УДК 517.5

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА С.Л. СОБОЛЕВА И N-МЕРНОЕ НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ

Б. Опиц, А. Куфнер (Прага, ЧССР)

0. Введение

0.1. Классическое неравенство Харди [1, теорема 330] вида:

$$\int_0^\infty |f(t)|^p t^{\varepsilon-p} dt \leq \left(\frac{p}{|\varepsilon-p+1|}\right)^p \int_0^\infty |f'(t)|^p t^\varepsilon dt \tag{0.1}$$

имеет место для $\varepsilon \neq p-1$ при некоторых условиях на поведение функции f в окрестности точки $t=0$ и в бесконечности. Обобщение этого неравенства, содержащее более общие весовые функции, имеет вид

$$\int_\alpha^\beta |f(t)|^p \sigma_0(t) dt \leq c_0 \int_\alpha^\beta |f'(t)|^p \sigma_1(t) dt \tag{0.2}$$

с константой C_0, не зависящей от функции f, и доказано разными авторами (см., например, [3]).

0.2. Целью настоящей статьи является нахождение условий на весовые функции $a_0, a_1, \ldots, a_N$, определенные на множестве $\Omega \subset R^N$, при которых имеет место оценка типа

$$\int_\Omega |u(x)|^p a_0(x) dx \leq \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p a_i(x) dx \tag{0.3}$$

для довольно широкого класса функций u. Неравенство (0.3) будем называть N-мерным неравенством Харди; это название оправдано и тем, что специальным случаем (0.3) является оценка

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p |x-x_0|^{\varepsilon-p} dx \leq \left(\frac{p}{|\varepsilon-p+N|}\right)^p \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p |x-x_0|^{\varepsilon} dx, \qquad (0.4)$$

где $x_0 \in \bar{\Omega}$. Неравенство (0.4) имеет место для $\varepsilon \neq p-N$ при некоторых дальнейших предположениях (см. п.2) и напоминает неравенство (0.1) .

Если ввести весовое пространство

$$L^p(\Omega; a_0) = \Big\{ u = u(x),\ x \in \Omega;\ \|u\|_{p,a_0} = \Big(\int_{\Omega} |u(x)|^p a_0(x) dx \Big)^{1/p} < \infty \Big\}$$

и весовое пространство С.Л. Соболева

$$W^{1,p}(\Omega; a_1, \ldots, a_N) = \Big\{ u = u(x),\ x \in \Omega;\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega; a_i) \ \text{для}\ i = 1, \ldots, N \Big\},$$

то неравенство (0.3) выражает вложение

$$W^{1,p}(\Omega; a_1, \ldots, a_N) \hookrightarrow L^p(\Omega; a_0).$$

Неравенства типа (0.3) рассматривались для $p=2$ в [4] и в [5] - тоже для $p=2$ и для специальных весовых функций $a_0(x) = |\Delta g(x)|$, $a_1(x) = \ldots = a_N(x) = 4|\Delta g(x)|^{-1} |\nabla g(x)|^2$. Неравенство (0.4) было доказано другим способом в [2] для $x_0 \in \partial\Omega$ при некоторых условиях на Ω . Неравенство типа (0.3) рассматривается также в [6 , теорема 2] методом, который обобщает метод, использованный в [5] .

0.3. Символом $\mathcal{C}^{0,1}$ будем обозначать множество всех ограниченных областей в $\mathbb{R}^N$, граница которых удовлетворяет локально условию Липшица. (Точное определение см., например, в [3] .)

0.4. Символом $\mathcal{W}(\Omega)$ будем обозначать множество всех весовых функций на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, т.е. измеримых и почти всюду в Ω положительных функций.

1. Основная теорема

1.1. Теорема. *Пусть* $p>1$, $\Omega\subset R^N$, $\Omega=\lim\limits_{n\to\infty}\Omega_n$, *где* $\Omega_n\in\varphi^{0,1}$, $\Omega_n\subseteq\Omega_{n+1}\subseteq\Omega$. *Пусть функции* a_i $(i=0,1,\ldots$ $\ldots,N)$, u, v *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $a_i\in w(\Omega)$ *для* $i=0,1,\ldots,N$;

2) *почти всюду (п.в.) в* Ω *существуют производные*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad i=1,\ldots,N;$$

3) *п.в. в* Ω *существуют производные*

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\operatorname{sgn}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right],\qquad i=1,\ldots,N;$$

4) *функция* v *является решением дифференциального уравнения*

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i(x)\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\operatorname{sgn}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]+a_0(x)|v|^{p-1}\operatorname{sgn}v=0 \tag{1.1}$$

и $v\neq 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\neq 0$, $i=1,\ldots,N$, *п.в. в* Ω.

Обозначим

$$w_i=\frac{\left|\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\operatorname{sgn}\dfrac{\partial v}{\partial x_i}}{|v|^{p-1}\operatorname{sgn}v},\quad i=1,\ldots,N; \tag{1.2}$$

5) *для* $n=1,2,\ldots$ *имеет место*

$$|u|^p\sum_{i=1}^{N}w_ia_i\in W^{1,1}(\Omega_n);$$

6) $$\limsup_{n\to\infty}\int_{\partial\Omega_n}|u|^p\left(\sum_{i=1}^{N}w_ia_i\nu_{ni}\right)dS\geq 0,$$

где ν_{ni} $(i=1,\ldots,N)$ *– компоненты вектора* ν_n *внешней нормали к границе* $\partial\Omega_n$ *области* Ω_n.

Тогда имеет место неравенство

$$\int_\Omega|u(x)|^pa_0(x)dx\leq\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^pa_i(x)dx. \tag{1.3}$$

1.2. Замечания. (i) Грубо говоря, N-мерное неравенство Харди (1.3) имеет место, если существует решение v уравнения (1.1), в котором коэффициентами являются весовые функции a_i.

(ii) Если Ω -произвольная область в R^N, то, очевидно, существуют области $\Omega_n \in \varphi^{0,1}$ такие, что $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \subseteq \Omega$ и $\Omega = \lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n$.

(iii) Если $\Omega \in \varphi^{0,1}$, то можно взять $\Omega_n = \Omega$ для $n=1,2,\dots$, то этот выбор не всегда является целесообразным (см. п.2.3 (ii)).

1.3. Доказательство теоремы 1.1. Если

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p a_i(x)\,dx = \infty,$$

то (1.3) выполнено. Поэтому будем предполагать, что

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p a_i(x)\,dx < \infty .$$

Для $p>1$ и $s,t \geqslant 0$ верно неравенство

$$s^p + (p-1)t^p - pst^{p-1} \geqslant 0,$$

и, следовательно, для $s_i, t_i \in R$ $(i=1,\dots,N)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \left[|s_i|^p + (p-1)|t_i|^p - p|s_i||t_i|^{p-1} \right] \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Если здесь положить

$$s_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) a_i^{1/p}(x), \quad t_i = u(x) \frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}{v(x)} a_i^{1/p}(x), \quad i=1,\dots,N,$$

то получим

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p a_i+(p-1)|u|^p\frac{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p}{|v|^p}a_i-\right.$$

$$\left.-p\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right||u|^{p-1}\frac{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}}{|v|^{p-1}}a_i\right]\geq 0,$$

откуда, используя обозначения (1.2), имеем

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p a_i+(p-1)|u|^p\frac{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p}{|v|^p}a_i-\right.$$

$$\left.-p\frac{\partial u}{\partial x_i}|u|^{p-1}\operatorname{sgn}u\, w_i a_i\right]\geq 0 \qquad (1.5)$$

(все рассуждения верны п.в. в Ω).

Так как

$$p\frac{\partial u}{\partial x_i}|u|^{p-1}\operatorname{sgn}u\, a_i w_i =$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[|u|^p a_i w_i\right]-|u|^p\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i w_i),$$

то отсюда и из (1.5) следует, что

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p a_i+(p-1)|u|^p\frac{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p}{|v|^p}a_i+|u|^p\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i w_i)\right]\geq$$

$$\geq\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[|u|^p a_i w_i\right]. \qquad (1.6)$$

Ввиду того, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i w_i)=-(p-1)a_i\frac{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p}{|v|^p}+\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\operatorname{sgn}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]}{|v|^{p-1}\operatorname{sgn}v},$$

из (1.6) вытекает

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p a_i+|u|^p\sum_{i=1}^{N}\frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\operatorname{sgn}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]}{|v|^{p-1}\operatorname{sgn} v}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^p a_i w_i\right),$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p a_i-|u|^p a_0\geqslant\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u|^p a_i w_i\right), \tag{1.7}$$

так как из условия 4) (см. уравнение (1.1)) следует, что

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_i\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p-1}\operatorname{sgn}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]}{|v|^p\operatorname{sgn} v}=-a_0 . \tag{1.8}$$

Интегрируя неравенство (1.7) по Ω_n и применяя затем к правой части формулу Грина, имеем

$$\int_{\Omega_n}\left[\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p a_i(x)-|u|^p a_0(x)\right]dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\partial\Omega_n}|u|^p\left(\sum_{i=1}^{N} w_i a_i \nu_{ni}\right)ds. \tag{1.9}$$

Из (1.9), переходя к пределу при $n\to\infty$ и учитывая условие 6) нашей теоремы, получаем неравенство (1.3) . Теорема доказана.

2. Некоторые применения теоремы 1.1

2.1. Пусть Ω - область в R^N, $p>1$, $x_0\in R^N$. Для $x\in\Omega$ и для $\varepsilon\neq p-N$ положим

$$
\left.\begin{aligned}
a_0(x) &= \left(\frac{|\varepsilon-p+N|}{p}\right)^p |x-x_0|^{\varepsilon-p}, \\
a_i(x) &= |x-x_0|^{\varepsilon+p-2}\,|x_i-x_{0i}|^{2-p} = \\
&= |x-x_0|^{\varepsilon}\left(\frac{|x_i-x_{0i}|}{|x-x_0|}\right)^{2-p}, \quad i=1,\dots,N, \\
\sigma(x) &= |x-x_0|^{\alpha} \quad \text{с} \quad \alpha = 1-\frac{\varepsilon+N}{p}\ (\neq 0).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)
$$

Функции a_i и функция σ удовлетворяют условиям 1), 3) и 4) теоремы 1.1.

Условие 6) этой теоремы в нашем случае имеет вид:

$$
0 \leq \lim_{n\to\infty} \sup \int_{\partial\Omega_n} |u|^p |x-x_0|^{\varepsilon-p} |\alpha|^{p-1} \operatorname{sgn}\alpha \left[\sum_{i=1}^N (x_i-x_{0i})\nu_{ni}\right] ds,
$$

и это условие будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$
|u|^p \operatorname{sgn}\alpha \sum_{i=1}^N (x_i-x_{0i})\nu_{ni}(x) \geq 0 \qquad \text{на } \partial\Omega_n \qquad (2.2)
$$

для достаточно больших $n\in\mathbb{N}$.

Если на некоторой части $\Gamma_n^{\cdot}$ границы $\partial\Omega_n$ будет

$$
\operatorname{sgn}\alpha \sum_{i=1}^N (x_i-x_{0i})\nu_{ni}(x) < 0,
$$

то выполнение условия (2.2) можно обеспечить требованием $u=0$ на Γ_n.

Из этих рассуждений следует, что знак выражения

$$
h(x,x_0,\Omega_n) = \sum_{i=1}^N (x_i-x_{0i})\nu_{ni}(x)
$$

на $\partial\Omega_n$ будет играть важную роль.

2.2. Обозначение. Пусть $G\subset\mathbb{R}^N$, $G\in\varphi^{0,1}$. Тогда символом

$$
\partial G^+(x_0) \quad (\partial G^-(x_0),\ \partial G^0(x_0))
$$

будем обозначать множество тех точек $x\in\partial G$, для которых число $h(x,x_0,G)$ положительно (отрицательно, равно нулю),

2.3. Случай области $\Omega\in\varphi^{0,1}$ и $x_0\in\bar\Omega$. Будем рассматривать функции $a_0,a_1,\dots,a_N$ и σ из (2.1). (Случай $x_0\notin\bar\Omega$ является, с точки зрения весовых функций, неинтересным.)

(i) Пусть $\varepsilon<p-N$; тогда $\alpha>0$ и $\operatorname{sgn}\alpha=1$. Положим $\Omega_n=\Omega$. Условия 2), 5) и 6) теоремы 1.1 будут выполнены, если

$$u\in C^1(\bar\Omega),\ \operatorname{supp}u\cap\{x_0\}=\phi,\ u=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega^-(x_0)$$

(что, в свою очередь, будет выполнено, если потребовать $u\in C_0^1(\Omega-\{x_0\})$).

(ii) Пусть $\varepsilon>p-N$; тогда $\alpha<0$ и $\operatorname{sgn}\alpha=-1$. Положим $\Omega_n=$ $=\Omega-K\left(x_0,\frac{1}{n}\right)$ для достаточно больших n, где $K(x_0,r)$- шар радиуса r с центром в точке x_0. Очевидно, что

$$\partial\Omega_n^+(x_0)=\partial\Omega^+(x_0)\cap\bar\Omega_n,$$

$$\partial\Omega_n^-(x_0)=\left[\partial\Omega^-(x_0)\cap\bar\Omega_n\right]\cup\left[K\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap\bar\Omega\right].$$

Условия 2), 5) и 6) теоремы 1.1 будут выполнены, если имеет место

$$u\in C^1(\bar\Omega),\quad u=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega^+(x_0).$$

(Это условие будет выполнено, если, например, $u\in C_0^1(\Omega)$. Если брать $\Omega_n=\Omega$, как в случае (i), то условие 5) теоремы 1.1 может не выполниться.)

Таким образом, из теоремы 1.1 получаем

2.4. Следствие. *Пусть* $\Omega\in\varphi^{0,1}$, $p>1$, $x_0\in\bar\Omega$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\int_\Omega |u(x)|^p|x-x_0|^{\varepsilon-p}dx\le$$

$$\le\frac{p^p}{|\varepsilon-p+N|^p}\sum_{i=1}^N\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p|x-x_0|^\varepsilon\left(\frac{|x_i-x_{0i}|}{|x-x_0|}\right)^{2-p}dx\,, \tag{2.3}$$

если выполнено одно из следующих двух условий:

(i) $\varepsilon < p-N$, $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $\operatorname{supp} u \cap \{x_0\} = \phi$, $u=0$ на $\partial\Omega^-(x_0)$;

(ii) $\varepsilon > p-N$, $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $u=0$ на $\partial\Omega^+(x_0)$.

2.5. Замечания. (i) Для $p=2$ неравенство (2.3) принимает вид

$$\int_\Omega |u(x)|^2 |x-x_0|^{\varepsilon-2} dx \le \frac{4}{|\varepsilon-2+N|^2} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 |x-x_0|^\varepsilon dx \quad (2.4)$$

и доказано в работе [5] для $x_0 = 0$ и для $u \in C_0^1(\Omega - \{0\})$.

(ii) Для $1<p<2$ имеем $\left(\frac{|x_i - x_{0i}|}{|x-x_0|}\right)^{2-p} \le 1$ и неравенство (2.3) принимает вид (0.4).

2.6. Примеры. (i) Для $\Omega = K(x_0, r)$ выполняется

$$\partial\Omega^+(x_0) = \partial\Omega, \quad \partial\Omega^-(x_0) = \partial\Omega^0(x_0) = \phi.$$

Тогда из следствия 2.4 следует, что неравенство (2.3) имеет место, если

$$\varepsilon < p-N, \ u \in C^1(\bar{\Omega}), \ \operatorname{supp} u \cap \{x_0\} = \phi,$$

или

$$\varepsilon > p-N, \ u \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u=0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

(ii) Если Ω - квадрат в R^2, $\Omega = (0,r)\times(0,r)$, то

$$\partial\Omega^+(0) = \{[r, x_2],\ 0 \le x_2 \le r\} \cup \{[x_1, r],\ 0 \le x_1 \le r\};\ \partial\Omega^-(0) = \phi,$$

$\partial\Omega^0(0)$- остальные две стороны квадрата. Неравенство (2.3) принимает вид

$$\int_\Omega |u(x)|^p |x|^{\varepsilon-p} dx \le$$

$$\leq \frac{p^p}{|\varepsilon-p+2|^p} \int_\Omega \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^p \left(\frac{|x_1|}{|x|}\right)^{2-p} + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^p \left(\frac{|x_2|}{|x|}\right)^{2-p} \right] |x|^\varepsilon dx$$

и имеет место

для
$$\varepsilon < p-2, \quad u \in C^1(\bar{\Omega}) \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} u \cap \{0\} = \emptyset$$

или

$$\text{для} \quad \varepsilon > p-2, \quad u \in C^1(\bar{\Omega}) \quad \text{и} \quad u=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega^+(0).$$

2.7. Замечание. Неравенство (2.3) можно доказать и для более сложных множеств Ω, даже неограниченных, правда, с некоторыми видоизменениями (см. [6]). Так, например, неравенство (2.3) верно для $\Omega = \mathbb{R}^N$, если

$\varepsilon < p-N$, $u \in C^1(K)$ для каждого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^N$

и $\operatorname{supp} u \cap \{x_0\} = \emptyset$ или $\varepsilon > p-N$ и $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$.

Литература

1. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. Inequalities. - University Press, Cambridge, 1952. - 324 p.
2. Kufner A. Einige Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit Belegungsfunktion. - Czechoslovak Math.J., 1965, v.15, No 90, p.597-620.
3. Kufner A. Weighted Sobolev Spaces. - Teubner, Leipzig, 1980.
4. Kufner A., Opic B. Some imbeddings for weighted Sobolev spaces. - In: Constructive theory of functions, Proceedings of a conference held in Varna, Bulgaria, 1981 (to appear).
5. Lewis R.T. Singular elliptic operators of second order with purely discrete spectra. - Trans.Amer.Math.Soc., 1982, v.271, p.653-666.
6. Опиц Б. Об N-мерном неравенстве Харди. - Международная конференция по теории приближения функций. Труды конференции, Киев, УССР, 1983, с. 138.