I-III) и теоремы существования достаточно гладкого решения смешанной задачи (I-III) мы получаем, что решение этой задачи принадлежит пространству W_2^2 (т.е. тому пространству, которое диктуется построенным интегралом энергии - см. [1]).

Литература

1. Блохин А.М. Интегралы энергии в задаче об устойчивости ударной волны.- Новосибирск. 1982.- 177 с.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1979.- 392 с.
3. Алаев Р.Д., Блохин А.М. Теоретическое и численное исследование разностной модели смешанной задачи для уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне.- В кн.: Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа, 1983, с. 66-82.
4. Марчук Н.Г. Существование решений смешанной задачи для волнового уравнения с граничным условием второго порядка.- Новосибирск, Б.и., 1980.- 10 с. - (Препринт /ВЦ СО АН СССР; 239).
5. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.- 480 с.