УДК 517.947

# ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА

Ш.Г. Нафиков (Новосибирск)

Получены оценки при $t \to \infty$ решения первой краевой задачи в цилиндре $Q = \{(t,x): t>0, x \in G \subset E_n\}$ для уравнений вида

$$\mathcal{D}_t^2 L_0(x,\mathcal{D}_x)u(t,x) + L_1(x,\mathcal{D}_x)u(t,x) = 0. \qquad (1)$$

Рассмотренный класс содержит, в частности, уравнение Соболева [1]

$$\mathcal{D}_t^2 \Delta u(t,x) + \mathcal{D}_n^2 u(t,x) = 0 \qquad (2)$$

и уравнение внутренних волн [2]

$$\mathcal{D}_t^2 \Delta u(t,x) + N^2(\mathcal{D}_{1,1}^2 u(t,x) + \mathcal{D}_{2,2}^2 u(t,x)) = 0. \qquad (3)$$

Поведение решений при $t \to \infty$ для некоторых уравнений вида (1) изучалось в работах Р.А. Александряна, Т.И. Зеленяка, В.Н. Масленниковой и др.

Оценки на бесконечности решений краевых задач для уравнения (2), справедливые для любой области $G \subset E_n$ при $n \leqslant 3$, приводились в [3-5]. В случае произвольного $n \geqslant 2$ изучались в [6-7].

## §1. Некоторые обозначения, постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $G \subset E_n$ - ограниченная область с $(n-1)$-мерной достаточно гладкой границей $\partial G$. Тогда

$G' \Subset G$ означает, что $G' \subset \overline{G'} \subset G$;

$$\overline{x^k} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n);$$

$$\mathcal{D}_k u(t,x) = \mathcal{D}_{x_k} u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_k} u(t,x);$$

$$\nabla u(t,x) = (\mathcal{D}_1 u(t,x), \ldots, \mathcal{D}_n u(t,x));$$

$\langle u(t,x), v(t,x)\rangle$ - скалярное произведение в $L_2$,

$$a_{i,j}(x) = a_{i,j}, \quad b_{k,\ell}(x) = b_{k,\ell}.$$

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\mathcal{D}_t^2 L_0(x,\mathcal{D}_x)u(t,x) + L_1(x,\mathcal{D}_x)u(t,x) = 0, \; t>0, \; x\in G,$$

$$u(t,x)\big|_{t=0} = u_1(x), \quad \mathcal{D}_t u(t,x)\big|_{t=0} = u_2(x), \tag{4}$$

$$u(t,x)\big|_{\partial G} = 0, \quad u_i(x)\big|_{\partial G} = 0, \quad i=1,2.$$

Предполагается, что $L_0(x,\mathcal{D}_x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \mathcal{D}_i(a_{ij}(x)\cdot\mathcal{D}_j u(t,x))$ и выполняется условие

$$\nu_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\cdot\xi_i\cdot\xi_j \le \mu_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x), \tag{5}$$

также $L_1(x,\mathcal{D}_x)u(t,x) = \sum\limits_{k,\ell=1}^{p} \mathcal{D}_k(b_{k,\ell}(x)\cdot\mathcal{D}_\ell u(t,x))$, и выполняется условие

$$\nu_1\cdot\sum_{k=1}^{p}\zeta_k^2 \le \sum_{k,\ell=1}^{p} b_{k,\ell}(x)\cdot\zeta_k\cdot\zeta_\ell \le \mu_1\cdot\sum_{k=1}^{p}\cdot\zeta_k^2, \quad b_{k,\ell}(x) = b_{\ell,k}(x), \; 1\le p\le n-1, \tag{6}$$

для произвольного $x\in G$. Здесь $\nu_0$, $\mu_0$, $\nu_1$ и $\mu_1$ - положительные постоянные, $\xi$ и $\zeta$ - произвольные вещественные векторы.

Теорема 1. *Пусть* $u_1(x), u_2(x) \in W_2^{q}(G)$, *где* $q = \left[\frac{n}{2}\right] + \lambda + 1$, $\lambda$- *целое. Коэффициенты* $a_{i,j}(x)$ *и* $b_{k,\ell}(x)$ *операторов* $L_0(x,\mathcal{D}_x)$ *и* $L_1(x,\mathcal{D}_x)$ *соответственно принадлежат классу* $C^{q-1}$. *Тогда для любой подобласти* $G' \Subset G$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *для решения первой краевой за-*

*дачи (4) имеют место оценки:*

$$\sup_{\substack{x\in G'\\ |\alpha|\le\lambda}} \left|\mathcal{D}_t^{\beta}\mathcal{D}_x^{\alpha} u(t,x)\right| \le c_1(x)\cdot t^{\frac{n}{2}+\lambda-1+\varepsilon} + c_2\,,\ \beta\ge 1, \tag{7}$$

$$\sup_{\substack{x\in G'\\ |\alpha|\le\lambda}} \left|\mathcal{D}_x^{\alpha} u(t,x)\right| < c_3 t^{\frac{n}{2}+\lambda} + c_4\,, \tag{8}$$

*где константы* $c_i$ *не зависят от* $t$ .

**Теорема 2.** *Пусть* $u_1(x)\,,\ u_2(x)\in W_2^{r}(G)$ *, граница* $\partial G$ *области* $G$ *класса* $C^{r+1}$ *и коэффициенты* $a_{ij}(x)$ *и* $b_{k\ell}(x)\in C^{r}$ *. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *решение краевой задачи (4) удовлетворяет оценкам*

$$\sup_{\substack{x\in G\\ |\alpha|\le\lambda}} \left|\mathcal{D}_t^{\beta}\mathcal{D}_x^{\alpha} u(t,x)\right| \le c_5(\varepsilon)\cdot t^{2\left(\frac{n}{2}+\lambda-1\right)+\varepsilon} + c_6\,,\ \beta\ge 1, \tag{9}$$

*где константы* $c_i$ *не зависят от* $t$ .

## § 2. Оценки решений первой краевой задачи для уравнения типа Соболева внутри области

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие леммы.

**Лемма 1.** *Для краевой задачи (4) справедлив закон сохранения интеграла энергии*

$$\mathcal{J}(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_G a_{ij}(x)\cdot\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i u(x,t)\cdot\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j u(x,t)\,dx +$$

$$+\sum_{k,\ell=1}^{p} \int_G b_{k\ell}(x)\,\mathcal{D}_k u(x,t)\cdot\mathcal{D}_\ell u(x,t)\,dx = \mathcal{J}(0), \tag{10}$$

*и имеют место оценки:*

$$\left\|\mathcal{D}_t u(t,x),\ \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(G)\right\| \le c_1\,, \tag{11}$$

$$\left\|u(t,x), L_2(G)\right\| \le c_2\,, \tag{12}$$

*где константы* $c_1$ *и* $c_2$ *не зависят от* $t$ .

**Доказательство.** Умножим уравнение (1) на функцию $\mathcal{D}_t u(x,t)$ и проинтегрируем по области $G$ . Пользуясь формулой Остроградского и учитывая, что $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$, будем иметь

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle \mathcal{D}_i(a_{ij}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j u)+\mathcal{D}_j(a_{ji}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i u),\mathcal{D}_t u\rangle =$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j u\cdot\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i u+\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i u\cdot\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j u)\rangle =$$

$$=-\mathcal{D}_t\sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i u,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j u)\rangle.$$

Аналогично, с учетом $b_{k\ell}(x)=b_{\ell k}(x)$ будем иметь

$$\sum_{k,\ell=1}^{p} \langle \mathcal{D}_k(b_{k\ell}\mathcal{D}_\ell u)+\mathcal{D}_\ell(b_{\ell k}\mathcal{D}_k u),\mathcal{D}_t u\rangle = -\mathcal{D}_t\sum_{k,\ell=1}^{p} \langle b_{k\ell}(\mathcal{D}_k u,\mathcal{D}_\ell u)\rangle.$$

Складывая, получаем при любом $t>0$ равенство:

$$\mathcal{D}_t\sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i u,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j u)\rangle+\mathcal{D}_t\sum_{k,\ell=1}^{p} \langle b_{k\ell}(\mathcal{D}_k u,\mathcal{D}_\ell u)\rangle=0.$$

Интегрируя это равенство от $0$ до $t$, имеем (10). Тогда, в силу неравенства Стеклова, из (10) следуют оценки (11), (12).

Лемма 2. *Для решений задачи (4) имеют место оценки:*

$$\|\mathcal{D}_t^{\beta} u(t,x),\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)\|\leq c,\quad \beta\geq 1. \tag{13}$$

Доказательство. При $\beta=1$ оценка (13) доказана в лемме 1. Докажем ее для $\beta=2$. Умножая уравнение (1) на функцию $\mathcal{D}_t^2 u(t,x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$ скалярно в $L_2$ и интегрируя по частям, получаем следующее равенство:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j u,\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i u\rangle+\sum_{k,\ell=1}^{p} \langle b_{k\ell}\mathcal{D}_k u,\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_\ell u\rangle=0.$$

Учитывая ограниченность коэффициентов $b_{k\ell}(x)$ и равномерную эллиптичность оператора $L_0(x,\mathcal{D}_x)$, имеем

$$\nu_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \| \mathcal{D}_t^2 \mathcal{D}_i u(x,t), L_2 \|^2 \leq c \cdot \sum_{k,\ell=1}^{p} \| \mathcal{D}_\ell u(x,t), L_2 \| \cdot \| \mathcal{D}_t^2 \mathcal{D}_k u(x,t), L_2 \| \leq$$

$$\leq c_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} \| \mathcal{D}_t^2 \mathcal{D}_i u(x,t), L_2 \| .$$

Отсюда следует (13) для $\beta = 2$ . Доказательство при $\beta \geq 3$ проводится по индукции. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $u_1(x), u_2(x) \in W_2^m(G), a_{ij}(x)$ *и* $b_{k\ell}(x) \in C^{m-1}$. *Тогда для любой подобласти* $G' \Subset G$ *имеют место оценки:*

$$\| \mathcal{D}_t^\beta u(t,x), W_2^s(G') \| \leq c_1 t^{s-1} + c_2 , \quad \beta \geq 1; \tag{14}$$

$$\| \mathcal{D}_t^{\beta-1} \mathcal{D}_k u(t,x), W_2^{s-1}(G') \| \leq c_3 t^{s-1} + c_4 , \ \beta \geq 1 ; \ k = 1, \ldots, p; \tag{15}$$

$$\| u(t,x), W_2^s(G') \| \leq c_5 t^s + c_6 , \tag{16}$$

*где* $s = m - \theta$ , $0 < \theta < 1$ , *константы* $c_i$ *зависят от области* $G$ *и* $\| u_k(x), W_2^m \|$.

Доказательство. Получим вначале эти оценки при $s = m$ целом. Определим функцию $\chi(x) \in C_0^\infty$ :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \bar{G}', \\ 0 & \text{при } x \notin G'' \Subset G. \end{cases} \qquad 0 \leq \chi(x) \leq 1, \quad \bar{G}' \subset G''.$$

Проведем оценки для функции $v(t,x) = \chi(x) \cdot u(t,x)$ . Действуя оператором (1) на функцию $v(t,x)$ , имеем

$$\mathcal{D}_t^2 \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{D}_i (a_{ij} \mathcal{D}_j v) + \sum_{k,\ell=1}^{p} \mathcal{D}_k (b_{k\ell} \mathcal{D}_\ell v) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{D}_i (a_{ij} \mathcal{D}_j \chi(x)) \cdot \mathcal{D}_t^2 u(t,x) +$$

$$+ \sum_{k,\ell=1}^{p} \mathcal{D}_k (b_{k\ell} \mathcal{D}_\ell \chi(x)) \cdot u(t,x) + 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \mathcal{D}_j \chi(x) \cdot \mathcal{D}_t^2 \mathcal{D}_i u(t,x) +$$

$$+2\sum_{k,l=1}^{p} b_{kl}\mathcal{D}_k\chi(x)\cdot\mathcal{D}_l u(t,x). \tag{17}$$

Обозначим правую часть в (17) через $f(t,x)$. Из оценок (11) и (12) следует оценка

$$\|f(t,x), L_2(G)\| \leq c.$$

Умножим обе части тождества (17) скалярно в $L_2$ на функцию $\mathcal{D}_t\Delta v(t,x)$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} <\mathcal{D}_i(a_{ij}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v)+\mathcal{D}_j(a_{ji}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i v),\mathcal{D}_t\Delta v>+$$

$$+\sum_{k,l=1}^{p}<\mathcal{D}_k(b_{kl}\mathcal{D}_l v)+\mathcal{D}_l(b_{lk}\mathcal{D}_k v),\mathcal{D}_t\Delta v> = 2<f(t,x),\mathcal{D}_t\Delta v>.$$

Поскольку $v(t,x)\equiv 0$ при $x\in G\setminus G''$, то, применяя формулу Остроградского, получаем

$$\mathcal{D}_t<\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathcal{D}_i\nabla\mathcal{D}_t v,\mathcal{D}_j\nabla\mathcal{D}_t v)>+<\sum_{i,j=1}^{n}\nabla a_{ij}(\mathcal{D}_j\mathcal{D}_t^2 v\cdot\mathcal{D}_i\nabla\mathcal{D}_t v+$$

$$+\mathcal{D}_i\mathcal{D}_t^2 v\cdot\mathcal{D}_j\nabla\mathcal{D}_t v)>+\mathcal{D}_t<\sum_{k,l=1}^{p} b_{kl}\mathcal{D}_k\nabla v,\mathcal{D}_l\nabla v>+<\sum_{k,l=1}^{p}\nabla b_{kl}(\mathcal{D}_l v\cdot\mathcal{D}_k\nabla\mathcal{D}_t v+$$

$$+\mathcal{D}_k v\cdot\mathcal{D}_l\nabla\mathcal{D}_t v)>=2<f(t,x),\mathcal{D}_t\Delta v(t,x)>.$$

Обозначим в этом тождестве суммы скалярных произведений, содержащих $\nabla a_{ij}(x)$ и $\nabla b_{kl}(x)$ соответственно через $f_1(t,x)$ и $f_2(t,x)$. Тогда, интегрируя это тождество от $0$ до $t$, имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n}<a_{ij}\mathcal{D}_i\nabla\mathcal{D}_{t'}v(t',x),\mathcal{D}_j\nabla\mathcal{D}_{t'}v(t',x)>+\sum_{k,l=1}^{p}<b_{kl}\mathcal{D}_k\nabla v(t',x),\mathcal{D}_l\nabla v(t',x)>\Big|_0^t=$$

$$=2\int_0^t<f(\tau,x),\mathcal{D}_\tau\Delta v(\tau,x)>d\tau-\int_0^t\int_G f_1(\tau,x)\,dx\,d\tau-\int_0^t\int_G f_2(\tau,x)\,dx\,d\tau. \tag{18}$$

При этом выполняются следующие неравенства

$$\nu_0\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{D}_i\nabla\mathcal{D}_t v,L_2\|^2\leq\sum_{i,j=1}^{n}<a_{ij}\mathcal{D}_i\nabla\mathcal{D}_t v,\mathcal{D}_j\nabla\mathcal{D}_t v>,$$

$$|\langle f(t,x), \mathcal{D}_t \Delta v\rangle| \le \|f(t,x), L_2(G)\| \cdot \|\mathcal{D}_t \Delta v, L_2(G)\| \le c \|\mathcal{D}_t \Delta v, L_2\|,$$

$$\left|\int_G f_1(t,x)dx\right| \le c \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \|\mathcal{D}_j \mathcal{D}_t^2 v, L_2\| \cdot \|\mathcal{D}_i \nabla \mathcal{D}_t v, L_2\| \le c_1 \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{D}_i \nabla \mathcal{D}_t v(t,x), L_2(G)\|,$$

$$\left|\int_G f_2(t,x)dx\right| \le c' \sum_{k,l=1}^{p} \|\mathcal{D}_k v, L_2(G)\| \cdot \|\mathcal{D}_l \nabla \mathcal{D}_t v, L_2\| \le c_1' \sum_{k=1}^{p} \|\mathcal{D}_k \nabla \mathcal{D}_t v(t,x), L_2(G)\|.$$

Учитывая эти оценки, из (18) получаем

$$\sup_{0\le t\le T} \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{D}_i \nabla \mathcal{D}_t v(t,x), L_2\|^2 \le c' + c'' \cdot T \sup_{0\le t\le T} \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{D}_i \nabla \mathcal{D}_t v(t,x), L_2\|.$$

Отсюда следует

$$\sup_{0\le t\le T} \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{D}_i \nabla \mathcal{D}_t v(t,x), L_2\| \le c_1 + c_2 T,$$

а из определения функции $v(t,x)$ получаем

$$\|\mathcal{D}_t \mathcal{D}_{ij}^2 u(t,x), L_2(G')\| \le c_1 + c_2 t.$$

Отсюда, учитывая оценку (13) из леммы 2, получаем оценку (14) для $m=2$, $\beta=1$. Используя эту оценку, получаем оценку (16) Из того же неравенства, учитывая (16) и условие (6) на оператор $L_1(x,\mathcal{D}_x)$, получаем оценку (15) для $m=2$, $\beta=1$. Оценки при $\beta>1$ проводятся аналогично.

Итак, при $m=2$ оценки (14) - (16) доказаны. Для доказательства оценок при $m\ge 3$ используем метод индукции. Допустим, что оценки (14) - (16) справедливы при значении $m-1$, и докажем их при $m$ Сохраним прежние обозначения. Пусть $m$ - четное, $m=2\gamma$. Применяя к обеим частям тождества (17) оператор $\Delta^{\frac{m}{2}-1} = \Delta^{\gamma-1}$, получаем

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Delta^{\gamma-1}\mathcal{D}_i(a_{ij}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v) + \sum_{k,l=1}^{p} \Delta^{\gamma-1}\mathcal{D}_k(b_{kl}\mathcal{D}_l v) = \Delta^{\gamma-1} f(t,x), \qquad (19)$$

причем $v(t,x) \equiv 0$ при $x \notin G''$, где $\bar{G}' \subset G'' \Subset G$. Умножив скалярно в $L_2(G''')$, где $\bar{G}''\subset G'''\Subset G$, тождества (19) на функцию $\mathcal{D}_t\Delta^{\gamma}v(t,x)$, получим

$$\sum_{i,j=1}^{n}<\Delta^{\gamma-1}\left[\mathcal{D}_i(a_{ij}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v)+\mathcal{D}_j(a_{ji}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i v)\right],\mathcal{D}_t\Delta^{\gamma}v>+$$
$$+\sum_{k,\ell=1}^{p}<\Delta^{\gamma-1}\left[\mathcal{D}_k(b_{k\ell}\mathcal{D}_\ell v)+\mathcal{D}_\ell(b_{\ell k}\mathcal{D}_k v)\right],\mathcal{D}_t\Delta^{\gamma}v>=$$
$$=2<\Delta^{\gamma-1}f(t,x),\mathcal{D}_t\Delta^{\gamma}v(t,x)>.$$

Применяя формулу Остроградского, имеем

$$\mathcal{D}_t\sum_{i,j=1}^{n}<a_{ij}\mathcal{D}_i\nabla\Delta^{\gamma-1}\mathcal{D}_t v,\mathcal{D}_j\nabla\Delta^{\gamma-1}\mathcal{D}_t v>+\int_{G'''}f_1(t,x)dx+$$
$$+\mathcal{D}_t\sum_{k,\ell=1}^{p}<b_{k\ell}\mathcal{D}_k\nabla\Delta^{\gamma-1}v,\mathcal{D}_\ell\nabla\Delta^{\gamma-1}v>+\int_{G'''}f_2(t,x)dx=$$
$$=2<\Delta^{\gamma-1}f(t,x),\mathcal{D}_t\Delta^{\gamma}v(t,x)>, \tag{20}$$

где, как и в случае $m=2$, через $f_1(t,x), f_2(t,x)$ обозначены соответственно суммы скалярных произведений, содержащих производные от коэффициентов $a_{ij}(x)$ и $b_{k,\ell}(x)$. Поскольку для любого $\nu=1,\dots,n$ имеет место

$$\mathcal{D}_\nu\Delta^{\gamma-1}(a_{ij}(x)\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i v(t,x))=\mathcal{D}_\nu\left[\sum_{|\alpha|=m-2}\mathcal{D}_x^{\alpha}(a_{ij}(x)\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i v(t,x))\right]=$$
$$=\mathcal{D}_\nu\left\{\sum_{|\alpha|=m-2}\left[\sum_{\beta\le\alpha}C_\alpha^{\beta}\mathcal{D}^{\beta}a_{ij}(x)\mathcal{D}^{\alpha-\beta}(\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i v(t,x))\right]\right\}=$$
$$=\mathcal{D}_\nu\left\{\sum_{|\alpha|=m-2}\left[\sum_{\substack{\beta\le\alpha\\ \beta\ne0}}(C_\alpha^{\beta}\cdot\mathcal{D}^{\beta}a_{ij}\mathcal{D}^{\alpha-\beta}(\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i v(t,x)))\right]\right\}+$$
$$+\mathcal{D}_\nu a_{ij}(x)\Delta^{\gamma-1}\mathcal{D}_i\mathcal{D}_t^2 v(t,x)+a_{ij}(x)\Delta^{\gamma-1}\mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_i\mathcal{D}_t^2 v(t,x),$$

то, в силу индукции, имеем следующую оценку:

$$\left|\int_{G'''}f_1(t,x)dx\right|\le c\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{\substack{\beta\le m-2\\ \beta\ne0}}\|\mathcal{D}^{m-2-\beta+1}\mathcal{D}_i\mathcal{D}_t^2 v,L_2(G''')\|\right)\times$$

$$\times \| \mathcal{D}_j \nabla \Delta^{\gamma-1} \mathcal{D}_t v, L_2(G''') \| \leq$$

$$\leq (c_1 t + c_2 t^{m-2}) \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \| \mathcal{D}_i \nabla \Delta^{\gamma-1} \mathcal{D}_t v(t,x), L_2(G''') \| . \tag{21}$$

Аналогично получаем

$$\left| \int_{G'''} f_2(t,x)dx \right| \leq (c_1' + c_2' t^{m-2}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \| \mathcal{D}_i \nabla \Delta^{\gamma-1} \mathcal{D}_t v(t,x), L_2(G''') \| . \tag{22}$$

Так как

$$\Delta^{\gamma-1} f(t,x) = \sum_{|\alpha|=m-2} \mathcal{D}_x^{\alpha} \left[ a_1 \mathcal{D}_t^2 u + a_2 u + 2a_3 \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_t^2 \mathcal{D}_i u + 2a_4 \cdot \sum_{k=1}^{p} \mathcal{D}_k u \right],$$

где $a_i$, $i=1,\dots,4$ , - функции из (17) , зависящие лишь от $a_{ij}(x)$ , $b_{k,l}(x)$, $\chi(x)$ . Тогда из неравенств (14) - (16) , справедливых, в силу индукции, при значении $m-1$ , имеем

$$\| \Delta^{\gamma-1} f(t,x), L_2(G''') \| \leq (c_1'' + c_2'' t^{m-2}). \tag{23}$$

Интегрируя по $t$ тождество (20) от $0$ до $t$ и учитывая неравенства (21) - (23) , как и для $m=2$ , получаем все оценки (14) - (16) для $m=2\gamma$, $\beta \geq 1$ .

Пусть $m$ - нечетное, $m=2\gamma+1$ . Действуя на тождество (17) оператором $\mathcal{D}_q \Delta^{[\frac{m}{2}]-1} = \mathcal{D}_q \Delta^{\gamma-1}$ , где $q=1,\dots,n$ , имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{D}_q \Delta^{\gamma-1} \mathcal{D}_i (a_{ij} \mathcal{D}_t^2 \mathcal{D}_j v) + \sum_{k,l=1}^{p} \mathcal{D}_q \Delta^{\gamma-1} \mathcal{D}_k (b_{kl} \mathcal{D}_l v) = \mathcal{D}_q \Delta^{\gamma-1} f(t,x). \tag{24}$$

Умножив скалярно это тождество в $L_2(G''')$ на функцию $\mathcal{D}_t \mathcal{D}_q \Delta^{\gamma} v(t,x)$ и повторив аналогичные выкладки, получим все оценки (14)–(16) для $m=2\gamma+1$ и $\beta \geq 1$ .

Итак, лемма 3 при $s=m$ - целых доказана. Тогда оценки (14) - (16) при $s=m-\theta$ , $0<\theta<1$ , и утверждение теоремы 1, аналогично работе [7] , следуют из интерполяционных неравенств для классов $W_2^s(G)$ (см. [8] ) и теорем вложения из [9 , 10] .

Теорема 1 доказана.

## § 3. Равномерные оценки решения в окрестности границы

Лемма 4. *Пусть область $G$ имеет границу класса $C^{m+1}$, коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $b_{k\ell}(x)$ операторов $L_0(x,\mathcal{D}_x)$ и $L_1(x,\mathcal{D}_x)$ соответственно принадлежат в $C^m$. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)\in W_2^m(G)$. Тогда для решения задачи (4) имеет место оценка*

$$\|\mathcal{D}_t^{\beta}u(t,x), W_2^s(G)\|\leq c_1 t^{2(s-1)}+c_2\ ,\ \beta\geq 1, \tag{25}$$

*где $s=m-\theta$, $0<\theta<1$, константы $c_1$, $c_2$ зависят от области $G$ и $\|u_k(x), W_2^m\|$.*

Доказательство. Как и в лемме 3, получим вначале (25) при $s=m$ - целом. Так как внутри области $G$ для решения $u(t,x)$ справедлива оценка (14), то достаточно оценить функцию $u(t,x)$ вблизи границы $\partial G$. В силу компактности $\partial G$, оценки можно проводить локально. Пусть $x_0\in\partial G$ - произвольная точка. Допустим, что в некоторой $3\varepsilon$ – окрестности точки $x_0$ уравнение поверхности $\Gamma_\varepsilon=\partial G\cap\{|x-x_0|<3\varepsilon\}$ имеет вид $x_n=\varphi(\bar{x}^n)$. Определим функцию $\chi(x)\in C_0^\infty$:

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{при } |x-x_0|\leq\varepsilon,\\ 0 & \text{при } |x-x_0|>2\varepsilon,\end{cases}\qquad 0\leq\chi(x)\leq 1.$$

Тогда для функции $v(t,x)=\chi(x)\cdot u(t,x)$ выполнено тождество (17), причем $v(t,x)\equiv 0$ на множестве $\{|x-x_0|\geq 2\varepsilon\}\cap\bar{G}$. Распрямим границу $\Gamma_\varepsilon$, сделав замену переменных:

$$\begin{cases}y_n=x_n-\varphi(\bar{x}^n);\\ y_j=x_j,\quad j\leq n-1.\end{cases}$$

Перепишем вначале тождество (17), выделив в операторе $L_0(x,\mathcal{D}_x)$ слагаемые, содержащие производные по $x_n$, так как они при замене переменных имеют вид, отличный от вида остальных слагаемых

$$\mathcal{D}_t^2\Big[\mathcal{D}_n(a_{nn}\mathcal{D}_n v)+\sum_{j=1}^{n-1}\mathcal{D}_n(a_{nj}\mathcal{D}_j v)+\sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{D}_i(a_{in}\mathcal{D}_n v)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n-1}\mathcal{D}_i(a_{ij}\mathcal{D}_j v)\Big]+\sum_{k,\ell=1}^{n-1}\mathcal{D}_k(b_{k\ell}\mathcal{D}_\ell v)=f(t,x).$$

Запишем это тождество в новых переменных, сохраняя при этом обозначения для функций. Пусть $\mathcal{D}_j\varphi(\bar{x}^n)=\alpha_j$. Тогда $\alpha_n\equiv 0$ и

$$\mathcal{D}_t^2\Big\{\mathcal{D}_n(a_{nn}\mathcal{D}_n v)+\sum_{j=1}^{n-1}\big[\mathcal{D}_n a_{nj}(\mathcal{D}_j v-\alpha_{ij}\mathcal{D}_n v)+a_{nj}(\mathcal{D}_{jn}^2 v-\alpha_j\mathcal{D}_{nn}^2 v)\big]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\big[(\mathcal{D}_i a_{in}-\alpha_i\mathcal{D}_n a_{in})\cdot\mathcal{D}_n v+a_{in}(\mathcal{D}_{ni}^2 v-\alpha_i\mathcal{D}_{nn}^2 v)\big]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n-1}\Big\{(\mathcal{D}_i a_{ij}-\alpha_i\mathcal{D}_n a_{ij})\cdot(\mathcal{D}_j v-\alpha_j\mathcal{D}_n v)+$$

$$+a_{ij}\big[\mathcal{D}_{ij}^2 v-\alpha_i\mathcal{D}_{jn}^2 v-\mathcal{D}_i\alpha_j\mathcal{D}_n v-\alpha_j(\mathcal{D}_{ni}^2 v-\alpha_i\mathcal{D}_{nn}^2 v)\big]\Big\}\Big\}+$$

$$+\sum_{k,\ell=1}^{p}\Big\{(\mathcal{D}_k b_{k\ell}-\alpha_k\mathcal{D}_n b_{k\ell})\cdot(\mathcal{D}_\ell v-\alpha_\ell\mathcal{D}_n v)+$$

$$+b_{k\ell}\big[\mathcal{D}_{\ell k}^2 v-\alpha_k\mathcal{D}_{\ell n}^2 v-\mathcal{D}_k\alpha_\ell\cdot\mathcal{D}_n v-$$

$$-\alpha_\ell(\mathcal{D}_{nk}^2 v-\alpha_k\mathcal{D}_{nn}^2 v)\big]\Big\}=f(t,y), \tag{26}$$

причем $v(t,y_1,\ldots,y_{n-1},0)\equiv 0$.

Докажем, что для любого $q=1,\ldots,n-1$, $i=1,\ldots,n$ , имеют место равномерные по $t$ оценки

$$\|\mathcal{D}_t^\beta\mathcal{D}_{iq}^2 v(t,x),L_2\|\le c_1' t+c_2',\quad \beta\ge 1. \tag{27}$$

Сгруппировав слагаемые, тождество (26) можно переписать в виде:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{D}_i(a_{ij}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v)+\sum_{i,j=1}^{n-1}\mathcal{D}_n(a_{ij}\alpha_i\alpha_j\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v)-2\sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{D}_n(a_{in}\alpha_i\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v)-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n-1}\mathcal{D}_j(a_{ij}\alpha_i\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v)-\sum_{i,j=1}^{n-1}\mathcal{D}_n(a_{ij}\alpha_i\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v)+\sum_{k,\ell=1}^{p}\mathcal{D}_k(b_{k\ell}\mathcal{D}_\ell v)+$$

$$+\sum_{k,\ell=1}^{p}\mathcal{D}_n(b_{k\ell}\alpha_k\alpha_\ell\mathcal{D}_n v)-\sum_{k,\ell=1}^{p}\mathcal{D}_\ell(b_{k\ell}\alpha_k\mathcal{D}_n v)-\sum_{k,\ell=1}^{p}\mathcal{D}_n(b_{k\ell}\alpha_k\mathcal{D}_\ell v)=f(t,y). \tag{28}$$

Умножая скалярно обе части этого тождества в $L_2$ на функцию $\mathcal{D}_t\mathcal{D}_{qq}^2 v(t,y)=$ $=\mathcal{D}_t\mathcal{D}_q w(t,y)$ и интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i w,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j w\rangle+\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}\alpha_i\alpha_j|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w|^2\rangle-$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}\alpha_i\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j w,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w\rangle-\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ji}\alpha_j\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i w,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w\rangle+$$

$$+\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\sum_{k,l=1}^{p}\langle b_{kl}\mathcal{D}_l w,\mathcal{D}_k w\rangle+\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\sum_{k,l=1}^{p}\langle b_{kl}\alpha_k\alpha_l|\mathcal{D}_n w|^2\rangle-\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\sum_{k,l=1}^{p}\langle b_{kl}\alpha_k\mathcal{D}_n w,\mathcal{D}_l w\rangle-$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\sum_{k,l=1}^{p}\langle b_{kl}\alpha_l\mathcal{D}_n w,\mathcal{D}_k w\rangle=\langle f(t,y),\mathcal{D}_t\mathcal{D}_q w\rangle-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\langle\mathcal{D}_q a_{ij}(\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i w+$$

$$+\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j w)\rangle+\langle\mathcal{D}_q(a_{ij}\alpha_i\alpha_j)\cdot\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w\rangle-\langle\mathcal{D}_q(a_{ij}\alpha_i)\cdot(\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j w+$$

$$+\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w)\rangle\Big)-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{p}\langle\mathcal{D}_q b_{kl}(\mathcal{D}_l v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_k w+\mathcal{D}_k v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_l w)\rangle-$$

$$-\sum_{k,l=1}^{p}\langle\mathcal{D}_q(b_{kl}\alpha_k\alpha_l)\cdot\mathcal{D}_n v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w\rangle+\sum_{k,l=1}^{p}\langle\mathcal{D}_q(b_{kl}\alpha_k)\cdot(\mathcal{D}_n v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_l w+\mathcal{D}_l v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w)\rangle. \tag{29}$$

При этом мы одинаковые слагаемые объединили и суммы, соответствующие оператору $L_0(x,\mathcal{D}_x)$, дополнили, учитывая, что $\alpha_n=0$.

Обозначим правую часть (29) через $\varphi(t,y)$. Заметим справедливость следующих неравенств:

$$\frac{1}{2}\Big|\sum_{i,j=1}^{n}\langle\mathcal{D}_q a_{ij}(\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i w+\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_i v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j w)\rangle\Big|\le$$

$$\le c\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\|\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v,L_2\|\cdot\|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i w,L_2\|\le c'\cdot\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i w,L_2\|, \tag{30}$$

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n}\langle\mathcal{D}_q(a_{ij}\alpha_i\alpha_j)\cdot\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w\rangle\Big|\le c_1\|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w,L_2\|. \tag{31}$$

Аналогично из интеграла энергии вытекает

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n}\langle\mathcal{D}_q(a_{ij}\alpha_i)\cdot(\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j w+\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v,\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w)\rangle\Big|\le$$

$$\leq c\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\left(\|\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v, L_2\|\cdot\|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_j w, L_2\|+\|\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v, L_2\|\cdot\|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w, L_2\|\right)\leq$$

$$\leq c'\cdot\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_i w, L_2\| \tag{32}$$

и

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{k,l=1}^{p}<\mathcal{D}_q(b_{kl})\cdot(\mathcal{D}_l v, \mathcal{D}_t\mathcal{D}_k w+\mathcal{D}_k v, \mathcal{D}_t\mathcal{D}_l w)>\right|\leq$$

$$\leq c\cdot\sum_{k,l=1}^{p}\|\mathcal{D}_l v, L_2\|\cdot\|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_k w, L_2\|\leq c_1\sum_{k=1}^{p}\|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_k w, L_2\|. \tag{33}$$

Если таким же образом непосредственно оценить оставшиеся две суммы в правой части (29) , то оценки ухудшатся за счет функции $\mathcal{D}_n v(t,y)$, которая не оценивается через константу из интеграла энергии. Воспользуемся здесь формулами замены переменных. При $l=1,\dots,n-1$ имеем

$$\mathcal{D}_{x_l} v=\mathcal{D}_{y_l} v-\alpha_l\cdot\mathcal{D}_{y_n} v.$$

Учитывая эти формулы, можно оставшиеся неоцененными две суммы из (29) преобразовать следующим образом:

$$-\sum_{k,l=1}^{p}\Big[<\mathcal{D}_q(b_{kl}\alpha_k\alpha_l)\cdot\mathcal{D}_n v, \mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w>-<\mathcal{D}_q(b_{kl}\alpha_k)\cdot(\mathcal{D}_n v, \mathcal{D}_t\mathcal{D}_l w+$$

$$+\mathcal{D}_l v, \mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w)>\Big]=-\sum_{k,l=1}^{p}\Big[<\mathcal{D}_q(b_{kl}\alpha_k)\cdot(\alpha_l\mathcal{D}_n v-\mathcal{D}_l v), \mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w>+$$

$$+<b_{kl}\mathcal{D}_q\alpha_l\cdot(\mathcal{D}_n v\cdot\alpha_k-\mathcal{D}_k v), \mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w>+<b_{kl}\mathcal{D}_q\alpha_l\cdot\mathcal{D}_k v, \mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w>+$$

$$+<\mathcal{D}_{lq}^2(b_{kl}\alpha_k)\cdot\mathcal{D}_n v, \mathcal{D}_t w>-<\mathcal{D}_{nq}^2(b_{kl}\alpha_k)\cdot\mathcal{D}_l v, \mathcal{D}_t w>-$$

$$-<\mathcal{D}_q(b_{kl}\alpha_k)\cdot\mathcal{D}_l v, \mathcal{D}_t\mathcal{D}_n w>\Big].$$

Так как

$$|<\mathcal{D}_{lq}^2(b_{kl}\alpha_k)\cdot\mathcal{D}_n v, \mathcal{D}_t w>|\leq c_0 t,$$

а все остальные слагаемые из правой части предыдущего равенства оцениваются сверху через $\| \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w, L_2 \|$, то

$$\Big| \sum_{k,l=1}^{p} \Big[ < \mathcal{D}_q (b_{kl} \alpha_k \cdot \alpha_l) \cdot \mathcal{D}_n v, \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w > -$$

$$- < \mathcal{D}_q (b_{kl} \alpha_k)(\mathcal{D}_n v, \mathcal{D}_t \mathcal{D}_l w + \mathcal{D}_l v, \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w) > \Big] \Big| \leq$$

$$\leq c_0 t + c_1' \cdot \| \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w, L_2 \| . \qquad (34)$$

В случае, когда уравнение поверхности в окрестности точки $x_0$ имеет вид $x_l = \varphi(\bar{x}^i)$, $i \neq n$, оценки получаются непосредственно из правой части (29), так как вместо функции $\mathcal{D}_n v$ будет $\mathcal{D}_l v$, $l = 1, \ldots, n-1$, которая оценивается в норме $L_2$ через константу из интеграла энергии.

Проинтегрировав по $t$ тождество (29) от $0$ до $t$, имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Big[ < a_{ij} \mathcal{D}_t \mathcal{D}_i w, \mathcal{D}_t \mathcal{D}_j w > + < a_{ij} \alpha_i \alpha_j | \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w|^2 > -$$

$$- < a_{ij} \alpha_i \mathcal{D}_t \mathcal{D}_j w, \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w > - < a_{ij} \alpha_j \mathcal{D}_t \mathcal{D}_i w, \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w > \Big] +$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{p} \Big[ < b_{kl} \mathcal{D}_l w, \mathcal{D}_k w > + < b_{kl} \alpha_k \alpha_l | \mathcal{D}_n w|^2 > -$$

$$- < b_{kl} \alpha_k \mathcal{D}_n w, \mathcal{D}_l w > - < b_{kl} \alpha_l \mathcal{D}_n w, \mathcal{D}_k w > \Big] = 2 \int_0^t < \varphi(\tau, y) > d\tau + c_0 ,$$

где $c_0$ – значение левой части при $t = 0$.

Это тождество можно переписать в виде:

$$\sum_{i,j=1}^{n} < a_{ij} (\mathcal{D}_t \mathcal{D}_i w - \alpha_i \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w), (\mathcal{D}_t \mathcal{D}_j w - \alpha_j \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w) > +$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{p} < b_{kl} (\mathcal{D}_k w - \alpha_k \cdot \mathcal{D}_n w), (\mathcal{D}_l w - \alpha_l \mathcal{D}_n w) > =$$

$$= 2 \int_0^t < \varphi(\tau, y) > d\tau + c_0 .$$

Учитывая оценки (30) – (34) и условия (5), (6) на операторы $L_0(x, \mathcal{D}_x)$ и $L_1(x, \mathcal{D}_x)$, из предыдущего тождества получаем

$$\nu_0 \sum_{i=1}^{n} \| (\mathcal{D}_t \mathcal{D}_i w - \alpha_i \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w), L_2 \|^2 + \nu_1 \sum_{K=1}^{p} \| (\mathcal{D}_K w - \alpha_K \mathcal{D}_n w), L_2 \|^2 \leq$$

$$\leq c_0 + 2 \cdot \int_0^t \left( c_0' \tau + c_1'' \cdot \sum_{i=1}^{n} \| \mathcal{D}_\tau \mathcal{D}_i w, L_2 \| \right) d\tau .$$

Преобразуя правую часть и учитывая, что $\alpha_n = 0$ , получаем

$$\nu_0 \left[ \| \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w, L_2 \|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \| (\mathcal{D}_t \mathcal{D}_i w - \alpha_i \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w), L_2 \|^2 \right] +$$

$$+ \nu_1 \sum_{K=1}^{p} \| (\mathcal{D}_K w - \alpha_K \mathcal{D}_n w), L_2 \|^2 \leq c_1 t^2 +$$

$$+ (c_2 t + c_3) \cdot \left[ \| \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w, L_2 \| + \sum_{i=1}^{n-1} \| (\mathcal{D}_t \mathcal{D}_i w - \alpha_i \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w), L_2 \| \right]. \tag{35}$$

Отсюда следует неравенство

$$\| \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w, L_2 \| + \sum_{i=1}^{n-1} \| (\mathcal{D}_t \mathcal{D}_i w - \alpha_i \mathcal{D}_t \mathcal{D}_n w), L_2 \| \leq c' t + c'', \tag{36}$$

откуда

$$\| \mathcal{D}_t \mathcal{D}_i w(t,y), L_2 \| \leq c_1 t + c_2 , \quad i = 1, \dots, n .$$

Так как $w(t,y) = \mathcal{D}_q v(t,y)$ , то оценка (27) доказана для $\beta = 1, q = 1, \dots, n-1$. Доказательство для $\beta \geq 2$ проводится по индукции аналогично.

Из того же неравенства (35) , если учесть (36) , вытекает оценка

$$\sum_{K=1}^{p} \| \mathcal{D}_K w - \alpha_K \mathcal{D}_n w, L_2 \| \leq c_1' t + c_2' , \tag{37}$$

где $\mathcal{D}_q v(t,y) = w(t,y), \quad q = 1, \dots, n-1 .$

Оценим теперь функцию $\mathcal{D}_t \mathcal{D}^2_{n,n} v(t,y)$ . Для этого перепишем тождество (28) , оставив в левой части лишь слагаемые, содержащие функции $\mathcal{D}_t^2 \mathcal{D}_{nn}^2 v(t,y)$ и $\mathcal{D}^2_{nn} v(t,y)$ :

$$\Big(a_{nn}+\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\alpha_i\alpha_j-2\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}\alpha_i\Big)\cdot\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_{nn}^2 v+\sum_{k,l=1}^{p} b_{kl}\alpha_k\alpha_l\mathcal{D}_{nn}^2 v=$$

$$=\Big\{f-\sum_{i,j=1}^{n}\mathcal{D}_i a_{ij}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v-2\sum_{j=1}^{n-1}a_{nj}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_{nj}^2 v-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n-1}\Big(a_{ij}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_{ij}^2 v+\mathcal{D}_n(a_{ij}\alpha_i\alpha_j)\cdot\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v\Big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\mathcal{D}_n(a_{in}\alpha_i)\cdot\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n-1}\Big[\mathcal{D}_j(\alpha_i a_{ij}\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_n v)+\mathcal{D}_n(a_{ij}\alpha_i\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_j v)\Big]-\sum_{k,l=1}^{p}\Big[2\mathcal{D}_k b_{kl}\mathcal{D}_l v+$$

$$+\mathcal{D}_n(b_{kl}\alpha_k\alpha_l)\cdot\mathcal{D}_n v-\mathcal{D}_l(b_{kl}\alpha_k)\cdot\mathcal{D}_n v-\mathcal{D}_n(b_{kl}\alpha_k)\cdot\mathcal{D}_l v\Big]-$$

$$-2\sum_{k,l=1}^{p} b_{kl}\Big(\mathcal{D}_{lk}^2 v-\alpha_k\mathcal{D}_{ln}^2 v\Big)\Big\}+\sum_{k,l=1}^{p}\mathcal{D}_k(b_{kl}\mathcal{D}_l v).$$

Обозначив выражение, стоящее в фигурных скобках, через $\Phi(t,y)$ и умножив скалярно предыдущее тождество в $L_2$ на функцию $\mathcal{D}_t^2\mathcal{D}_{nn}^2 v$, получим

$$\mathcal{D}_t\Big\|\sqrt{a_{nn}+\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}\alpha_i\alpha_j-2\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}\alpha_i}\cdot\mathcal{D}_t\mathcal{D}_{nn}^2 v,L_2\Big\|^2+$$

$$+\mathcal{D}_t\sum_{k,l=1}^{p}<b_{kl}\alpha_k\alpha_l,|\mathcal{D}_{nn}^2 v|^2>=2<\Phi(t,y),\mathcal{D}_t\mathcal{D}_{nn}^2 v>+$$

$$+\mathcal{D}_t\sum_{k,l=1}^{p}<b_{kl}\mathcal{D}_{ln}^2 v,\mathcal{D}_{kn}^2 v>+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{p}<\mathcal{D}_n b_{kl}(\mathcal{D}_l v\cdot\mathcal{D}_t\mathcal{D}_{nk}^2 v+\mathcal{D}_k v\cdot\mathcal{D}_t\mathcal{D}_{ln}^2 v)>.$$

Отсюда, учитывая неравенства

$$\|\Phi(t,y),L_2\|\le c_1 t+c_2,$$

$$\Big|\sum_{k,l=1}^{p}<b_{kl}\mathcal{D}_{ln}^2 v,\mathcal{D}_{kn}^2 v>\Big|\le\mu_1\sum_{k=1}^{p}\|\mathcal{D}_{kn}^2 v,L_2\|^2\le(c_3 t+c_4)^2,$$

$$\Big|\sum_{k,\ell=1}^{p} < \mathcal{D}_n b_{k\ell}(\mathcal{D}_\ell v, \mathcal{D}_t \mathcal{D}^2_{nk} v + \mathcal{D}_k v, \mathcal{D}_t \mathcal{D}^2_{\ell n} v)>\Big| \le c_5 t + c_6 ,$$

вытекающие из (27), (37) и интеграла энергии, после интегрирования по $t$ от $0$ до $t$, имеем

$$\Big\|\sqrt{a_{nn}+\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\alpha_i\alpha_j - 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\alpha_i}\cdot \mathcal{D}_t \mathcal{D}^2_{nn} v(t,\cdot), L_2\Big\|^2 +$$

$$+ \nu_1 \cdot \sum_{k=1}^{p} \| \alpha_k \mathcal{D}^2_{nn} v(t,\cdot), L_2\|^2 \le c_0 +$$

$$+ \int_0^t \Big[(c_1'\tau + c_2')\cdot \|\mathcal{D}_\tau \mathcal{D}^2_{nn} v(\tau,\cdot), L_2\|\Big] d\tau + c_3' t^4. \tag{38}$$

При уменьшении $\varepsilon$-окрестности точки $x_0 \in \partial G$ производные $\mathcal{D}_i \varphi = \alpha_i$ стремятся к нулю. Возьмем $\varepsilon$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$a_{nn} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}\alpha_i\alpha_j - 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\alpha_i > \frac{\nu_0}{2}. \tag{39}$$

Тогда из (38) получим оценку

$$\|\mathcal{D}_t^\beta \mathcal{D}^2_{nn} v(t,\cdot), L_2\| < c' t^2 + c'' \tag{40}$$

при $\beta = 1$. Доказательство при $\beta \ge 2$ аналогично. Из оценок (27) и (40) следует оценка (25) в $\varepsilon$-окрестности точки $x_0 \in \partial G$ при $m=2$. Из того же неравенства, учитывая (40), можно также вывести оценку

$$\sum_{k=1}^{p} \|\alpha_k \cdot \mathcal{D}^2_{nn} v(t,\cdot), L_2\| \le c_1 t + c_2.$$

Итак, оценка (25) при $s$ - целом, равном 2, доказана.

Доказательство при $s=m=3$ проводится в три этапа: вначале оцениваются функции $\mathcal{D}_t^\beta \mathcal{D}^3_{iqj} v(t,y)$ при $1 \le q,\ j < n-1,\ \beta \ge 1$; затем функции $\mathcal{D}_t^\beta \mathcal{D}^3_{nnj} v(t,y)$ при $1 \le j < n-1$, $\beta \ge 1$; и наконец, функции $\mathcal{D}_t^\beta \mathcal{D}^3_{nnn} v(t,y)$

при $\beta \geq 1$ . В результате все производные третьего порядка по переменным $y$ будут оценены. Следовательно, возвращаясь к старым переменным и используя оценки при $m=2$ , 1, получим (25) при $S=m=3$ . Тогда, в силу компактности границы и произвольности точки $x_0 \in \partial G$ , оценка (25) при целых $S=2$ , 3 доказана. Доказательство при целых $S=m \geq 4$ проводится по индукции.

Итак, лемма 4 при $S=m$ - целых доказана. При $S=m-\theta$ , $0<\theta<1$ , оценка (25) и утверждение теоремы 2, как и в [7] , следуют из интерполяционных теорем [8] и теоремы вложения [9] .

Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю С.В. Успенскому и Г.В. Демиденко за постановку задачи и полезные беседы.

## Литература

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики.- Изв. АН СССР. Серия мат., 1954, т.18, № 1, с.3-50.
2. Lighthill M.J. On waves generated in dispersive systems by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids. - J.Fluid Mech., 1967, v.27, No 4, p. 725-752.
3. Зеленяк Т.И. Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными.- Новосибирск, изд-во НГУ, 1970, с. 164.
4. Капитонов Б.В. Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости.- Мат.сб., 1979, т.109, № 4, с.607-628.
5. Сказка В.В. Асимптотические оценки при $t \to \infty$ смешанных задач для одного уравнения математической физики.- Сиб.мат.журн., 1981, т.22, № 1, с.129-143.
6. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О смешанных краевых задачах для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л. Соболева ).- Новосибирск, 1980, № 2, с.92-115.
7. Демиденко Г.В. Общие смешанные задачи для уравнений с переменными коэффициентами, не разрешенных относительно старшей производной.- Дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук (01.01.02) .- Новосибирск, Б.и., 1981.- 120 с.
8. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.- М.: ИЛ, 1980.- 664 с.
9. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.- Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1962.- 255 с.
10. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.: Наука, 1975.- 480 с.