УДК 517.946

ПОЛУЧЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ ПО НЕСКОЛЬКИМ ПЕРЕМЕННЫМ

И.А. Киприянов, Л.А. Иванов (Воронеж)

Введение

Метод разложения функций на плоские волны [1] нашел многочисленные применения как в задачах интегральной геометрии, так и в задачах уравнений математической физики. Так, в частности, В.А. Боровиков [2] построил фундаментальные решения для однородных операторов в частных производных с постоянными коэффициентами. При этом основная формула для фундаментального решения получилась с помощью разложения на плоские волны δ-функции. Использованный в этой работе метод позволил как изучать особенности фундаментальных решений, так и получить формулы Герглотца-Петровского в гиперболическом случае.

Впервые весовые плоские волны были введены в [3]. Подробно основные факты, касающиеся плоских весовых волн (аналог основной формулы [1], представление Радона, разложение δ-функции на плоские весовые волны), изложены в [4, 5]. Там же показано, как метод весовых волн может быть эффективно применен к получению фундаментальных решений для B-эллиптических [3] и B-гиперболических уравнений в том случае, когда по одной переменной действует оператор Бесселя.

В настоящей работе вводится понятие "весовой волны" в том случае, когда имеются особенности по нескольким переменным. В § 1 доказаны формулы о представлении функций с помощью указанных весовых волн и рассмотрены примеры для использования этих разложений в дальнейшем. Затем получено представление для решения уравнения Бельтрами с помощью обобщенного потенциала.

В § 2 строится фундаментальное решение для общих B-эллиптических уравнений, т.е. для уравнений, в которых операторы Бесселя действуют по нескольким переменным. При этом параметры при особенностях не предполагаются одинаковыми. Доказана теорема о структуре фундаментального решения, которую естественно называть теоремой о "сложении особенностей". А именно порядок вырождения фундаментального решения дифференциального уравнения с операторами Бесселя по нескольким переменным в точности такой же, как у фундаментального решения для уравнения с оператором Бесселя по одной переменной, при этом у последнего параметр при особенности равен сумме соответствующих параметров первого уравнения. Получены оценки поведения фундаментального решения.

В § 3 рассматривается применение метода разложения функций на плоские весовые волны для гиперболических уравнений, в которых имеются особенности (применяются операторы Бесселя) по нескольким переменным. Доказываются соответствующие формулы Герглотца-Петровского. Получение такого вида структуры фундаментального решения позволяет объяснить наличие принципа Гюйгенса для сингулярных задач Коши в случае пространств любой размерности [6 , 7] .

§ 1. Разложение функции на плоские весовые волны

Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на R^n , где $x=(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots$ $\dots,x_n)$. Предположим, что функция $f(x)$ четная по переменным $x_{k+1},\dots,x_n$; k - фиксированное, $1\leqslant k\leqslant n$. С помощью операторов Пуассона конструируем функцию вида

$$f_B(x)=\int_0^{\pi}\dots\int_0^{\pi}f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1}\cos\theta_1,\dots$$

$$\dots,x_n\cos\theta_{n-k})\prod_{i=1}^{n-k}\sin^{\mu_i-1}\theta_i\,d\theta_1\dots d\theta_{n-k}\,, \tag{1}$$

где $\mu_1,\dots,\mu_{n-k}$ - некоторые вещественные положительные константы. С символом B , как мы увидим ниже, естественным образом связываются операторы вида B_μ , где μ пробегает множество $\mu_1,\dots,\mu_{n-k}$.

Пусть теперь $g(s)$ - четная функция одной вещественной переменной, а $x\cdot y$ - скалярное произведение векторов $x,y\in R^n$, т.е. $x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

Определение. Функцию вида $g_B(x\cdot y)$, определенную с помощью (1) при фиксированном y , будем называть функцией типа плоской весовой волны с весом $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_{n-k})$ по переменным $x_{k+1},\dots,x_n$.

В дальнейшем, как обычно, через $S(x,r)$ обозначается сфера с центром в точке x и радиусом r .

Лемма 1. *Имеет место тождество*

$$\int_{S(0,r)}g(x\cdot y)dS=\omega_{n-1}\int_{-r}^{r}r(r^2-p^2)^{\frac{n-3}{2}}g(|x|\cdot p)dp\,, \tag{2}$$

где dS - элемент поверхности $S(0,r)$ в R^n, ω_{n-1} - площадь $S(0,1)$ в R^n, $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Доказательство леммы повторяет доказательство основного тождества в [1, с.16] и приводит к нему при $r=1$. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{n-k})$, $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_{n-k}$, $\nu = n + |\mu|$.

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$\int_{S(0,r)} g_B(x\cdot y) \prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i}\, dS =$$

$$= \omega_{n-1,\mu_1,\ldots,\mu_{n-k}} \int_{-r}^{r} r\left(r^2-\rho^2\right)^{\frac{\nu-3}{2}} g\left(|x|\cdot\rho\right) d\rho, \tag{3}$$

где

$$\omega_{n-1,\mu_1,\ldots,\mu_{n-k}} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \prod_{i=1}^{n-k} \Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)}. \tag{4}$$

Доказательство проводится обратной индукцией по k. При $k=n$ лемма 2 сводится к лемме 1. Пусть (3) справедливо при $k = s+1$. Рассмотрим интеграл в левой части (3) при $k=s$. Имеем

$$I = \int_{S(0,r)} \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} g\left(\sum_{i=1}^{s} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n-s} x_{s+i} y_{s+i} \cos\theta_i\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-s} \left(\sin^{\mu_i-1}\theta_i\right) y_{s+i}^{\mu_i}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-s}\, dS.$$

Производим замену переменных по формулам $\alpha_i = y_{s+i}\cos\theta_i$, $\beta_i = y_{s+i}\sin\theta_i$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = y_{s+i}^2$, $i = 1, \ldots, n-s$.

Если $S_1(0,r)$ - сфера $\sum_{i=1}^{s} y_i^2 + \sum_{i=1}^{n-s} (\alpha_i^2 + \beta_i^2) = r^2$ с элементом поверхности dS_1, то получаем интеграл вида

$$I=\int\limits_{S_1(0,\tau)} g\left(\sum_{i=1}^{s} x_i y_i+\sum_{i=1}^{n-s} x_{s+i}\alpha_i\right)\prod_{i=1}^{n-s}\beta_i^{\mu_i-1}\,dS_1 .$$

Выделяем теперь интегрирование по β_1 и для внутреннего интеграла используем индуктивное предположение. Тогда получаем

$$I=\omega_{n-1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-s}}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\frac{\beta_1^{\mu_1-1}\,d\beta_1}{\sqrt{\tau^2-\beta_1^2}}\int\limits_{-\sqrt{\tau^2-\beta_1^2}}^{\sqrt{\tau^2-\beta_1^2}}\sqrt{\tau^2-\beta_1^2}\ \times$$

$$\times\left(\tau^2-p^2\right)^{\frac{n+\mu_2+\ldots+\mu_{n-s}-3}{2}} g(|x|\cdot p)\,dp.$$

Изменяя порядок интегрирования и производя замену переменных по формуле $\beta_1^2=(\tau^2-p^2)\,\tau^2$, находим, что

$$I=\omega_{n-1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-s}}\int\limits_{-\tau}^{\tau}\tau\left(\tau^2-p^2\right)^{\frac{n+\mu_1+\ldots+\mu_{n-s}-3}{2}}\times$$

$$\times g(|x|\cdot p)\,dp\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\tau^2\right)^{\frac{n+\mu_2+\ldots+\mu_{n-s}-3}{2}}\tau^{\mu_1-1}\,d\tau=$$

$$=\omega_{n-1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-s}}\,B\left(\frac{\mu_1}{2},\ \frac{n+\mu_2+\ldots+\mu_{n-s}-1}{2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\tau}^{\tau}\tau\left(\tau^2-p^2\right)^{\frac{n+|\mu|-3}{2}} g(|x|\cdot p)\,dp .$$

Таким образом, мы приходим к (3) для $K=S$. При этом

$$\omega_{n-1,\mu_1,\ldots,\mu_{n-s}}=\omega_{n-1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-s}}\,B\left(\frac{\mu_1}{2},\ \frac{n+\mu_2+\ldots+\mu_{n-s}-1}{2}\right),$$

где $B(\alpha,\beta)$ - бета-функция. Из последнего равенства, по индукции, получаем (4).

Лемма доказана.

Как и в [1], мы будем использовать доказанное ими основное тождество при $\eta = 1$:

$$\int_S g_B(x\cdot y)\cdot\prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i}\,dS =$$

$$= \omega_{n-1,\mu_1,\ldots,\mu_{n-k}} \int_{-1}^{1} (1-\rho^2)^{\frac{\nu-3}{2}} g(|x|\cdot\rho)\,d\rho, \qquad (3')$$

здесь и в дальнейшем $S = S(0,1)$. Главное применение (3') основано на частных случаях $g(S) = |S|^{\nu}$ и $g(S) = |S|^{\nu}\ln|S|$. Получаемые при этом тождества представляют собой разложение соответствующих функций на плоские весовые волны; в первом случае имеем

$$\int_S |x\cdot y|_B^{\nu} \prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i}\,dS =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\prod_{i=1}^{n-k}\Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\mu|+\nu}{2}\right)}|x|^{\nu}; \qquad (5)$$

во втором –

$$\int_S (|x\cdot y|^{\nu}\ln|x\cdot y|)_B\cdot\prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i}\,dS =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\prod_{i=1}^{n-k}\Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\mu|+\nu}{2}\right)}|x|^{\nu}(\ln|x| + C), \qquad (6)$$

где $C = C(n,\mu,\nu)$ – некоторая константа.

Пусть в дальнейшем $f(x)$ – финитная, четная по переменным $x_{k+1},\ldots,x_n$ функция, имеющая одну непрерывную производную по переменным $x_1,\ldots,x_k$ и две непрерывные производные по остальным переменным. Через T_x^y обозначим оператор вида

$$T_x^y f(x)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-k}\Gamma\left(\frac{\mu_i+1}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-k}\prod\limits_{i=1}^{n-k}\Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi}\ldots\int\limits_0^{\pi} f\Big(x_1-y_1,\ldots$$

$$\ldots,x_k-y_k,\sqrt{x_{k+1}^2+y_{k+1}^2-2x_{k+1}y_{k+1}\cos\theta_1},\ldots$$

$$\ldots,\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\theta_{n-k}}\Big)\cdot\prod_{i=1}^{n-k}\sin^{\mu_i-1}\theta_i\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-k}. \qquad (7)$$

Следуя [3] , будем называть этот оператор обобщенным сдвигом. С помощью (7) определяем теперь обобщенный потенциал по формуле

$$u(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+|\mu|}{2}\right)}{\pi^{\frac{n-1}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n-k}\Gamma\left(\frac{\mu_i+1}{2}\right)(2-\gamma)}\int\limits_{R^n_{k,+}} T_x^y|y|^{2-\gamma}f(y)\prod_{i=1}^{n-k}y_{k+i}^{\mu_i}\,dy, \qquad (8)$$

где $R^n_{k,+}=\{x\in R^n,\ x_{k+1}\geq 0,\ldots,x_n\geq 0\}$. Если через Δ_B обозначить оператор вида

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n-k}\frac{\mu_i}{x_{k+i}}\frac{\partial}{\partial x_{k+i}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n-k}B_{\mu_i,x_{k+i}},$$

то справедлива

Теорема 1. *Обобщенный потенциал (8) является решением уравнения*

$$\Delta_B u(x)=f(x), \qquad (9)$$

где $f(x)$ удовлетворяет условиям, перечисленным выше.

Доказательство. Используя самосопряженность оператора обобщенного сдвига (7) , получаем

$$\Delta_B u(x)=-C\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_{R^n_{k,+}} y_i|y|^{-\gamma}T_x^y f(y)\prod_{i=1}^{n-k}y_{k+i}^{\mu_i}\,dy+$$

$$+C\sum_{i=1}^{n-k} B_{\mu_i,x_{k+i}} \int\limits_{R^n_{k,+}} |y|^{2-\gamma} T^y_x f(y)\prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i}\, dy,$$

откуда, используя тождество $B_{x_i} T^y_x f(y) = B_{y_i} T^y_x f(y)$, $i = k+1,\ldots$
$\ldots, n$, и формулу Грина для B_μ , приходим к представлению:

$$\Delta_B u(x) = C\lim_{r\to 0}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{|y|=r} \frac{y_i^2}{r}|y|^{2-\gamma} T^y_x f(y)\prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i} dy +$$

$$+ C\lim_{r\to 0}\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{|y|>r} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}|y|^{2-\gamma} T^y_x f(y)\prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i} dy +$$

$$+ C\lim_{r\to 0}\sum_{i=1}^{n-k}\int\limits_{|y|=r} \frac{\partial}{\partial y_{k+i}}|y|^{2-\gamma} \frac{y_{k+i}}{r} T^y_x f(y)\prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i} dy +$$

$$+ C\lim_{r\to 0}\sum_{i=1}^{n-k}\int\limits_{|y|=r} |y|^{2-\gamma} \frac{y_{k+i}}{r}\frac{\partial}{\partial y_{k+i}} T^y_x f(y)\prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i} dy +$$

$$+ C\lim_{r\to 0}\sum_{i=1}^{n-k}\int\limits_{|y|>r} B_{\mu_i, y_{k+i}}|y|^{2-\gamma} T^y_x f(y)\prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i} dy,$$

где $y\in R^n_{k,+}$, а C - константа из (8) . При $r\to 0$ третье слагаемое исчезает, сумма второго и пятого слагаемых обращается в нуль, так как

$$\Delta_B |y|^{2-\gamma} = 0, \quad |y|>0, \quad \gamma = k+|\mu|.$$

Объединяя первое и четвертое слагаемые, приходим к (9) . Теорема доказана.
Имеют место следующие формулы (проверенные непосредственно):

$$\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma-2}{2}} |y|^\nu = 2^{\frac{\nu+\gamma-2}{2}}\left(\frac{\nu+\gamma-2}{2}\right)!\,(4-\gamma)(6-\gamma)\ldots\nu\cdot|y|^{2-\gamma}, \tag{10}$$

если $\nu > 0$, $(\gamma + \nu)$ четное, и

$$\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma-2}{2}} |y|^\nu \ln|y| = (-1)^{\frac{\nu-2}{2}} \frac{2^{\nu+\gamma+2}\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{2-\gamma} |y|^{2-\gamma}, \tag{11}$$

если γ четное.

Используя формулы (5) , (9) и (10) , получаем разложение финитной функции $f(x)$ на плоские весовые волны

$$\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}} \int\limits_{R^n_{k,+}} f(y) \left\{ \int\limits_S T_x^y |y\cdot\omega|_B^\nu \prod_{i=1}^{n-k} \omega_{k+i}^{\mu_i} dS \right\} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i} dy = C^1(n,\mu,\nu) f(x), \tag{12}$$

где

$$C^1(n,\mu,\nu) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{\nu+\gamma}{2}} \left(\frac{\nu+\gamma-2}{2}\right)! (2-\gamma)\ldots\nu \cdot \prod_{i=1}^{n-k} \Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu_i+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\gamma}{2}\right)} . \tag{13}$$

В случае четного γ , используя формулы (6) , (9) и (11), находим

$$\Delta_B^{\nu+\gamma} \int\limits_{R^n_{k,+}} f(y) \left\{ \int\limits_S T_x^y \left(|y\cdot\omega|^\nu \ln|y\cdot\omega|\right)_B \prod_{i=1}^{n-k} \omega_{k+i}^{\mu_i} dS \right\} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-k} y_{k+i}^{\mu_i} dy = C^2(n,\mu,\nu) f(x), \tag{14}$$

где

$$C^2(n,\mu,\nu) = (-1)^{\frac{\gamma-2}{2}} (2\pi)^n \prod_{i=1}^{n-k} \Gamma(\mu_i)\Gamma(\nu+1) . \tag{15}$$

Полученные формулы (12), (14) являются аналогом интегрального представления Радона и выражают собой обобщение соответствующих формул из [4].

Вообще от предположения финитности можно избавиться. Более того, можно дать разложения на плоские волны некоторых обобщенных функций. Так, например, разложение δ-функции в случае $n+\gamma$, не являющемся четным, будет иметь вид:

$$\delta(x) = C(n,\mu)\int_S |x\cdot y|_B^{-\gamma}\,|y_0|^{\mu}\,dS_y .$$

§ 2. Фундаментальное решение B-эллиптического уравнения

Пусть $\mathcal{L}(D_{x'},B_{\mu,x''}) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_k},B_{\mu_1,x_{k+1}},\dots,B_{\mu_{n-k},x_n}\right)$ - линейный дифференциальный оператор порядка $2m$ с постоянными коэффициентами. Будем говорить, что оператор B - эллиптический, если многочлен $\mathcal{L}_0(\omega) = \mathcal{L}_0(\omega_1,\dots,\omega_k,\omega_{k+1}^2,\dots,\omega_n^2)$, где $\mathcal{L}_0$ - главная часть $\mathcal{L}$, не обращается в нуль при $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \neq 0$.

Будем искать решение уравнения

$$\mathcal{L}(D_{x'},B_{\mu,x''})\,u(x) = f(x), \tag{16}$$

где $f(x)$ удовлетворяет пока предположениям § 1. О возможных ослаблениях условий на $f(x)$ будет сказано ниже. Так как $f(x)$ можно разложить на плоские волны, то достаточно уметь решать уравнение (16) для функций специального вида. Поэтому рассмотрим уравнение вида

$$\mathcal{L}(D_{x'},B_{\mu,x''})\,v = \int_S g_B(x\cdot\omega)\prod_{i=1}^{n-k}\omega_{k+i}^{\mu_i}\,dS . \tag{17}$$

Его решение будем искать в виде

$$v(x) = \int_S u_\omega(x)\prod_{i=1}^{n-k}\omega_{k+i}^{\mu_i}\,dS, \tag{18}$$

где $u_\omega(x)$ является решением уравнения

$$\mathcal{L}(D_{x'}, B_{\mu,x''})u_\omega(x) = g_B(x\cdot\omega). \tag{19}$$

Функцию $u_\omega(x)$ будем, в свою очередь, искать в виде

$$u_\omega(x) = \varphi_B(x\cdot\omega). \tag{20}$$

Непосредственно из (20) получаем

$$\mathcal{L}(D_{x'}, B_{\mu,x''})u_\omega(x) = \int_0^\pi\ldots\int_0^\pi \mathcal{L}\Big(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_k\frac{d}{d\xi},$$

$$\omega_{k+1}^2\frac{d^2}{d\xi^2},\ldots,\omega_n^2\frac{d^2}{d\xi^2}\Big)\varphi(\xi)\prod_{i=1}^{n-k}\sin^{\mu_i-1}\theta_i\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-k}, \tag{21}$$

где $\xi=\sum_{i=1}^{k}x_i\omega_i + \sum_{i=1}^{n-k}x_{k+i}\,\omega_{k+i}\cos\theta_i$.

В силу (19) потребуем, чтобы

$$\mathcal{L}\Big(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_n^2\frac{d^2}{d\xi^2}\Big)\varphi(\xi) = g(\xi). \tag{22}$$

Решение этого уравнения запишем с помощью интеграла Дюамеля

$$\varphi(\xi) = \int_0^\xi \varpi(\xi-\tau)g(\tau)d\tau, \tag{23}$$

где $\varpi(\xi)$ есть решение следующей задачи Коши:

$$\mathcal{L}\Big(\omega_1\frac{d}{d\xi},\ldots,\omega_n^2\frac{d^2}{d\xi^2}\Big)\varpi = 1,$$

$$\varpi^{(i)}(0)=0,\quad i=0,\ldots,2m-1.$$

Записывая, как обычно, решение этой задачи в виде контурного интеграла, а затем последовательно используя (23), (22), (20) и (17), получаем

$$v(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varsigma}\Big[\int_0^\xi\oint_C\frac{e^{(\xi-\tau)\lambda}}{\mathcal{L}(\omega\lambda)}d\lambda\, g(\tau)d\tau\Big]_B \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-\kappa} |\omega_{\kappa+i}|^{\mu_i} dS,$$

здесь контур C охватывает все корни знаменателя.

Положим

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{C^1(n,\mu,\nu)} |s|^{\nu} & \text{при } \gamma \text{, не являющемся четным;} \\ \dfrac{1}{C^2(n,\mu,\nu)} |s|^{\nu} \ln|s| & \text{при } \gamma \text{ четном.} \end{cases}$$

Тогда функция

$$K(x) = \Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}} v(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}} \int_S \left[\int_0^{\xi} \oint_C \frac{e^{(\xi-\tau)\lambda}}{\mathcal{L}(\omega\lambda)} d\lambda\, g(\tau) d\tau \right]_B \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-\kappa} |\omega_{\kappa+i}|^{\mu_i} dS \tag{24}$$

является фундаментальным решением.

Пусть $K(x,y) = T_x^y K(x)$ Имеет место

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *- финитная, четная по переменным* $x_{\kappa+1},\ldots,x_n$ *функция, удовлетворяющая условию непрерывности по Гёльдеру. Тогда функция*

$$u(x) = \int_{R^n_{\kappa,+}} K(x,y) f(y) \prod_{i=1}^{n-\kappa} y_{\kappa+i}^{\mu_i} dy$$

является решением уравнения (16) .

Доказательство проводится обычным путем с использованием формул (12) , (14) и (24) .

Замечание. От предложения финитности можно избавиться (см. [3]).

В случае однородного уравнения, т.е. когда $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$, формула (24) для фундаментального решения допускает упрощение. В этом случае $\mathcal{L}(\omega\lambda) = \lambda^{2m}\mathcal{L}(\omega)$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{e^{(\xi-\tau)\lambda}}{\mathcal{L}(\omega\lambda)}\,d\lambda = \frac{1}{(2m-1)!}(\xi-\tau)^{2m-1}\frac{1}{\mathcal{L}(\omega)} .$$

Соответственно фундаментальное решение (24) принимает вид

$$K(x) = \frac{1}{(2m-1)!}\,\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}}\int\limits_S\left[\int\limits_0^{\xi}(\xi-\tau)^{2m-1}g(\tau)\,d\tau\right]_B \times$$

$$\times\;\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-k}|\omega_{k+i}|^{\mu_i}}{\mathcal{L}(\omega)}\,dS , \qquad (25)$$

где, как и выше, $\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i\,\omega_i + \sum\limits_{i=1}^{n-k} x_{k+i}\,\omega_{k+i}\cos\theta_i$.

Пусть теперь γ не является четным числом, тогда

$$K(x) = \frac{1}{C'(n,\mu,\nu)\,(2m-1)!}\,\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}}\int\limits_S\left[\int\limits_0^{\xi}(\xi-\tau)^{2m-1}\tau^{\nu}\,d\tau\right]_B \times$$

$$\times\;\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-k}|\omega_{k+i}|^{\mu_i}\,dS}{\mathcal{L}(\omega)} .$$

Положим $\tau=\xi\cdot t$. Пусть

$$\frac{1}{C'(n,\mu,\nu)(2m-1)!}\int\limits_0^1(1-t)^{2m-1}t^{\nu}\,dt = C ,$$

тогда решение принимает вид

$$K(x) = C\,\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}}\int\limits_S|\xi|_B^{2m+\nu}\,\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-k}|\omega_{k+i}|^{\mu_i}}{\mathcal{L}(\omega)}\,dS .$$

Если $\gamma \leqslant 2m$, то все дифференцирования можно внести под знак интеграла. Фундаментальное решение в этом случае принимает вид

$$K(x) = C^3 \int\limits_S |x \cdot \omega|_B^{2m-\gamma} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-k} |\omega_{k+i}|^{\mu_i}}{\mathcal{L}(\omega)} dS . \tag{26}$$

Это окончательный вид фундаментального решения в указанных ограничениях на показатели; константа C^3 вычисляется по формуле

$$C^3 = \frac{(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)!}{2\pi^{\frac{n-1}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n-k} \Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right)(\gamma-1)!\,(2m-\gamma)!} ,$$

если γ - целое, и вычисляется по формуле

$$C^3 = \frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n-k} \Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)(1-\gamma)\ldots(2m-\gamma)} , \tag{27}$$

если γ - дробное.

В случае четного γ получаем

$$K(x) = C^4 \int\limits_S \left(|x \cdot \omega|^{2m-\gamma} \ln|x \cdot \omega|\right)_B \frac{\prod\limits_{i=1}^{n-k} |\omega_{k+i}|^{\mu_i}}{\mathcal{L}(\omega)} dS ,$$

где

$$C^4 = \frac{(-1)^{\frac{\gamma}{2}} (2m-\gamma)!}{\pi^{\frac{n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n-k} \Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right) 2^{\gamma-2} \left(\frac{\gamma}{2}\right)!} .$$

Пусть теперь $2m < \gamma$. В этом случае фундаментальное решение всегда имеет вид (26) , причем в случае дробного γ константа имеет вид (27) ; в случае нечетного γ константа имеет вид

$$C^3 = \frac{(\gamma-2m-1)!}{\pi^{\frac{n-1}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n-k} \Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right)(\gamma-1)!}$$

и в случае четного γ имеет вид

$$C^4 = \frac{(-1)^{\frac{\gamma}{2}} (\gamma-2m)!}{\pi^{\frac{q}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n-k} \Gamma\left(\frac{\mu_i}{2}\right) 2^{\gamma}\left(\frac{\gamma}{2}\right)!} .$$

Изучим теперь характер особенности фундаментального решения и его производных. Рассмотрим сначала случай однородного уравнения $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. В формуле (25) положим $x = \tau\eta$, $|\eta| = 1$; тогда получаем

$$K(x) = \Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}} \tau^{2m+\nu} \Omega(\eta),$$

где $\Omega(\eta)$ - бесконечно дифференцируемая функция, четная по $\eta_{k+1}, \dots, \eta_n$. Нетрудно видеть, что после дифференцирования получим

$$K(x) = \tau^{2m-\gamma} \Omega(\eta) \tag{28}$$

с некоторой другой гладкой функцией Ω , $\tau = |x|$. Если через $D_{x'}^{i}$ обозначить некоторую частную производную по переменным $x_1, \dots, x_n$, а через $B_{\mu, x''}^{j}$ - некоторый набор из j операторов Бесселя по остальным переменным, то будем иметь

$$D_{x'}^{i} B_{\mu,x''}^{j} K(x) = \tau^{2m-\gamma-i-2j} \Omega(\eta) .$$

Пусть теперь γ - четное число. Положим в (25) $g(\tau) = |\tau|^{\nu} \ln|\tau|$ и $\tau = \xi \cdot t$. Тогда

$$K(x) = C\Delta_B^{\frac{\nu+\gamma}{2}} \int\limits_S \left[\xi^{2m+\nu} \int\limits_0^1 (1-t)^{2m-1} t^{\nu} \ln t \, dt + \right.$$

$$+\,\xi^{2m+\nu}\ln|\xi|\int_0^1(1-t)^{2m-1}t^{\nu}dt\Big]_B\frac{\prod_{i=1}^{n-k}|\omega_{k+i}|^{\mu_i}}{\mathcal{L}(\omega)}dS.$$

Интеграл, соответствующий первому слагаемому, является многочленом степени $2m+\nu$, четным по $x_{k+1},\dots,x_n$. Применив оператор $\Delta_B^{\frac{\nu+1}{2}}$, получим многочлен степени $2m-\gamma$, поэтому первое слагаемое является решением уравнения $\mathcal{L}_0[u]=0$ и его можно отбросить. Далее рассмотрим опять два случая. 1) $\gamma\le 2m$ и 2) $\gamma>2m$. В первом случае при дифференцировании $\ln|\xi|$ получаем многочлен, являющийся решением однородного уравнения. Поэтому, переходя на единичную сферу, получаем представление вида

$$K(x)=r^{2m-\gamma}\Omega(\eta)+P(x)\ln r,\tag{29}$$

где $P(x)$ - многочлен степени $2m-\gamma$, четный по $x_{k+1},\dots,x_n$. Поскольку во втором случае коэффициент при $\ln$ постоянный, то после дифференцирования $\ln$ исчезает. Вследствие этого фундаментальное решение будет иметь вид (28).

Из наших рассуждений и формул (28), (29) вытекают следующие оценки фундаментального решения. Имеет место неравенство

$$|D^i_{x'}B^j_{\mu,x''}K(x)|\le Cr^{2m-\gamma-i-2j},\tag{30}$$

справедливое в случаях:

1°. если $i+2j\ge 0$ и γ не является четным, либо γ четное и $\gamma>2m$;

2°. если $i+2j>2m-\gamma$, $\gamma\le 2m$ и γ четное, то справедлива оценка

$$|D^i_{x'}B^j_{\mu,x''}K(x)|\le Cr^{2m-\gamma-i-2j}(1+\ln r).$$

В случае, когда $k=n-1$, $\mu_1=\bar\mu$, мы приходим, в частности, к результатам и оценкам работы [3] т.е. к случаю наличия особенности по одной переменной x_n. Так, оценка (30) будет иметь вид

$$|D^i_{x'}B^j_{\bar\mu,x_n}K(x)|\le Cr^{2m-n-\bar\mu-i-2j}.\tag{31}$$

Таким образом, сравнивая оценки (30) и (31), получаем следующий результат.

Теорема 3. (О сложении особенностей.) *Фундаментальное решение для однородного B-эллиптического оператора с применением операторов Бесселя B_{μ_i} по переменным x_{k+i}, $i=1,\dots,n-k$, имеет тот же порядок особенности, что и B-эллиптический оператор того же порядка с оператором Бесселя $B_{\bar\mu}$ по одной переменной x_n, в которой $\bar\mu=\mu_1+\dots+\mu_{n-k}=|\mu|$.*

Изучим характер особенности фундаментального решения и его производных внутри области $R^n_{k,+}$. Пусть фундаментальное решение имеет вид (28).

Имеем

$$K(x,y)=CT_x^y\, r^{2m-\gamma}\,\Omega(\eta)=C\int_0^\pi\dots\int_0^\pi r_\theta^{2m-\gamma}\times$$

$$\times\,\Omega(\eta_\theta)\prod_{i=1}^{n-k}\sin^{\mu_i-1}\theta_i\,d\theta_1\dots d\theta_{n-k},$$

где

$$r_\theta^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+\sum_{i=1}^{n-k}\left(x_{k+i}^2+y_{k+i}^2-2x_{k+i}y_{k+i}\cos\theta_i\right),$$

$$\eta_\theta=\left(\frac{x_1-y_1}{r_\theta},\dots,\frac{x_k-y_k}{r_\theta},\frac{\sqrt{x_{k+1}^2+y_{k+1}^2-2x_{k+1}y_{k+1}\cos\theta_1}}{r_\theta},\dots\right.$$

$$\left.\dots,\frac{\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\theta_{n-k}}}{r_\theta}\right).$$

Так как

$$\Omega(\eta_\theta)=\Omega(\eta_0)+[\Omega(\eta_\theta)-\Omega(\eta_0)],$$

то

$$K(x,y)=C\Omega(\eta_0)|r|_B^{2m-\gamma}+C'|r|_B^{2m-\gamma}\sup|\Omega(\eta_\theta)-\Omega(\eta_0)|;$$

следовательно, при $\theta\longrightarrow 0$ второе слагаемое имеет более высокий порядок.

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что достаточно исследовать характер особенности интеграла вида

$$\Phi(x,y) = \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} \frac{\prod_{i=1}^{n-k} \sin^{\mu_i - 1} \theta_i}{r_\theta^{\gamma - 2m}} d\theta_1 \dots d\theta_{n-k} . \tag{32}$$

Лемма 3. *Интеграл* $\Phi(x,y)$ *, определяемый формулой* (32) *, удовлетворяет оценке*

$$|\Phi(x,y)| \leq C r^{2m-n-1} \tag{33}$$

при $n \geq 2m+1$ *и*

$$|\Phi(x,y)| \leq C \ln|r| \tag{34}$$

при $n = 2m$.

В случае $k = n-1$ этот интеграл подробно исследован в [3] . Как и в § 1, оценки (33) , (34) устанавливаются обратной индукцией по k .

Основной вывод, который можно сделать из леммы, состоит в том, что порядок особенности внутри области не зависит от $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-k})$.
Из (33), (34) непосредственно следует

Теорема 4. *Внутри области* $R^n_{k,+}$ *оценки фундаментального решения имеют соответственно следующий вид:*

$$D^i_{x'} B^j_{\mu,x''} K(x,y) = O(1) \quad \text{при } n+i+2j < 2m ;$$

$$D^i_{x'} B^j_{\mu,x''} K(x,y) = O(r^{2m-n-i-2j}) \quad \text{при } n+i+2j > 2m;$$

$$D^i_{x'} B^j_{\mu,x''} K(x,y) = O(\ln r) \quad \text{при } n+i+2j = 2m.$$

§ 3. B-гиперболические уравнения

Комплекснозначная функция $\varphi(x)$, $x \in R^{n+1}$, называется основной, если она бесконечно дифференцируемая, четная по x_0 и удовлетворяет неравенствам

$$|D^q \varphi(x)| \leq \frac{C_{q,\nu}}{(1+|x|^2)^\nu} , \quad |x|^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \tag{35}$$

при любых $q, \nu = 0, 1, 2, \ldots$. Так как $\varphi(x)$ четная по x_0 , то к основным функциям можно сколь угодно раз применить оператор Бесселя, причем снова будут выполняться неравенства вида (35) . Множество основных функций с обычной топологией будем называть основным пространством S_B . В соответствии с этим через S_B' обозначается двойственное к S_B пространство - пространство функционалов.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка $2m$ с постоянными коэффициентами вида:

$$L\left(B_\kappa, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \sum_{2j+r=2m} \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n} a_j^{(i_1,\ldots,i_r)} B_{\kappa,t}^j \frac{\partial^r}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}, \tag{36}$$

где $B_{\kappa,t}^j$ обозначает j-ю степень оператора Бесселя $(\mu = \kappa)$ при $x_0 = t$. Нас будет интересовать решение уравнения

$$L(B_{\kappa,t}, D_x) K(t,x) = \delta(t,x), \tag{37}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n, \quad t \in R^1$, в пространстве S_B' в случае, когда оператор L является B -эллиптическим, т.е. когда $L(\xi_0^2, \xi_1, \ldots, \xi_n) \geqslant \delta |\xi|^{2m}, \ \delta > 0, \ |\xi| \neq 0$, фундаментальное решение было получено выше (в частности, с помощью разложения δ-функции на плоские волны). В дальнейшем нас будет интересовать случай оператора вида (36) , т.е. однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Пусть $\gamma = n + \kappa + 1$; если $2m > \gamma$ и γ не является четным числом, то фундаментальное решение имеет вид

$$K(t,x) = C(n,\kappa) \int_S \frac{|(t,x)\cdot\omega|_B^{2m-\gamma} |\omega_0|^\kappa}{L(\omega_0^2, \omega_1, \ldots, \omega_n)} \, dS_\omega, \tag{38}$$

где постоянная вычисляется по формуле

$$C(n,\kappa) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-n-\kappa}{2}\right) (1-\gamma) \ldots (2m-\gamma)} \tag{39}$$

при дробном κ и вычисляется по формуле

$$C(n,k) = \frac{(-1)^{\frac{n+k}{2}} \left(\frac{n+k}{2}\right)!}{2\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)(n+k)!\,(2m-\gamma)!} \tag{40}$$

при нечетном γ.

При четном γ получаем

$$K(t,x) = C(n,k) \int\limits_S \frac{\left(|t,x|\cdot\omega\right|^{2m-\gamma} \ln|(t,x)\cdot\omega|\big)_B\, \omega_0^k}{L(\omega_0^2, \omega_1, \ldots, \omega_n)}\, dS_\omega, \tag{41}$$

где

$$C(n,k) = \frac{(-1)^{\frac{n+k-1}{2}} (2m-\gamma)!}{\pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{n+k} \left(\frac{n+k-1}{2}\right)!}. \tag{42}$$

В обоих случаях фундаментальное решение является обычной функцией, непрерывной в начале координат.

Пусть теперь $2m < \gamma$. Тогда фундаментальное решение имеет вид (38), где $C(n,k)$ определяется по формуле (41) при дробном γ и по формуле

$$C(n,k) = \frac{(-1)^{\frac{n+k+1}{2}} (n+k-2m)!}{\pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{n+k} \left(\frac{n+k-1}{2}\right)!} \tag{43}$$

при четном γ и, наконец, по формуле

$$C(n,k) = \frac{(n+k-2m)!}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)(n+k)!} \tag{44}$$

при нечетном γ

Пусть теперь оператор (36) не является B-эллиптическим. Тогда интегралы (38), (41) расходятся, и их нужно регуляризовать. Обозначим через S_ε множество точек единичной сферы, где $|L(\omega_0^2, \omega_1, \dots, \omega_n)| > \varepsilon$.

Лемма 3. *Если характеристическая поверхность $L(\xi_0^2, \xi_1, \dots, \xi_n)$ не имеет особых точек (кроме $\xi = 0$), то для решения уравнения (37) в S_B' имеет место представление*

$$K(t,x) = C(n,\kappa) \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f_{m,n,\kappa}(t,x,\omega)|\omega_0|^\kappa}{L(\omega_0^2, \omega_1, \dots, \omega_n)} dS, \tag{45}$$

где $C(n,\kappa)$, $f_{m,n,\kappa}(t,x,\omega)$ определяются в соответствии с формулами (13)-(19).

Доказательство по существу ничем не отличается от доказательства соответствующего факта в [2]. Только вместо разложения δ-функции на плоские волны нужно использовать разложение δ-функции на плоские весовые волны.

Проведем теперь специализацию формулы (38) в том случае, когда оператор (36) является B-гиперболическим. Это, по определению, означает, что соответствующий ему однородный полином $L(\tau^2, \xi_1, \dots, \xi_n)$ степени $2m$ имеет при любых $\xi_1, \dots, \xi_n$, не обращающихся одновременно в нуль, $2m$ различных действительных корней τ. Непосредственно из этого определения (соответствующего понятию строгой гиперболичности) и четности по τ вытекает, что справа и слева от нуля на вещественной прямой имеется ровно по m нулей. Это замечание будет существенно использовано в дальнейшем.

Рассмотрим сначала случай, когда γ не является четным числом. В формуле фундаментального решения (38) интегрирование ведется по сфере $S(0,1)$: $\omega_0^2 + (\omega,\omega) = 1$, где $(\omega,\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i^2$. Заменяем стандартным образом по сфере $S(0,1)$ на интегрирование по цилиндру, основанием которого служит сфера Ω : $\omega_1^2 + \dots + \omega_n^2 = 1$, а образующие параллельны оси ω_0. В полученном интеграле, используя B-гиперболичность, мы сможем провести интегрирование по образующим. Для полноты доказательства проведем соответствующие преобразования.

Имеем

$$K(t,x) = C(n,\kappa) \int\limits_{\omega_0^2 + \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \le 1} \frac{|(t,x)\cdot\omega|_B^{2m-\gamma} |\omega_0|^\kappa d\omega_0 \dots d\omega_n}{L(\omega_0^2, \omega_1, \dots, \omega_n)\cdot\omega_n},$$

где $\omega_n = \pm\sqrt{1-\omega_0^2 - \ldots - \omega_{n-1}^2}$ и $C(n,\kappa)$ определяются соответственно по формулам. (39), (40), (42) - (44). Пусть теперь

$$\sigma = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\omega_0^2}}, \quad \xi_i = \frac{\omega_i}{\sqrt{1-\omega_0^2}} \quad (i=1,\ldots,n). \tag{46}$$

Тогда

$$\omega_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}, \quad \sqrt{1-\omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}, \quad \omega_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{1+\sigma^2}}, \quad d\omega_0 = \frac{d\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}},$$

следовательно,

$$L(\omega_0^2, \omega_1, \ldots, \omega_n)\cdot\omega_n = (1+\sigma^2)^{\frac{-2m-1}{2}} L(\sigma^2, \xi_1, \ldots, \xi_n)\cdot\xi_n,$$

$$|t\cdot\tau + (x,\omega)|^{2m-\gamma} = (1+\sigma^2)^{\frac{\gamma-2m}{2}} |t\sigma + (x,\xi)|^{2m-\gamma}.$$

Поэтому

$$K(t,x) = C(n,\kappa)\int\limits_{\Omega} d\Omega \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|t\sigma + (x,\xi)|_B^{2m-\gamma} |\sigma|^{\kappa}}{L(\sigma^2, \xi_1, \ldots, \xi_n)} d\sigma\right]. \tag{47}$$

Рассмотрим внутренний интеграл. По определению регуляризации, проинтегрируем по всей оси за исключением ε-окрестностей тех точек, где $L(\sigma^2, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ обращается в нуль, а затем устремим ε к нулю. В силу четности подынтегральной функции и симметричности относительно нуля расположения корней характеристического многочлена (о чем уже упоминалось выше), это равнозначно тому, что проинтегрировать на полуоси $\sigma > 0$ дважды: от ∞ до 0 и от 0 до ∞. Заметим теперь, что числитель подынтегральной функции, в силу степенного характера, допускает аналитическое продолжение в некоторый сектор с аргументом φ : $-\alpha < \varphi < \alpha$, где α достаточно мало. Так как нулей знаменателя, лежащих правее 0, конечное число $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, то каждый из них можно опоясать достаточно малой окружностью S_κ $(\kappa = 1, \ldots, m)$, целиком лежащей в области аналитичности подынтегрального выражения. Контур интегрирования теперь изменяем следующим образом.

Когда идем от ∞ до 0, то проходим каждый раз по нижней части соответствующей сферы S_K $(K=1,\ldots,m)$, а когда идем от 0 до ∞, то проходим по верхней части соответствующей сферы. Тогда, по теореме о вычетах, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t\sigma+(x,\xi)|_B^{2m-\gamma}\,|\sigma|^K}{L(\sigma^2,\xi_1,\ldots,\xi_n)}\,d\sigma = -2\pi i\sum_{j=1}^{m}\frac{|t\sigma_j+(x\xi)|_B^{2m-\gamma}\,|\sigma_j|^K}{\frac{\partial}{\partial\sigma}L(\sigma_j^2,\xi_1,\ldots,\xi_n)}.$$

Отсюда и из (38) находим, что

$$K(t,x) = 2\pi i\,C(n,K)\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{m}\frac{|t\sigma_j+(x,\xi)|_B^{2m-\gamma}\,|\sigma_j|^K}{\frac{\partial}{\partial\sigma}L(\sigma^2,\xi_1,\ldots,\xi_n)\Big|_{\sigma=\sigma_j}}\,d\Omega, \tag{48}$$

т.е. получаем формулу для фундаментального решения в случае, когда γ не является четным.

Рассмотрим теперь случай, когда γ четное. Аналогично предыдущему перевод интегрирования по сфере в интегрирование по цилиндру с помощью (46) приводит к выражению типа (47), т.е. к выражению вида

$$K(t,x) = C(n,K)\int_{\Omega}d\Omega\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[|t\sigma+(x,\xi)|^{2m-\gamma}\ln|t\sigma+(x,\xi)|\right]_B}{L(\sigma^2,\xi_1,\ldots,\xi_n)}\times\right.$$

$$\left.\times|\sigma|^K d\sigma - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(|t\sigma+(x,\xi)|^{2m-\gamma}\ln\sqrt{1+\sigma^2}\right)_B|\sigma|^K}{L(\sigma^2,\xi_1,\ldots,\xi_n)}\,d\sigma\right\}.$$

Так как последний интеграл является полиномом степени $<2m$, то с учетом (2) заключаем, что он удовлетворяет однородному уравнению и его можно отбросить. В оставшейся части подынтегральное выражение продолжается аналитически в нижнюю полуплоскость в силу того, что γ целое. Это приводит нас к формуле

$$K(t,x) = 2\pi i\,C(n,K)\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{m}\frac{\left[|t\sigma_j+(x,\xi)|^{2m-\gamma}\ln|t\sigma_j+(x,\xi)|\right]_B|\sigma_j|^K}{\frac{\partial}{\partial\sigma}L(\sigma^2,\xi_1,\ldots,\xi_n)\Big|_{\sigma=\sigma_j}}\,d\Omega. \tag{49}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Решение уравнения (37), т.е. фундаментальное решение в случае B-гиперболического оператора $L(B_{k,t}, D_x)$ задается с помощью формулы (48) при четном γ, $\gamma \leq 2m$, и с помощью формулы (49) – в остальных случаях.*

При этом константы определяются в соответствии с формулами § 2, а суммирование ведется по всем корням характеристического полинома больших нулей.

Литература

1. Йон. Ф. Плоские волны и сферические средние.– М.: ИЛ, 1958.–158 с.
2. Боровиков В.А. Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.– Тр. Моск.мат. о-ва, 1959, № 8, с.199–257.
3. Киприянов И.А., Кононенко В.И. Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений – Дифференц. уравнения, 1967, т.3, № 1, с.114–129.
4. Киприянов И.А., Иванов Л.А. Фундаментальные решения однородных B-гиперболических уравнений. – Сиб.мат.журн., 1980, т,21, № 4, с.95–102.
5. Киприянов И.А., Иванов Л.А. Формулы Герглотца-Петровского для некоторого класса уравнений с особенностями.– В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными, Новосибирск, Наука, Сиб.отделение, 1980, с. 131–133.
6. Киприянов И.А., Иванов Л.А. О лакунах для одного класса уравнений с особенностями.– Мат. сб., 1979, т. 110 (152), с. 235–250.
7. Иванов Л.А. О принципе Гюйгенса для уравнений, распадающихся на множители.– Докл. АН СССР, 1979, т. 245, № 4, с. 829–832.