УДК 517.937

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Иосеф Крал (Прага)

Пусть U - открытое множество в N-мерном евклидовом пространстве R^N и M - конечное множество мультииндексов $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]$. Каждому $\alpha \in M$ поставим в соответствие бесконечно дифференцируемую на U функцию a_α и, пользуясь общепринятыми обозначениями

$$D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\,(k=1,\dots,N), \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\dots D_N^{\alpha_N},$$

рассмотрим дифференциальный оператор

$$P(D) = \sum_{\alpha\in M} a_\alpha D^\alpha. \tag{1}$$

Если локально суммируемая функция u удовлетворяет (в смысле обобщенных функций) уравнению

$$P(D)u = 0 \tag{2}$$

на множестве $U \setminus F$, где $F \subset U$ - относительно замкнутое множество особенностей, то при подходящих предположениях с поведении u на U и о множестве F удастся описать особенности $P(D)u$ на F при помощи мер Хаусдорфа определенной размерности. В частности, если соответствующая мера множества F обращается в нуль, то множество F устранимо, и, значит, уравнение (2) автоматически выполняется на всем множестве U. Примеры таких результатов для оператора Лапласа встречаются в работах Карлсона [1,2] и Е.П. Долженко [3,4] ; для оператора (1) - в работе Харвей и Полкинга [5]. В этих исследованиях используются обыкновенные меры Хаусдорфа. Мы докажем общий результат этого вида при помощи анизотропных мер типа Хаусдорфа, подобранных в соответствии с формой оператора (1) .

Пусть $m_1,\dots,m_N$ - натуральные числа. Положим $m=[m_1,\dots,m_N]$ и для каждого мультииндекса $\alpha=[\alpha_1,\dots,\alpha_N]$ введем обозначение

$$|\alpha : m| = \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{m_k}.$$

Так как множество мультииндексов M в определении оператора (1) конечно, то можно добиться того, чтобы

$$\alpha\in M \Longrightarrow |\alpha : m|\leq 1. \tag{3}$$

В дальнейшем мы всегда предполагаем, что m подобрано таким образом, что выполняется условие (3) .

Отмеченным параллелепипедом типа m называется N-мерный интервал вида

$$K=\mathop{X}_{k=1}^{N} I_k, \tag{4}$$

где I_k - невырожденный одномерный интервал длины $\tau^{\frac{1}{m_k}}$ $(k=1,\dots,N)$. Параметр τ назовем нормой параллелепипеда K и обозначим его через $|K|_m$. Отметим, что Литман [12] пользовался такими параллелепипедами для построения объема типа Минковского, удобного для изучения устранимых особенностей. Мы используем их для построения анизотропных мер типа Хаусдорфа [6-8] .

Калибровочной называется функция f действительного переменного $t>0$, для которой существует такое $\delta>0$, что f является непрерывной и не убывающей на $(0,\delta)$. Для такой функции f и любого непустого множества $L\subset R^N$ определим при $0<\varepsilon<\delta$ величину

$$\mathcal{H}^{f}_{m,\varepsilon}(L) = \inf_{\{K_n\}} \sum_n f(|K_n|_m),$$

где нижняя грань берется по всем последовательностям отмеченных параллелепипедов K_n типа m, удовлетворяющих условиям

$$|K_n|_m \leq \varepsilon, \quad L \subset \bigcup_n K_n.$$

Полагая $\mathcal{H}^f_{m,\varepsilon}(\emptyset) = 0$, (внешнюю)меру Хаусдорфа типа m любого множества $L \subset R^N$ определяем равенством

$$\mathcal{H}^f_m(L) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{H}^f_{m,\varepsilon}(L).$$

Займемся изучением особенностей локально суммируемых функций в зависимости от их анизотропного интегрального модуля непрерывности, который полезен при рассмотрении пространств типа $L^{p,\alpha}$ (ср. [13]). Если функция u локально суммируема на U по отношению к мере Лебега λ, то для каждого параллелепипеда K, с замыканием содержащимся в U, обозначим через

$$u_K = \frac{1}{\lambda(K)} \int_K u \, d\lambda$$

среднее значение u на K. Для $\delta > 0$ и любого компактного множества $Q \subset U$ с непустой внутренностью $Q^0 \neq \emptyset$ полагаем

$$\Omega^m_u(\delta, Q) = \sup_{\substack{K \subset Q \\ |K|_m \leq \delta}} \int_K |u - u_K| \, d\lambda,$$

где верхняя грань берется по всем отмеченным параллелепипедам $K \subset Q$ с нормой $\leq \delta$. Условимся еще обозначать через $\underline{1} = [1, \ldots, 1]$ $(\in R^N)$ или $\underline{0} = [0, \ldots, 0]$ $(\in R^N)$ мультииндекс, все компоненты которого равны единице или нулю соответственно. В этих обозначениях доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть $0 \leq \gamma \leq 1$ и $\hat{M}$ – такое множество мультииндексов, что каждый мультииндекс $\alpha \in M$ разлагается в виде $\alpha = \hat{\alpha} + \tilde{\alpha}$, где $\hat{\alpha} \in \hat{M}$ и $|\tilde{\alpha} : m| \leq \gamma$. Пусть функция $g \geq 0$ переменного $t > 0$ удовлетворяет условию*

$$\liminf_{t \downarrow 0} g(t) t^{-\gamma - |\underline{1} : m|} > 0. \tag{5}$$

Если

$$f(t) = g(t)\,t^{-\gamma} \tag{6}$$

является калибровочной функцией, то каждое относительно замкнутое множество $F \subset U$ *, для которого* $\mathcal{H}^f_m(F) = 0$ *, является устранимым (относительно* (2)) *для всех функций* u *, которые вместе с обобщенными производными* $v = D^{\hat\alpha}$ *, соответствующими мультииндексам* $\hat\alpha \in \hat M$ *, локально суммируемы и удовлетворяют требованию*

$$\Omega^m_v(\delta, Q) = O(g(\delta)), \quad \delta \downarrow 0, \tag{7}$$

для каждого компактного множества $Q \subset U$, $Q^0 \neq \emptyset$.

Эта теорема является следствием несколько более общего предложения 2, которое мы докажем ниже. Доказательству предпошлем несколько обозначений и вспомогательных утверждений.

Полагая

$$q = \prod_{j=1}^{N} m_j, \quad q_k = \frac{q}{m_k}, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

обозначаем через $\mathcal{M}$ систему всех отмеченных параллелепипедов вида

$$\mathop{\times}_{k=1}^{N} \langle c_k \cdot 2^{-nq_k}, (c_k+1)\cdot 2^{-nq_k} \rangle,$$

где n и c_k - целые числа. Нетрудно видеть (ср. [8 , с..11]), что при

$$\sigma = \prod_{k=1}^{N} (1 + 2^{q_k})$$

каждый отмеченный параллелепипед K типа m можно покрыть параллелепипедами $K_1, \ldots, K_\sigma \in \mathcal{M}$ такими, что $|K_j|_m \leq |K|_m$, $j = 1, \ldots, \sigma$.

Если K -интервал вида (4) и s_j обозначает длину интервала I_j, $j = 1, \ldots, N$, то мы положим $s_K = [s_1, \ldots, s_N]$ $(\in R^N)$ и для каждого мультииндекса $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_N]$ обозначим

$$s_K^\alpha = s_1^{\alpha_1} \ldots s_N^{\alpha_N} .$$

Если $\delta > 0$, то δK обозначает интервал, который получается из K гомотетией с коэффициентом δ относительно центра K ,совпадающего с центром δK ; значит, $s_{\delta K} = \delta s_K$.

Для доказательства предложения 1 нам будет полезна следующая модификация леммы 3.1 из [5]:

Лемма 1. *Если $\mathcal{P}$ – конечная подсистема в $\mathcal{M}$, то каждому параллелепипеду $K \in \mathcal{P}$ можно поставить в соответствие бесконечно дифференцируемую функцию φ_K с носителем, содержащимся в $\frac{3}{2}K$, таким образом, что*

$$\sum_{K \in \mathcal{P}} \varphi_K = 1 \quad \text{на} \quad \bigcup_{K \in \mathcal{P}} \frac{5}{4}K \tag{8}$$

и для каждого мультииндекса α соблюдаются оценки

$$K \in \mathcal{P} \Longrightarrow s_K^\alpha \, |D^\alpha \varphi_K| \le C_\alpha , \tag{9}$$

где C_α - постоянная, зависящая лишь от α (но не от $\mathcal{P}$).

Доказательство, см. в [8, с.14] .

Если T - обобщенная функция, действующая на пространстве $\mathcal{D}(U)$ всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в U , то $\langle T, \psi \rangle$ обозначает значение функционала T в точке $\psi \in \mathcal{D}(U)$.

Предложение 1. *Пусть $\gamma, \hat{M}, g$ и f удовлетворяют предположениям теоремы 1 и функция u вместе со всеми производными $v = D^{\hat{\alpha}} u$ $(\hat{\alpha} \in \hat{M})$ локально суммируема и удовлетворяет условию (7) . Если F - относительно замкнутое множество в U и уравнение (2) справедливо на $U \setminus F$, то для каждого компактного множества $Q \subset U$ с непустой внутренностью существуют постоянная $k = k(u, Q) < \infty$ и суммируемая (по мере λ) функция h такие, что для каждой $\psi \in \mathcal{D}(U)$ с носителем в множестве Q имеет место оценка*

$$|\langle P(D)u, \psi \rangle| \le k \left[\mathcal{H}_m^f (Q \cap F) + \int_{Q \cap F} h \, d\lambda \right] \cdot \max_{x \in Q} |\psi(x)| . \tag{10}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $Q \cap F \neq \emptyset$ и $\mathcal{H}_m^f(Q \cap F) < \infty$. Выберем некоторые $P > \mathcal{H}_m^f(Q \cap F)$ и $0 < \varepsilon \leq 1$. Тогда $Q \cap F$ можно покрыть конечным числом отмеченных параллелепипедов $K_1, \dots, K_p$ таким образом, чтобы

$$|K_j|_m \leq \varepsilon, \quad j=1,\dots,p, \quad \sum_{j=1}^{p} f(|K_j|_m) < P.$$

Каждый параллелепипед K_j можно покрыть параллелепипедами $K_{j1}, \dots, K_{j\sigma} \in \mathcal{M}$, нормы которых не превосходят $|K_j|_m$. Отсюда видно, что существует конечная система $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$ взаимно неналегающих параллелепипедов такая, что

$$K \in \mathcal{P} \Longrightarrow |K|_m \leq \varepsilon, \tag{11}$$

$$\sum_{K \in \mathcal{P}} f(|K|_m) < \sigma P, \tag{12}$$

$$F \cap Q \subset \bigcup_{K \in \mathcal{P}} K, \tag{13}$$

$$K \in \mathcal{P} \Longrightarrow K \cap F \cap Q \neq \emptyset. \tag{14}$$

Уменьшая в случае необходимости число $\varepsilon > 0$, мы можем добиться, чтобы

$$K \in \mathcal{P} \Longrightarrow \tfrac{3}{2} K \subset U.$$

В силу (7) можно взять постоянную C, для которой при всех $\hat{\alpha} \in \hat{M}$ удовлетворяется требование

$$K \in \mathcal{P} \Longrightarrow \int_K |D^{\hat{\alpha}} u - (D^{\hat{\alpha}} u)_K| \, dx \leq C g(|K|_m). \tag{15}$$

Поставим в соответствие каждому параллелепипеду $K \in \mathcal{P}$ функцию φ_K со свойствами из вышеуказанной леммы 1 и положим

$$\varphi = \sum_{K \in \mathcal{P}} \varphi_K .$$

Пусть $\psi \in \mathcal{D}(U)$ имеет носитель в Q. Поскольку (2) справедливо на $U \setminus F$, мы на основании (8) получаем

$$\langle P(D)u,\psi\rangle=\langle P(D)\quad,\varphi\psi\rangle=\sum_{K\in\mathcal{P}}\sum_{\alpha\in M}\langle a_\alpha D^\alpha u,\varphi_K\psi\rangle.$$

Сначала рассмотрим такой мультииндекс $\alpha\in M$, что в его разложении

$$\alpha=\hat\alpha+\tilde\alpha\qquad(\hat\alpha\in\hat M,\ |\tilde\alpha:m|\leqslant\gamma)$$

мы имеем $|\tilde\alpha|=\tilde\alpha_1+\ldots+\tilde\alpha_N>0$; тогда

$$\langle a_\alpha D^\alpha u,\varphi_K\psi\rangle=(-1)^{|\tilde\alpha|}\langle D^{\hat\alpha}-(D^{\hat\alpha}u)_K,\ D^{\tilde\alpha}(a_\alpha\varphi_K\psi)\rangle. \tag{16}$$

Условимся пользоваться символом β для обозначения мультииндексов, подчиненных $\tilde\alpha$ в том смысле, что $\beta_j\leqslant\tilde\alpha_j$, $j=1,\ldots,N$. Обозначая через E_β постоянную, зависящую лишь от β , из (9) по формуле Лейбница мы получаем

$$s_K^{\tilde\alpha}|D^{\tilde\alpha}(a_\alpha\varphi_K\psi)|\leqslant\sum_\beta E_\beta s_K^\beta|D^\beta(a_\alpha\psi)|\leqslant$$

$$\leqslant E_0|a_\alpha\psi|+\sum_{|\beta|>0}E_\beta|K|_m^{|\beta:m|}\cdot|D^\beta(a_\alpha\psi)|.$$

Имея в виду, что

$$s_K^{\tilde\alpha}=|K|_m^{|\tilde\alpha:m|}\geqslant|K|_m^\gamma,$$

и учитывая, что для

$$\mu=\min_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{1}{m_k}\quad\text{и}\quad|\beta|>0$$

выполняется

$$|K|_m^{|\beta:m|}\leqslant\varepsilon^\mu,$$

мы окончательно придем к оценке

$$|D^{\tilde\alpha}(a_\alpha\varphi_K\psi)|\leqslant|K|_m^{-\gamma}\Big(E_0|a_\alpha\psi|+\varepsilon^\mu\sum_{|\beta|>0}E_\beta|D^\beta(a_\alpha\psi)|\Big).$$

Отсюда на основании (16) , (15) вытекает

$$|\langle a_\alpha D^\alpha u, \varphi_K \psi\rangle| \leqslant Cf(|K|_m)(E_0|a_\alpha\psi| + \varepsilon^\mu \sum_{|\beta|>0} E_\beta |D^\beta(a_\alpha\psi)|).$$

Если $|\tilde{\alpha}| = 0$, то $\alpha = \hat{\alpha} \in \hat{M}$ и, обозначив

$$h = \sum_{\hat{\alpha}\in\hat{M}} |D^{\hat{\alpha}} u|, \tag{17}$$

мы получим оценку

$$|\langle a_\alpha D^\alpha u, \varphi_K \psi\rangle| = \left|\int_{\frac{3}{2}K} \varphi_K \psi a_\alpha D^\alpha u\, d\lambda\right| < \max|a_\alpha\psi| \cdot \int_{\frac{3}{2}K} h\, d\lambda.$$

И вообще, полагая

$$Q_{\wp} = \bigcup_{K\in\wp} \tfrac{3}{2}K,$$

мы на основе (12) для подходящей постоянной k (зависящей от Q , но не зависящей от ψ) имеем

$$|\langle P(D)u, \psi\rangle| < \sum_{K\in\wp}\sum_{\alpha\in M} |\langle a_\alpha D^\alpha u, \varphi_K\psi\rangle| <$$

$$< k\max|\psi| \left(P + \int_{Q_\wp} h\, d\lambda + P\varepsilon^\mu \sum_{\alpha,\beta} |D^\beta(a_\alpha\psi)|\right).$$

Устремив $\varepsilon \downarrow 0$ и использовав (11) , (13),(14) , мы получим, что

$$\int_{Q_\wp} h\, d\lambda \longrightarrow \int_{F\cap Q} h\, d\lambda$$

и, следовательно,

$$|\langle P(D)u, \psi\rangle| \leqslant k\max|\psi| \cdot \left(P + \int_{F\cap Q} h\, d\lambda\right).$$

Предложение 1 доказано, так как $P > \mathcal{H}^f_m(Q\cap F)$ выбрано совершенно произвольно.

Предложение 2. *Пусть* $\gamma, \hat{M}, q, f$ *и* u *удовлетворяют условиям предложения 1. Если* $F \subset U$ *– относительно замкнутое множество с локально-*

конечной $\mathcal{H}_m^f$-мерой и (2) удовлетворяется на $U \setminus F$, то существует локально суммируемая (по отношению к мере $\mathcal{H}_m^f$) функция H, обращающаяся в нуль на $U \setminus F$ такая, что

$$P(D)u = H\mathcal{H}_m^f$$

в смысле обобщенных функций (т.е. для каждой $\psi \in \mathcal{D}(U)$) имеет место равенство

$$\langle P(D)u, \psi\rangle = \int_F H\psi\, d\mathcal{H}_m^f).$$

Доказательство. Пусть V - открытое множество с компактным замыканием $\overline{V} = Q \subset U$. Из оценки (10) видно, что функционал $\psi \longmapsto$ $\longmapsto \langle P(D)u, \psi\rangle$ на пространстве $\mathcal{D}(V)$ можно представить при помощи однозначно определенной (знакопеременной) меры Радона ν, полное изменение $|\nu|$ которой на каждом компакте $R \subset V$ удовлетворяет неравенству

$$|\nu|(R) \leqslant k(u, Q)\Big[\mathcal{H}_m^f(R \cap F) + \int_{R\cap F} h\, d\lambda\Big],$$

где функция h задана равенством (17). Из условия (5) и определения (6) калибровочной функции f вытекает существование числа $\delta > 0$ такого, что

$$t \in (0, \delta) \Rightarrow t^{|1:m|} \leqslant \delta^{-1} f(t).$$

Так как $|K|_m^{|1:m|} = \lambda(K)$ для каждого отмеченного параллелепипеда K, то для каждого борелевского множества $B \subset F$ выполняется

$$\lambda(B) \leqslant \delta^{-1}\mathcal{H}_m^f(B),$$

в частности, мера

$$B \longmapsto \int_B h\, d\lambda$$

абсолютно непрерывна относительно $\mathcal{H}_m^f$ на $V \cap F$. Пользуясь теоремой Радона-Никодима, мы получаем суммируемую (относительно $\mathcal{H}_m^f$) функцию H на $V \cap F$ такую, что

$$< P(D)u, \psi > = \int_F \psi H d\mathcal{H}_m^f \tag{19}$$

для всех $\psi \in \mathcal{D}(V)$. Так как H определена почти однозначно (относительно $\mathcal{H}_m^f$) и U является объединением возрастающей последовательности открытых множеств V_n с компактным замыканием $\overline{V}_n \subset U$, то без труда получается локально суммируемая функция H на всем множестве F, для которой (19) справедливо для всех $\psi \in \mathcal{D}(U)$.

Замечание 1. Для частного случая

$$g(t) = t^c \, (1 < c \leq 1 + |\underline{1} : m|), \quad \hat{M} = \{\underline{0}\}, \quad \gamma = 1,$$

предложение 2 доказывалось в [9, 11].

Иногда бывает полезным пользоваться еще другими модулями непрерывности. Положив

$$\|x\|_m = \sum_{k=1}^N |x_k|^{m_k}$$

для $x = [x_1, \ldots, x_N] \in R^N$,

определим для каждой локально ограниченной функции u на U и каждого компакта $Q \subset U$ модуль непрерывности

$$\omega_u^m(\delta, Q) = \sup\{|u(x) - u(y)|;\ x, y \in Q, \|x - y\|_m < \delta\}.$$

Если u измерима и локально ограничена, то нетрудно видеть, что

$$\Omega^m(\delta, Q) = \mathcal{O}(\delta^{|\underline{1}:m|} \omega^m(\delta, Q)), \quad \delta \downarrow 0, \quad Q^\circ \neq \emptyset.$$

Из предложения 2 получается

Следствие 1. *Пусть* $P(D)$, m, $\hat{M}$ *и* γ *имеют то же самое значение, что и в теореме 1. Пусть* $\omega \geq 0$ *- непрерывная функция переменного* $t > 0$ *такая, что*

$$\liminf_{t \downarrow 0} \omega(t) t^{-\gamma} > 0,$$

и функция

$$f(t) = \omega(t) \cdot t^{|\underline{l} : m| - \gamma}$$

является калибровочной. Пусть функция u *на* U *вместе со всеми производными* $v = D^{\hat{\alpha}} u$ *, соответствующими мультииндексам* $\hat{\alpha} \in \hat{M}$ *, удовлетворяет условию*

$$\omega_v^m(\delta, Q) = O(\omega(\delta)), \ \delta \downarrow 0,$$

для каждого компакта $Q \subset U$ *. Если* $F \subset U$ *- относительно замкнутое множество с локально-конечной* $\mathcal{H}_m^f$ *-мерой, то из справедливости равенства* (2) *на* $U \setminus F$ *вытекает существование локально ограниченной борелевской функции* H *, обращающейся в нуль на* $U \setminus F$ *и такой, что* (18) *справедливо на* U *в смысле обобщенных функций; в частности, если* $\mathcal{H}_m^f(F) = 0$ *, то* F *устранимо, и, значит, равенство* (2) *удовлетворяется на всем множестве* U .

Доказательство вытекает из предложения 2, где мы положим $g(t) = t^{|\underline{l} : m|} \omega(t)$. Отметим, что функция (17), появляющаяся в оценке (10), теперь является локально ограниченной. Отсюда видно, что в доказательстве предложения 2 плотность H меры ν относительно $\mathcal{H}_m^f$ можно взять локально ограниченной.

Замечание 2. Частный случай следствия 1:

$$\hat{M} = \{\underline{0}\}, \ \gamma = 1,$$

доказывался в [10] , где имеются дальнейшие ссылки на относящуюся к этим вопросам литературу.

Литература

1. Carleson L. Removable singularities of continuous harmonic functions in R^m. Math.scand., 1963, v.12, p.15-18.

2. Carleson L. Selected problems on exceptional sets. - Van Nostrand Co., Princeton, 1967, 151 pp.

3. Долженко Е.П. О представлении непрерывных гармонических функций в виде потенциалов.- Изв. АН СССР. Сер.мат., 1964, т. 28, с.1113-1130.

4. Долженко Е.П. Об особых точках непрерывных гармонических функций.- Изв. АН СССР. Сер.мат., 1964, т.28, с.1251-1270.

5. Harvey R., Polking J. Removable singularities of solutions of linear partial differential equations. - Acta math., 1970, v.125, p.39-56.

6. Král J. Hölder continuous heat potentials, Accad.Nazionale dei Lincei, Rend.Cl.Sc.fis.,mat. e nat. Ser. 8, 1971, v.51, No 8, p.17-19.

7. Král J. Regularity of potentials and removability of singularities of solutions of partial differential equations. - Proc. Conf. Equadiff, Brno, 1972, v.3, p.179-185.

8. Král J. Removable singularities of solutions of semielliptic equations. - Rend.Mat., 1973, v.6, ser.6, No 4, p.1-21.

9. Král J. Singularités non essentielles des solutions des équations aux dérivées partielles. - Lecture Notes in Math. (Séminaire de théorie du potentiel), Paris, 1974, v.518, p.95-104.

10. Král J. Potentials and removability of singularities. - Proc.Conf. "Non-linear evolution equations and potential theory", Academia, Praha, 1975, p. 95-106.

11. Крал И. Об устранимых особенностях и о принципе Неймана. - В кн.: 5-е советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики, Алма-Ата, 1976, с.132-140.

12. Littman W. Polar sets and removable singularities of partial differential equations. - Arkiv mat.,1967, v.7, p.1-9.

13. Stampacchia G. The $L^{p,\alpha}$ spaces and applications to the theory of partial differential equations. - Proc.Conf.Equadiff, 2, Bratislava, 1966, p.129-141.