УДК 517.944

# О ТОЧНЫХ КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ АСИМПТОТИКАХ ДЛЯ $h$- ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В РАССЛОЕНИЯХ

В.Я. Иврий ( Магнитогорск )

## Введение

Целью настоящей работы является получение точных спектральных асимптотик при $h \to +0$ для весьма общих самосопряженных $h$-псевдодифференциальных операторов, действующих в расслоениях над компактными замкнутыми много - образиями. Будут даны приложения к классическим асимптотикам для спектральных задач с вырождением.

1. Пусть $X$ - компактное замкнутое $d$-мерное $C^\infty$- многообразие; $E$ - комплексное векторное $D$-мерное $C^\infty$-расслоение над $X$. Пусть $J=(0,h_0]$, $0<h_0$, не фиксировано и уменьшается при необходимости; $\mathcal{L}^{m,-\infty}(X,E)$ - класс операторнозначных функций $A_h$ $(h\in J)$ таких, что имеют место неравенства

$$\|D_h^n A_h u\|_s \leq C_{snN} h^N \|u\|_{s+m} \quad \forall s\in\mathbb{R}, n,N\in\mathbb{N},\ h\in J, u;$$

здесь $\|u\|_s$ - нормы в соболевских пространствах.

Через $\mathcal{L}^m(X,E)$ обозначим класс операторнозначных функций $A_h$ $(h\in J)$, определяемых в локальных координатах по модулю $\mathcal{L}^{m,-\infty}(X,E)$ формулой

$$(A_h u)(x) = (2\pi h)^{-d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{ih^{-1}\langle x-y,\xi\rangle} a_h(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi,$$

где

$$a_h(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,\xi) h^k,$$

$a_k \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2d})$ удовлетворяют неравенствам

$$|D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} a_k| \leq C_{\alpha\beta k} (1+|\xi|)^{m-|\beta|} \qquad \forall \alpha, \beta, k,$$

в том смысле, что

$$|D_x^{\alpha} D_{\xi}^{\beta} D_h^{n} (a_h - \sum_{k=0}^{N-1} a_k h^k)| \leq$$

$$\leq C_{\alpha\beta n N} h^N (1+|\xi|)^{m-|\beta|} \qquad \forall \alpha, \beta, n, N;$$

$a_0$ и $a^s = a_1 + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 a_0}{\partial x_j \partial \xi_j}$ называются *главным* и *субглавным* символами $A_h$.

Оператор $A_h \in \mathcal{L}^m(X,E)$ называется *квазиэллиптическим*, если имеет место оценка

$$(1+|\xi|)^m |\sigma| \leq C\, |a_0(x,\xi)\sigma| + C_1 |\sigma| \qquad \forall x, \xi, \sigma;$$

если при этом $C_1 = 0$, то $A_h$ называется *эллиптическим*. Если $A_h$ эллиптичен, то он обратим при малых $h$ и $A_h^{-1} \in \mathcal{L}^{-m}(X,E)$.

Теория $h$-псевдодифференциальных операторов подробно изложена в [1].

Пусть $dx$ - плотность на $X$ и $E$ - эрмитово расслоение над $X$. Не оговаривая специально, будем предполагать, что $A_h \in \mathcal{L}^m(X,E)$, $m>0$, $A_h$ квазиэллиптичен и симметричен в $L_2(X,E)$ при каждом $h \in \mathcal{I}$. Тогда $\forall h \in \mathcal{I}$ (в случае необходимости $h_0$ уменьшается) $A_h$ самосопряжен, его спектр дискретен, конечнократен и накапливается либо к $\pm\infty$, либо к $+\infty$, либо к $-\infty$. Следуя

[2], легко показать, что если $A_h$ эллиптичен, то $\Pi_h^{\pm}$ - ортопроекторы на положительное и отрицательное инвариантные подпространства $A_h$ - принадлежат $\mathcal{L}^0(X,E)$ и их главные символы являются ортопроекторами на положительное и отрицательное инвариантные подпространства $a_0$

Пусть $E(\lambda,h)$ - спектральный проектор $A_h$; $e(x,y,\lambda_1,\lambda_2,h)$ - ядро Шварца;

$$e(\lambda_1,\lambda_2,h)=E(\lambda_2,h)-E(\lambda_1,h);$$

$$N(\lambda_1,\lambda_2,h)=tr\, e(\lambda_1,\lambda_2,h); \text{ если } \lambda_1<\lambda_2, \text{ то}$$

$N(\lambda_1,\lambda_2,h)$ - число собственных значений, принадлежащих $[\lambda_1,\lambda_2)$.

Нас интересуют асимптотики $N(\lambda_1,\lambda_2,h), e(x,x,\lambda_1,\lambda_2,h)$ при $h\to+0$.

Введем следующие множества:

$$\Lambda=\{\lambda,\exists(x,\xi): \lambda\text{ - собственное значение } a_0(x,\xi)\},$$

$\Lambda_0=\{\lambda,\exists(x,\xi):\lambda$ - собственное значение $a_0(x,\xi)$ и не существует векторного поля $\nu$ на $T^*X$ такого, что имеет место неравенство

$$<(\nu a_0)(x,\xi)\sigma,\sigma>>0 \qquad \forall\sigma\in Ker(a_0(x,\xi)-\lambda)\setminus 0; \tag{0.1}$$

$Z=\{(x,\lambda),\exists\xi:$ $\lambda$ - собственное значение $a_0(x,\xi)\}$; $Z_0=\{(x,\lambda),$ $\exists\xi:\lambda$ - собственное значение $a_0(x,\xi)$ и не существует векторного поля $\nu$ на $T_x^*X$, такого что имеет место неравенство (0.1)$\}$.

Лемма 0.1. $\Lambda_0,Z_0$ - *замкнутые нигде не плотные множества меры нуль.*

Теорема 0.2. *Для любой* $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *имеют место асимптотики при* $h\to+0$:

$$\int\varphi(\lambda)d_\lambda N(\lambda_1,\lambda,h)\sim$$

$$\sim\sum_{n=0}^{\infty}h^{n-d}\int\varphi(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\varkappa_n(\lambda)d\lambda; \tag{0.2}$$

$$\int \varphi(\lambda) d_\lambda e(x, x, \lambda_1, \lambda, h) \sim$$

$$\sim \sum_{n=0}^{\infty} h^{n-d} \int \varphi(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \alpha_n(x, \lambda) d\lambda, \tag{0.3}$$

где $\varkappa_n \in \mathcal{D}'(R)$, $\alpha_n \in \mathcal{D}'(X \times R, \ \mathrm{hom}(E))$,

$\mathrm{supp}\, \varkappa_n \subset \Lambda$, $\mathrm{supp}\, \alpha_n \subset Z$, $\mathrm{sing\,supp}\, \varkappa_n \subset \Lambda_0$,

$\mathrm{sing\,supp}\, \alpha_n \subset Z_0$, $WF(\alpha_n) \subset \{(x, \lambda, \xi, \ell), \ell \neq 0\}$

и обе асимптотики можно бесконечно дифференцировать по $x, h$;

$$\varkappa_0(\lambda) = (2\pi)^{-d} \int tr\, \varepsilon(x, \xi, \lambda) dx d\xi, \tag{0.4}$$

$$\varkappa_1(\lambda) = -(2\pi)^{-d} \frac{\partial}{\partial\lambda} \int tr\, \varepsilon(x, \xi, \lambda) a^s(x, \xi) dx d\xi, \tag{0.5}$$

$$\alpha_0(x, \lambda) = (2\pi)^{-d} \int \varepsilon(x, \xi, \lambda) d\xi, \tag{0.6}$$

$\varepsilon(x, \xi, \lambda)$ - спектральный проектор $a_0(x, \xi)$.

Таким образом, получены полные асимптотики для осреднений.

Следствия. (i) *При* $h \to +0$ *имеют место асимптотики:*

$$N(\lambda_1, \lambda_2, h) = \varkappa_0(\lambda_1, \lambda_2) h^{-d} + o(h^{-d}),$$

$$e(x, x, \lambda_1, \lambda_2, h) = \alpha_0(x, \lambda_1, \lambda_2) h^{-d} + o(h^{-d}),$$

*где* $\varkappa_n(\lambda_1, \lambda_2) = \varkappa_n(\lambda_2) - \varkappa_n(\lambda_1)$,

$$\alpha_n(x, \lambda_1, \lambda_2) = \alpha_n(x, \lambda_2) - \alpha_n(x, \lambda_1).$$

(ii) *Если* $\Lambda \cap [\lambda_1, \lambda_2] = \emptyset$, *то* $N(\lambda_1, \lambda_2, h) =$

$= o(1)$ при $h \to +0$ ; если же $Z \cap x \times [\lambda_1, \lambda_2] = \emptyset$ , то $e(x, x, \lambda_1, \lambda_2, h) = O(h^{\infty})$ при $h \to +0$

**Замечание.** В следствии (ii) величины $\lambda_1$ и $\lambda_2$ можно брать равными $\pm\infty$ , поэтому $\lim\limits_{h \to +0} Spec\ A_h = \Lambda$.

**Теорема 0.3.** (i) *Если* $\lambda_1, \lambda_2 \bar{\in} \Lambda_0$ , *то*

$$N(\lambda_1, \lambda_2, h) = \varkappa_0(\lambda_1, \lambda_2) h^{-d} + O(h^{1-d}) \tag{0.7}$$

*при* $h \to +0$.

(ii) *Если* $(x, \lambda_1), (x, \lambda_2) \bar{\in} Z_0$ , *то*

$$e(x, x, \lambda_1, \lambda_2, h) = \alpha_0(x, \lambda_1, \lambda_2) h^{-d} + O(h^{1-d}) \tag{0.8}$$

*при* $h \to +0$.

*Эти асимптотики являются равномерными по* $\lambda_1, \lambda_2 \in Y$, $(x, \lambda_1), (x, \lambda_2) \in Y'$ *, где* $Y$, $Y'$ *- компактные множества, не пересекающиеся с* $\Lambda_0$, $Z_0$ *соответственно.*

Чтобы получить второй член асимптотики, нам потребуется условие глобального характера.

Пусть $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ , $S_\lambda = \{(x, \xi) :$ $\lambda$- собственное значение $a_0(x, \xi)\}$ . Тогда $S_\lambda = \bigcup S_{\lambda, j}$ , где $S_{\lambda, j} = \{(x, \xi) :$ $\sigma_j(x, \xi) = \lambda\}$, $\sigma_1 \leqslant \ldots \leqslant \sigma_D$ - собственные значения $a_0$ .

Пусть $\Sigma_\lambda$ - замкнутое нигде не плотное на $S_\lambda$ множество такое, что на $S_\lambda \setminus \Sigma_\lambda$ величина $\lambda$ является собственным значением постоянной кратности, зависящей, вообще говоря, от компоненты связности $S_\lambda \setminus \Sigma_\lambda$ . Рассмотрим распределение $\mu_\lambda$ :

$$\int \varphi(x, \xi) \mu_\lambda(x, \xi) dx d\xi =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \lambda} \int \varphi(x, \xi) \operatorname{tr} \varepsilon(x, \xi, \lambda) dx d\xi ;$$

при $\lambda \bar{\in} \Lambda_0$ правая часть бесконечно гладко зависит от $\lambda$ . Очевидно, $\mu_\lambda$ - неотрицательное распределение и $\operatorname{supp} \mu_\lambda = S_\lambda$ . Поэтому $\mu_\lambda$ есть внешняя мера на $S_\lambda$ . На $S_{\lambda, j} \setminus \Sigma_\lambda$ она имеет $C^\infty$-плотность $D' dx d\xi / d\sigma_j$ , где $D'$ - кратность $\lambda$ .

**Теорема 0.4.** *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2 \bar{\in} \Lambda_0$ *и для* $\lambda = \lambda_1$ *и* $\lambda = \lambda_2$ *существуют множества* $\mu_\lambda$ *-меры нуль* $M_\lambda \subset S_\lambda$ *такие, что через каждую точку* $S_{\lambda, j} \setminus M_\lambda$ *проходит лежащая в* $S_{\lambda, j} \setminus \Sigma_\lambda$

*бихарактеристика $\sigma_j$, бесконечно длинная в обе стороны и непериодическая. Тогда имеет место асимптотика*

$$N(\lambda_1,\lambda_2,h) = \varkappa_0(\lambda_1,\lambda_2)h^{-d} + \\ + \varkappa_1(\lambda_1,\lambda_2)h^{1-d} + o(h^{1-d}) \tag{0.9}$$

*при* $h \to +0$ .

Замечание. Все эти результаты верны и для сужения оператора $A_h$ на замкнутое подпространство, ортопроектор на которое принадлежит $\mathcal{L}^0(X,E)$.

2. В качестве примера можно рассмотреть оператор Шредингера $A_h = -h^2\Delta + V(x)$ . Тогда асимптотика (0.8) имеет место, если $\lambda$ не есть критическое значение $V(x)$ . Оператор Шредингера был изучен Ж. Шазареном [3,4] методом, с помощью которого можно рассмотреть операторы с собственными значениями главных символов постоянной кратности. Напротив, наш метод позволяет рассмотреть произвольные операторы, а также оператор Шредингера на многообразии с краем [5] . Другие результаты по квазиклассическим спектральным асимптотикам содержатся в [6-8] .

В качестве приложения рассмотрим оператор $A_h = h^{n_1}L(x,D) + h^{n_2}M(x,D)$ , где $L$ - эллиптический самосопряженный положительно определенный дифференциальный оператор порядка $r_1$; $M$ - симметрический дифференциальный оператор порядка $n_2 < n_1$. Тогда $a_0 = \ell + m$, где $\ell, m$ - главные символы $L$ и $M$ соответственно. Возьмем $\lambda_1 = -\infty$, $\lambda_2 = 0$ . Поскольку собственные значения оператора $h^{-n_2}A_h$ монотонно возрастают при увеличении $h \in R^+$ и стремятся к $+\infty$ при $h \to +\infty$ , то $N(-\infty, 0, h) = N(h^{-n})$ , где $N(s)$ - число собственных значений задачи

$$(L + \mu M)u = 0, \tag{0.10}$$

заключенных между $0$ и $s > 0$, $n = n_1 - n_2$ . Поэтому мы можем получить асимптотику $N(s)$ при $s \to +\infty$ . По следствию (i) к теореме 0.2, имеем $N(s) = \varkappa_0 s^{d/n} + o(s^{d/n})$, а по теореме 0.3 п. " i ", получаем

$$N(s) = \varkappa_0 s^{d/n} + O(s^{\frac{d-1}{n}}), \tag{0.11}$$

если $0 \bar{\in} \Lambda_0$

При $\xi \neq 0$, $\lambda = 0$ неравенство (0.1) выполнено для $\nu = \xi \frac{\partial}{\partial \xi}$ ;

при $\xi = 0$ , $\lambda = 0$ и подходящем $\nu$ неравенство (0.1) выполнено в одном из следующих двух случаев:

(i) $n_2 = 1$ , и для любого $x \in X$ существует $\eta$ такое, что $m(x, \eta)$ положительно определена.

(ii) $n_2 = 0$ , и для любого $x \in X$ существует векторное поле $\nu$ на $X$ такое, что

$$\langle (\nu m)(x)\sigma, \sigma \rangle > 0 \qquad \forall \sigma \in \mathrm{Ker}\,(m(x) \setminus 0).$$

Итак, если выполнено (i) или (ii) , то для функции распределения собственных значений задачи (0.10) имеет место асимптотика (0.11) . Наконец, если дополнительно выполнено условие, выражающееся в терминах нулевых бихарактеристик собственных значений $\ell + m$ , то имеет место асимптотика

$$N(s) = \varkappa_0 s^{d/n} + \varkappa_1 s^{\frac{d-1}{n}} + o\left(s^{\frac{d-1}{n}}\right).$$

Примеры, особенно простые при $D = 1$ , мы оставляем рассмотреть читателю.

3. Обсудим метод и план работы. Пусть $u_h(x, y, t)$ - ядро Шварца оператора $e^{ith^{-1}A_h}$ ; тогда $u_h$ - фундаментальное решение задачи Коши для уравнения Шредингера

$$(hD_t - A_h) u_h = 0.$$

В [4-8] решение строится в виде $h$ - осциллирующего интеграла; в связи с этим предполагается, что либо $D = 1$ , либо собственные значения $a_0$ имеют постоянные кратности. Чтобы избежать этого ограничения, мы применяем модифицированный метод [2,9] .

В §1 мы вводим понятие фронта осцилляций, доказываем конечность скорости распространения фронта осциляций $u_h$ и то, что фронт осцилляций $u_h$ распространяется вдоль бихарактеристик собственных значений $a_0$ там, где они имеют постоянные кратности. Там же мы получим результаты о нормальности большой сингулярности. Именно мы покажем, что если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $x \times \mathrm{supp}\,\varphi \cap Z_0 = \emptyset$ , то сингулярность $\sigma_h(x,t) = \varphi(hD_t) u_h(x, x, t)$ при $t = 0$ является изолированной и нормальной ;

это означает, что существуют $s \in R$ и $t_0 > 0$ такие, что

$$h^{|\alpha|+p+2n+s-k} t^k D_x^\alpha D_t^p D_h^n \sigma_h(x,x,t) \in$$

$$\in L_2(X' \times [-t_0, t_0] \times J, \ hom(E))$$

$\forall k, n, p \in N, \alpha \in N^d$; $X'$ - окрестность $x$

Аналогично мы покажем, что если $supp\, \varphi \cap \Lambda_0 = \emptyset$ то сингулярность

$$\sigma_h(t) = \int_X tr\, \sigma_h(x,x,t)\,dx$$

при $t=0$ является изолированной и нормальной.

В § 2 мы применим для построения $u_h$ метод последовательных приближений с замораживанием главной части $A_h$ в $y$ и получим формальный ряд последовательных приближений; на основании этого ряда мы построим формальные ряды для $\sigma_h(x,t)$ и $\sigma_h(t)$; эти ряды оказываются асимптотическими в окрестности $t=0$, если $x \times supp\, \varphi \cap Z_0 = \emptyset$ или $supp\, \varphi \cap \Lambda_0 = \emptyset$ соответственно; на основании результатов о нормальности большой сингулярности мы обосновываем полученные асимптотики. Оказывается, что при этих предположениях $\sigma_h(x,t)$ и $\sigma_h(t)$ в окрестности $t=0$ задаются $h$-осциллирующими интегралами с лагранжевыми многообразиями $\{t=\xi=0\}$, $\{t=0\}$ соответственно.

Хотя в общем случае ряды для $\sigma_h(x,t), \sigma_h(t)$ являются формальными и даже не асимптотическими, полученные на их основе ряды для $\sigma_h(x,0)$, $\sigma_h(0)$ оказываются асимптотическими и не формальными и мы получаем асимптотики (0.2) , (0.3)

В § 3 с помощью тауберовой техники доказываются асимптотики (0.8) , (0.7) на основе асимптотик для $\sigma_h(x,t), \sigma_h(t)$ в окрестности $t=0$ ; для получения асимптотики (0.9) используются дополнительные рассуждения того же типа, что и при доказательстве гипотезы Г. Вейля [9] .

В § 4 доказывается лемма 0.1.

## § 1. Фронт осцилляций. Нормальность большой сингулярности

1. Итак, мы рассматриваем $u_h(x,y,t) \in C^\infty(R \times J, D'(X \times X, Hom(E^h)))$ - ядро Шварца оператора $e^{ith^{-1}A_h}$ ; тогда $u_h$ есть решение задачи

$$P_h u_h \equiv (hD_t - A_h)u_h = 0, \tag{1.1}$$

$$u_h\big|_{t=0} = \delta(x-y). \tag{1.2}$$

Очевидно, если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то $\varphi(hD_t)u_h \in$ $\in C^\infty(X\times X\times \mathbb{R}\times J,\ \mathrm{Hom}(E))$. Из квазиэллиптичности $A_h$, (1.1) и (1.2) вытекает, что если $Q_h \in \mathcal{L}^\mu(X,E)$, $\operatorname{supp} Q_h$ содержится в $\{|\xi|>R\}$ и $R$ достаточно велико, то

$$Q_h\varphi(hD_t)u_h \in h^N C^\infty(X\times X\times \mathbb{R}\times \bar{J},\ \mathrm{Hom}(E))$$
$$\forall N\in \mathbb{N},$$

где $\bar{J} = [0,h_0]$, и что существует $s\in\mathbb{R}$ такое, что

$$h^{|\alpha|+|\beta|+p+2n+s} D_x^\alpha D_y^\beta D_t^p D_h^n \varphi(hD_t)u_h \in$$

$$\in L_2^{loc}(X\times X\times \mathbb{R}\times \bar{J},\ \mathrm{Hom}(E)) \quad \forall \alpha,\beta,p,n.$$

2. Определим фронт осцилляций $w_h \in \mathcal{D}'(X\times J,E)$: $OF(w_h)$ есть подмножество $T^*X$: $\rho \bar{\in} OF(w_h)$, если существует $a_h \in \mathcal{L}^0(X,E)$, эллиптический в $\rho$ и такой, что $a_h w_h \in h^N C^\infty(X\times \bar{J},E)$ $\forall N\in\mathbb{N}$. Очевидно, $OF(w_h)$ есть замкнутое подмножество $T^*X$.

Теорема 1.1. *Если* $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, *то имеют место следующие включения:*

$$OF(\varphi(hD_t)u_h) \subset \{\tau \in \operatorname{supp}\varphi,$$

$$(x,\xi,\tau)\in C_p,\ (y,-\eta,\tau)\in C_p\};\tag{1.3}$$

$$OF(\varphi(hD_t)u_h) \subset \{|x-y|+|\xi+\eta| \leqslant c|t|\},\tag{1.4}$$

$$OF(\varphi(hD_t)u_h^{\pm}) \subset \{\tau \in \operatorname{supp}\varphi,$$

$$(x,\xi,\tau) \in C_p, \ (y,-\eta,\tau) \in C_p, \ \pm t \geqslant 0\} \cup$$

$$\cup \{\tau \in \operatorname{supp}\varphi, \ t=\xi=\eta=0, \ x=y\}; \qquad (1.3')$$

$$OF(\varphi(hD_t)u_h^{\pm}) \subset \{|x-y|+|\xi+\eta| \leqslant \pm Ct\}, \qquad (1.4')$$

где $C_p = \{(x,\xi,\tau), \ \operatorname{Ker}(\tau - a_0(x,\xi)) \neq 0\}$ – $h$-характеристическое множество $P_h$, $u_h^{\pm} = u_h$ при $\pm t \geqslant 0$, $u_h^{\pm} = 0$ при $\pm t < 0$, $C = C\varphi$.

При этом $C$ не зависит от $\varphi$, если $m \leqslant 1$.

Схема доказательства. Включение (1.3) вытекает из (1.1) ; (1.3$'$) вытекает из (1.1) и (1.2) ; отметим, что правые части (1.3) , (1.3$'$) компактны по $\xi$ в силу квазиэллиптичности $A_h$.

Включения же (1.4) и (1.4$'$) отражают конечность скорости распространения фронтов осцилляций для уравнения (системы) (1.1) ; они могут быть доказаны с помощью очевидной модификации доказательства основной теоремы [10] ; их можно вывести также из этой теоремы непосредственно, вводя вспомогательную переменную, двойственную к $h^{-1}$ ; другими словами, $h^{-1}$ и $\tau$ связаны преобразованием Фурье.

Для доказательства теоремы 0.4 нам понадобится следующая хорошо известная

Теорема 1.2. *Пусть* $T^*(X \times R) \supset V$ *- открытое множество и в* $V$ *справедливо* $\det(\tau - a_0(x,\xi)) = e(x,\xi,\tau) \times$ $\times(\tau - \sigma(x,\xi))^2$ *, где* $\tau > 0$ *,* $C^\infty \ni \sigma$ *вещественнозначна,* $C^\infty \ni e \neq 0$ *. Тогда если* $V \supset \gamma$ *- связный отрезок нулевой бихарактеристики* $\tau - \sigma(x,\xi)$ *и* $OF(P_h w_h) \cap \gamma = \phi$ *, то либо* $OF(w_h) \cap \gamma = \phi$ *, либо* $OF(w_h) \supset \gamma$.

3. Следующие утверждения выражают нормальность большой сингулярности:

Теорема 1.3. *Пусть* $(x^*,\xi^*) \in T^*X$ *и* $\lambda^*$ *- собственное значение* $a_0(x^*,\xi^*)$.

(i) *Пусть существует векторное поле* $v$ *на* $T^*_{x^*}X$ *такое, что в точке* $(x^*,\xi^*,\lambda^*)$ *выполнено (0.1) . Тогда если*

$q_h(y, hD_y) \in \mathcal{L}^0(X,E)$, $\operatorname{supp} q_h$ *содержится в достаточно малой окрестности* $(x^*, -\xi^*)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi$ *содержится в достаточно малой окрестности* $\lambda^*$ *и* $0 < t_0$ *достаточно мало, то*

$$h^{|\alpha|+p+2n+s-k}\, t^k D_x^\alpha D_t^p D_h^n\, \Gamma q_h(y, hD_y) \times$$

$$\times \varphi(hD_t) u_h \in L_2(X \times [-t_0, t_0] \times J,\ \mathrm{hom}(E))$$

$$\forall n, p, k \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^d, \tag{1.5}$$

*где* $\Gamma$ *- оператор сужения на диагональ,* $x = y$,

$$\mathrm{hom}(E) = \Gamma \mathrm{Hom}(E), \quad s = s(d).$$

(ii) *Пусть существует векторное поле* $\nu$ *на* $T^*X$ *такое, что в точке* $(x^*, \xi^*, \lambda^*)$ *выполнено* (0.1) *. Тогда если* $q_h$ *и* $t_0$ *такие же, как и выше, то*

$$h^{p+2n+s-k}\, t^k D_t^p D_h^n\, \hat{\Gamma} q_h(y, hD_y) \times$$

$$\times \varphi(hD_t) u_h \in L_2([-t_0, t_0] \times J) \quad \forall n, p, k \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

*где* $\hat{\Gamma} w = \int_X \operatorname{tr} \Gamma w\, dx$, $s = s(d)$.

**Доказательство.** Утверждение (i) доказывается с помощью очевидной модификации доказательства теоремы 1.1 из [2] ; его можно вывести из этой теоремы непосредственно, вводя вспомогательную переменную $z$ , двойственную к $h^{-1}$.

Чтобы доказать (ii) заметим, что (не) справедливость (1.6) (но не (1.5)!) сохраняется, если заменить $u_h$ на ядро Шварца оператора $Q_h e^{ith^{-1}A_h} Q_h^* = e^{ith^{-1}\tilde{A}_h}$ , где $Q_h$ - унитарный эллиптический в $(x^*, \xi^*)$ $h$-интегральный оператор Фурье, и $(x^*, \xi^*)$ заменить на $\chi(x^*, \xi^*)$, где $\chi$- соответствующее каноническое преобразование в $T^*X$ ; отметим, что $\tilde{A}_h = Q_h A_h Q_h^*$ имеет главный символ $a_0 \circ \chi$ . Поэтому (ii) вытекает из (i).

**Следствие 1.4.** (i) *Пусть* $X \supset X'$ *- замкнутое множество и*

$X' \times \operatorname{supp}\varphi \cap Z_0 = \emptyset$ ; *тогда если* $0<t_0$ *достаточно мало, то*

$$h^{|\alpha|+p+2n+s-k} t^k D_x^\alpha D_t^p D_h^n \Gamma \varphi(hD_t) u_h \in$$
$$\in L_2(X' \times [-t_0, t_0] \times J,\ hom(E))$$
$$\forall n, p, k \in N,\ \alpha \in N^d;\quad s = s(d).$$

(ii) *Пусть* $\operatorname{supp}\varphi \cap \Lambda_0 = \emptyset$ ; *тогда если* $0 < t_0$ *достаточно мало, то*

$$h^{p+2n+s-k} t^k D_t^p D_h^n \hat{\Gamma} \varphi(hD_t) u_h \in L_2([-t_0, t_0] \times J)$$
$$\forall n, p, k \in N;\quad s = s(d).$$

## § 2. Вычисление большой сингулярности

1°. Пусть $\bar{A}_h = a_0(y, hD_x)$ - оператор с замороженным в $y$ главным символом[x)], $\bar{P}_h = hD_t - \bar{A}_h$ ; тогда аналогично [2]

$$R_h = A_h - \bar{A}_h = \sum_{j+|\alpha| \leq M-1} h^j (x-y)^\alpha R_{j,\alpha}(y, hD_x) + \tilde{R}_h, \tag{2.1}$$

$$\tilde{R}_h = \sum_{j+|\alpha|=M} h^j (x-y)^\alpha R_{j,\alpha,h}(x, y, hD_x), \tag{2.1'}$$

---

x) Все рассмотрения (микро-) локальны; поэтому можно считать, что $E$ тривиально.

$$\varphi(hD_t)u_h^{\pm} = \mp ih\varphi(hD_t)\sum_{k=0}^{M-1}(\bar{E}_h^{\pm}R_h)^k E_h^{\pm}\delta(x-y)\delta(t) +$$

$$+\varphi(hD_t)(\bar{E}_h^{\pm}R_h)^M u_h^{\pm} \pmod{\mathcal{F}}, \qquad (2.2)$$

$$u_h^{\pm} = \mp ihE_h^{\pm}\delta(x-y)\delta(t), \qquad (2.3)$$

где $\mathcal{F} = \bigcap_N h^N H^{N;0}_{x,y,t;h}$, $\quad E_h^{\pm}, \bar{E}_h^{\pm}$ - параметриксы задач

$$P_h v = f, \qquad v\big|_{\pm t<0} = 0,$$

$$\bar{P}_h v = f, \qquad v\big|_{\pm t<0} = 0$$

соответственно.

Придадим вес $w$ некоторым операторам: $w((x-y)^{\alpha}) = |\alpha|$,

$$w(h^j) = j, \quad w(b_h(x,y,hD_x)) = 0,$$

$$w(E_h^{\pm}) = w(\bar{E}_h^{\pm}) = 0.$$

Подставляя (2.1), (2.3) в (2.2), раскрывая скобки и группируя члены одного веса, получаем

$$\varphi(hD_t)u_h^{\pm} = \varphi(hD_t)(u^{\pm}_{(0)h} + \ldots + u^{\pm}_{(M-1)h} + \tilde{u}^{\pm}_{(M)h})$$

в $\tilde{u}^{\pm}_{(M)h}$ включены все члены веса, не меньшего чем $M$. В частности,

$$u^{\pm}_{(0)h} = \mp ih\bar{E}_h^{\pm}\delta(x-y)\delta(t),$$

$$u^{\pm}_{(1)h} = \mp ih\bar{E}_h^{\pm}\bar{R}_h\bar{E}_h^{\pm}\delta(x-y)\delta(t),$$

где

$$\bar{R}_h = \sum_{j=1}^{d} (x_j - y_j)\, a_{oy_j}(y, hD_x) + ha_1(y, hD_x).$$

Аналогично [2] каждое слагаемое можно преобразовать в сумму слагаемых такого же веса, но не содержащих $(x-y)^\alpha$.

В силу энергетических оценок, $E_h^{\pm}$, $\bar{E}_h^{\mp}$ действуют из $t^{p} H^{s;0}_{x;t,h}$ в $h^{-1} t^{p+1} H^{s;0}_{x;t,h}$ для любых $s \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$. Кроме того, если $v \in H^{s;0}_{x;h}$, то

$$E_h^{\pm} v\delta(t),\quad \bar{E}_h^{\pm} v\delta(t) \in h^{-1} H^{s;0}_{x;t,h}.$$

Поэтому, в силу (1.1),

$$\varphi(hD_t)\, u_h \equiv \varphi(hD_t)\, \bar{q}_h u_h \equiv$$

$$\equiv U_{(0)h} + \ldots + U_{(M-1)h} + \tilde{U}_{(M)h} \;(\mathrm{mod}\ \mathcal{F}),$$

где $\bar{q}_h = \bar{q}_h(x, hD_x, hD_t) \in \mathcal{L}^0(X \times \mathbb{R}, E)$, $\tilde{q}_h \sim I$ в окрестности $C_p \cap \{\tau \in \mathrm{supp}\,\varphi\}$ и $\mathrm{supp}\,\bar{q}_h$ компактен в $T^*X$,

$$U_{(\omega)h} = \bar{q}_h \varphi(hD_t)(u^+_{(\omega)h} + u^-_{(\omega)h}) \in$$

$$\in \sum_{k=0}^{M_\omega} t^k \bigcap_{N \in \mathbb{N}} h^{s+\omega-k-N} H^{N;0}_{x,y,t;h},$$

$s = s(d)$ и аналогично для $\tilde{U}_{(M)h}$.

Поэтому

$$\varphi(hD_t)\, \Gamma u_h \equiv \Gamma U_{(0)h} + \ldots + \Gamma \tilde{U}_{(M)h} \;(\mathrm{mod}\ \mathcal{F}), \tag{2.4}$$

$$\varphi(hD_t)\, \hat{\Gamma} u_h \equiv \hat{\Gamma} U_{(0)h} + \ldots + \hat{\Gamma} \tilde{U}_{(M)h} \;(\mathrm{mod}\ \mathcal{F}), \tag{2.4'}$$

$$\Gamma U_{(\varpi)h} \in \sum_{k=0}^{M_\varpi} t^k \bigcap_{N\in\mathbf{N}} h^{s_1+\varpi-k-N} H^{N;0}_{y,t;h} \;; \tag{2.5}$$

$$\hat{\Gamma} U_{(\varpi)h} \in \sum_{k=0}^{M_\varpi} t^k \bigcap_{N\in\mathbf{N}} h^{s_1+\varpi-k-N} H^{N;0}_{t;h} \;; \tag{2.5'}$$

и аналогично для $\Gamma \tilde{U}_{(M)h}$, $\hat{\Gamma}\tilde{U}_{(M)h}$; $s_j = s_j(d)$.

Ниже мы покажем, что если $X'$ - замкнутое множество, $X' \times \operatorname{supp}\varphi \cap \cap Z_0 = \emptyset$, то при $\varpi < M$ выполняется

$$h^{s_2+2n+N-k} t^k D_h^n \Gamma U_{(\varpi)h} \in$$

$$\in H^{N;0}_{y,t;h}(X' \times [-t_0, t_0] \times J, \operatorname{hom}(E)) \quad \forall N, k \in \mathbf{N}, \tag{2.6}$$

а если $\operatorname{supp}\varphi \cap \Lambda_0 = \emptyset$, то при $\varpi < M$ справедливо

$$h^{s_2+2n+N-k} t^k D_h^n \hat{\Gamma} U_{(\varpi)h} \in$$

$$\in H^{N;0}_{t;h}([-t_0, t_0] \times J) \quad \forall N, k \in \mathbf{N}. \tag{2.6'}$$

Тогда, повторяя с очевидными модификациями соответствующие рассуждения [9] и используя следствие 1.4 (i), (ii), мы получим, что при соответствующих предположениях

$$h^{2n} D_h^n \Gamma \tilde{U}_{(M)h} \in \bigcap_{N\in\mathbf{N}} h^{s_3+\frac{M}{2}-N} \times$$

$$\times H^{N;0}_{y,t;h}(X' \times [-t_0, t_0] \times J, \operatorname{hom}(E)),$$

$$h^{2s} D_h^n \hat{\Gamma} U_{(M)h} \in \bigcap_{N\in\mathbf{N}} h^{s_3+\frac{M}{2}-N} \times$$

$$\times H^{N;0}_{t;h}\,([-t_0,t_0]\times J).$$

2. Вычислим члены разложений (2.4), (2.4′) при $\varpi < M$. Заметим, что они содержат только операторы вида $b(y, hD_x)$ и только параметриксы $\bar{E}^{\pm}_h$. Сделаем $h$-преобразование Фурье по $x \to \xi$ и $h$-преобразование Фурье-Лапласа по $t \to \tau$, $\mp \operatorname{Im}\tau \geq 0$. При этом $\delta(x-y)\delta(t)$ перейдет в $(2\pi h)^{-d} e^{-ih^{-1}\langle y,\xi\rangle}$, операторы $b(y, hD_x)$, $\bar{E}^{\pm}_h$ - в операторы умножения на $b(y,\xi)$, $(\tau - a_0(y,\xi))^{-1}$ соответственно. Поэтому

$$F^h_{x,t\to\xi,\tau}\, u^{\pm}_{(\varpi)h} = \pm h^{\varpi-d} F_{\varpi}(y,\xi,\tau) e^{-ih^{-1}\langle y,\xi\rangle},$$

где $F_{\varpi}(y,\xi,\tau)$ представляют собой произведения в каком-либо порядке $(\tau - a_0(y,\xi))^{-1}$ и $b(y,\xi)$ или суммы таких произведений. В частности,

$$F_0 = -i(2\pi)^{-d-1}(\tau - a_0)^{-1},$$

$$F_1 = (2\pi)^{-d-1}(\tau - a_0)^{-1}\Big\{\sum_{j=1}^{d} a_{0,y_j}\,(\tau - a_0)^{-1}\times$$

$$\times a_{0,\xi_j} - ia_1'\Big\}(\tau - a_0)^{-1}, \quad a_1' = 2a^s - a_1.$$

Следовательно,

$$F^h_{x,t\to\xi,\tau}\left(u^+_{(\varpi)h} + u^-_{(\varpi)h}\right) = h^{\varpi-d} G_{\varpi}(y,\xi,\tau) e^{-ih^{-1}\langle y,\xi\rangle},$$

где $G_{\varpi}(y,\xi,\tau) = F_{\varpi}(y,\xi,\tau - i0) - F_{\varpi}(y,\xi,\tau + i0).$

Так как $F_{\varpi}$ имеет при $\tau \in R$ особенности только степенного типа, то $G_{\varpi}$ - обобщенная функция, причем $\operatorname{supp} G_{\varpi} \subset C_p$.

Поэтому

$$F^h_{x,t\to\xi,\tau} U_{(\varpi)h} = h^{\varpi-d}\varphi(\tau)G_{\varpi}(y,\xi,\tau)e^{-ih^{-1}\langle y,\xi\rangle}.$$

Сделаем обратное $h$-преобразование Фурье по $x$ и положим $x=y$, тогда получим, что

$$F^h_{t\to\tau}\Gamma U_{(\varpi)h} = h^{\varpi-d}\varphi(\tau)\alpha'_{\varpi}(y,\tau),$$

$$F^h_{t\to\tau}\hat{\Gamma} U_{(\varpi)h} = h^{\varpi-d}\varphi(\tau)\varkappa'_{\varpi}(\tau),$$

где

$$\alpha'_{\varpi}(y,\tau) = \int G_{\varpi}(y,\xi,\tau)d\xi, \tag{2.7}$$

$$\varkappa'_{\varpi}(\tau) = \int \operatorname{tr} G_{\varpi}(y,\xi,\tau)dyd\xi . \tag{2.7'}$$

Если $a_0(y,\xi)$ - аналитическая функция и выполнено условие (0.1), то замена $\tau\in R$ в $(\tau-a_0(y,\xi))^{-1}$ на $\tau\mp i0$ эквивалентна замене $(y,\xi)$ на $(y,\xi)\pm i0\nu$. Поэтому если $a_0$ - аналитическая функция и $X'\times Y\cap Z_0 = \emptyset$, то $F_{\varpi}(y,\xi,\tau\mp i0)\in C^{\infty}(X'\times Y, D'(T^*_y X))$, а если $Y\cap\Lambda_0=\emptyset$, то $F_{\varpi}(y,\xi,\tau\mp i0)\in C^{\infty}(Y, D'(T^*X))$, поэтому

$$\operatorname{sing}\operatorname{supp}\alpha'_{\varpi}\subset Z_0, \quad \operatorname{sing}\operatorname{supp}\varkappa'_{\varpi}\subset\Lambda_0. \tag{2.8}$$

Это рассуждение верно и в общем случае, если аналитическое продолжение $a_0(y,\xi)$ заменить почти-аналитическим*).

---

*) Функция $\varphi(z)$, $z\in\Omega\subset C^{\nu}$, называется почти-аналитической, если она удовлетворяет условиям Коши-Римана по модулю функций, имеющих нуль бесконечного порядка на $\Omega\cap R^{\nu}$.

Легко видеть также, что $WF(\alpha_n') \subset \{(y,\lambda,\eta,\ell),\ \ell \neq 0\}$.

Окончательно имеем

$$\Gamma U_{(w)h} = h^{w-d} \Phi_{(w)h}(y,t),$$

$$\hat{\Gamma} U_{(w)h} = h^{w-d} \hat{\Phi}_{(w)h}(t),$$

где

$$\Phi_{(w)h}(y,t) = \int \varphi(\tau) \alpha_w'(y,\tau) e^{ih^{-1}t\tau} d\tau, \tag{2.9}$$

$$\hat{\Phi}_{(w)h}(t) = \int \varphi(\tau) \varkappa_w'(\tau) e^{ih^{-1}t\tau} d\tau. \tag{2.9'}$$

Отсюда и из (2.8) вытекают (2.6), (2.6').

3. Таким образом, доказана

**Теорема 2.1.**(i) *Если* $X'$ *- замкнутое множество,* $X' \times \operatorname{supp}\varphi \cap \cap Z_0 = \emptyset$ *и* $0 < t_0$ *достаточно мало, то на* $X' \times [-t_0, t_0]$ *имеет место асимптотика при* $h \to +0$ *:*

$$\varphi(hD_t)\Gamma u_h \sim \sum_{w=0}^{\infty} h^{w-d} \Phi_{(w)h}(y,t),$$

*где* $\Phi_{(w)h}(y,t)$ *задаются* (2.9), (2.7).

(ii) *Если* $\operatorname{supp}\varphi \cap \Lambda_0 = \emptyset$ *и* $0 < t_0$ *достаточно мало, то на* $[-t_0, t_0]$ *имеет место асимптотика при* $h \to +0$ *:*

$$\varphi(hD_t)\hat{\Gamma} u_h \sim \sum_{w=0}^{\infty} h^{w-d} \hat{\Phi}_{(w)h}(t),$$

*где* $\hat{\Phi}_{(w)h}(t)$ *задаются* (2.9'), (2.7').

**Следствие 2.2.** (i) *Если* $X' \subset X$, $Y \subset R$ *- замкнутые множества,* $X' \times Y \cap Z_0 = \emptyset$ *и* $\chi \in C_0^\infty(R)$ *имеет достаточно малый носитель,* $\chi(t) = 1$ *в окрестности* $t = 0$*, то имеет место асимптотика при* $h \to +0$, $(x,\tau) \in X' \times Y$*:*

$$\int \hat{\chi}(h^{-1}(\tau-h))d_\lambda e(x,x,\lambda_1,\lambda,h) \sim \sum_{w=0}^{\infty} h^{1-d+w} \alpha'_w(x,\tau). \quad (2.10)$$

(ii) *Если* $Y \subset R$ *- замкнутое множество*, $Y \cap \Lambda_0 = \emptyset$ *и* $\chi \in C_0^\infty(R)$ *имеет достаточно малый носитель*, $\chi(t)=1$ *в окрестности* $t=0$ *, то имеет место асимптотика при* $h \to +0$, $\tau \in Y$:

$$\int \hat{\chi}(h^{-1}(\tau-\lambda))d_\lambda N(\lambda_1,\lambda,h) \sim \sum_{w=0}^{\infty} h^{1-d+w} \varkappa'_w(\tau). \quad (2.10')$$

Замечание 2.3. (i) *Пусть* $\varkappa_w(\tau)$, $\alpha_w(\cdot,\tau)$ *- первообразные* $\varkappa'_w(\tau)$, $\alpha'_w(\cdot,\tau)$ *; тогда* $\varkappa_0, \varkappa_1, \alpha_0$ *задаются формулами (0.4 )- (0.6 ).*

(ii) *Разложения (2.10) ,(2.10') имеют место и для*

$\varphi(hD_t)\Gamma q_h u_h, \varphi(hD_t)\hat{\Gamma} q_h u_h$ *, где* $q_h \in \mathcal{L}^0(X,E)$;

*при этом*

$$\varkappa'_0(\tau) = (2\pi)^{-d}\frac{\partial}{\partial\tau}\int tr\, q_0(x,\xi)\mathcal{E}(x,\xi,\tau)dxd\xi .$$

На основе следствия 2.2 и замечания 2.3 мы докажем в следующем параграфе теоремы 0.3, 0.4.

4. Рассмотрим снова (2.4) ,(2.4') без каких-либо предположений относительно $supp\,\varphi$ и $x \in X$ . Следя более внимательно при выводе (2.4 ), (2.4') за гладкостью по $h$ , мы получим, что включения (2.5) , (2.5') имеют место и для

$$h^{2n}D_h^n \Gamma U_{(w)h}, \; h^{2n}D_h^n \hat{\Gamma} U_{(w)h},$$

$$h^{2n}D_h^n \Gamma \tilde{U}_{(M)h}, \; h^{2n}D_h^n \hat{\Gamma} \tilde{U}_{(M)h}.$$

Тогда, положив в (2.4), (2.4') $t=0$, мы сразу же получим асимптотики (0.3), (0.2). Теорема 0.2 доказана.

## § 3. Доказательство теорем 0.3, 0.4

Для доказательства теорем 0.3, 0.4 нам понадобится модифицированная усиленная тауберова теорема Хермандера, которая доказывается почти дословным повторением доказательства тауберовой теоремы Хермандера [11, с.158-160]; формулировку усиленной тауберовой теоремы Хермандера см. в [9].

Теорема 3.1. *Пусть* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\chi \subseteq [-1,1]$, $\chi(0)=1$, $\chi'(0)=0$, $\chi_T(t) = \chi(t/T)$. *Пусть* $\nu(\lambda,h)$ *- монотонно неубывающая по* $\lambda\in\mathbb{R}$ *функция,* $h\in \mathcal{J} = (0,h_0]$, *причем*

$$|\nu(\lambda,h)| < ch^{-M}(1+|\lambda|)^M. \tag{3.1}$$

*Тогда если при* $h\to+0$ *имеет место*

$$\int \hat{\chi}_T(h^{-1}(\tau-\lambda))d_\lambda \nu(\lambda,h) = \varkappa_0'(\tau)h^{1-d} + \varkappa_1'(\tau)h^{2-d} + o(h^{2-d}) \tag{3.2}$$

*равномерно по* $\lambda\in[\lambda_1^*,\lambda_2^*]$ *и* $\varkappa_j'\in C^{1-j}([\lambda_1^*,\lambda_2^*])$, *то при* $h\to+0$ *справедливо*

$$|\nu(\lambda_2,h)-\nu(\lambda_1,h)-\varkappa_0(\lambda_1,\lambda_2)h^{-d}-\varkappa_1(\lambda_1,\lambda_2)h^{1-d}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{T}\sup_{\lambda\in[\lambda_1^*,\lambda_2^*]}\varkappa_0'(\lambda)h^{1-d} + o(h^{1-d}) \tag{3.3}$$

*для всех* $\lambda_1,\lambda_2\in(\lambda_1^*,\lambda_2^*)$ *равномерно на каждом компактном подынтервале* $(\lambda_1^*,\lambda_2^*)$, *где*

$$\varkappa_j(\lambda_1,\lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\varkappa_j'(\lambda)d\lambda,$$

*а* $C$ *зависит только от* $\chi$.

*При этом если* (3.1), (3.2) *выполнялись равномерно относительно какого-либо дополнительного параметра, то и* (3.3) *выполняются также равномерно относительно этого параметра.*

2. Доказательство теоремы 0.3. Мы докажем утверждение (i), а (ii) доказывается аналогично.

Пусть $\nu(\lambda,h)=N(\lambda_1,\lambda,h)$. Тогда (3.1) выполняется при подходящем $M$ в силу квазиэллиптичности, а (3.2) выполняется при $\lambda\bar{\in}\Lambda_0$ в силу следствия (2.2) (ii). Тогда ввиду теоремы 3.1 имеет место асимптотика (0.7), если $[\lambda_1,\lambda_2]\cap\Lambda_0=\emptyset$.

Пусть теперь $\lambda_1,\lambda_2\bar{\in}\Lambda_0$, то $[\lambda_1,\lambda_2]\cap\Lambda_0\neq\emptyset$; пусть $\varphi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеют связные не пересекающиеся с $\Lambda_0$ носители, $\varphi_j=1$ в окрестности $\lambda_j$, $j=1,2$. Тогда в силу заключения первой части доказательства получаем, что

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\varphi_j(\lambda)d_\lambda N(\lambda_1,\lambda,h)=$$

$$=h^{-d}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\varphi_j(\lambda)\,\text{æ}_0'(\lambda)d\lambda+O(h^{1-d})\qquad(j=1,2);$$

в силу теоремы 0.2 такая же асимптотика имеет место при $j=3$, где $\varphi_3=1-\varphi_1-\varphi_2$. Складывая эти три асимптотики, мы получим (0.7).

Доказательство теоремы 0.4. Фиксируем произвольное $T>0$. Пусть $M_{j,T}$ - подмножество $S_{\lambda_2,j}$, состоящее из точек, через которые нельзя провести лежащую в $S_{\lambda_2,j}\setminus\sum_{\lambda_2}$ незамкнутую бихарактеристику $\sigma_j$ длины $T$ в сторону возрастания или убывания $t$; $M_T=\bigcup M_{j,T}$; $M_T$ - замкнутое множество и, по предположению, оно имеет $\mu_{\lambda_2}$ - меру нуль.

Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно ввести $q_{jh}\in\mathcal{L}^0(X,E)$ такие, что $q_{2h}\sim 0$ в окрестности

$$M_T\,,\quad \mu_{\lambda_2}(\operatorname{supp}q_{1h}\cap S_{\lambda_2})<\varepsilon$$

$$q_{1h}^*q_{1h}+q_{2h}^*q_{2h}\sim I\,.$$

Пусть

$$\nu^j(\lambda,h)=\Theta\sum_k|q_{jh}\psi_{hk}|^2,$$

где $\psi_{hk}$ - ортонормированные собственные функции $A_h$, $\Theta=-1$ и суммирование ведется по собственным функциям, отвечающим собственным значениям, принадлежащим интервалу $[\lambda,\lambda_2)$ при $\lambda\le\lambda_2$, $\Theta=1$, и суммирование ведется по собственным функциям, отвечающим собственным значениям, принадлежащим интервалу $[\lambda_2,\lambda)$ при $\lambda\ge\lambda_2$; тогда

$$\nu^1(\lambda, h) + \nu^2(\lambda, h) = N(\lambda_2, \lambda, h) + O(1) \tag{3.4}$$

при $h \to +0$ равномерно на каждом компактном интервале.

Введем

$$\sigma_h^j(t) = \int e^{ih^{-1}\lambda t} \varphi(\lambda) d_\lambda \nu^j(\lambda, h),$$

где $\varphi \in C_0^\infty(R)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset (\lambda_2 - 4\delta, \lambda_2 + 4\delta)$, $\varphi = 1$ на $(\lambda_2 - 3\delta, \lambda_2 + 3\delta)$, $0 < \delta$, . достаточно мало.

Тогда, в силу замечания 2.3,

$$\int \hat{\chi}_{t_0} (h^{-1}(\tau - \lambda)) d_\lambda \nu^j(\lambda, h) =$$
$$= \varkappa_0^{j'}(\tau) h^{1-d} + \varkappa_1^{j'}(\tau) h^{2-d} + o(h^{2-d}) \tag{3.5}$$

при $h \to +0$ равномерно по $\tau \in (\lambda_2 - 2\delta, \lambda_2 + 2\delta)$

Поэтому, в силу теоремы 3.1,

$$|\nu^j(\lambda, h) - \varkappa_0^j(\lambda_2, \lambda) h^{-d} - \varkappa_1^j(\lambda_2, \lambda) h^{1-d}| \leq$$
$$\leq \frac{C}{t_0} \sup_{\lambda' \in [\lambda_2 - 2\delta, \lambda_2 + 2\delta]} \varkappa_0^{j'}(\lambda') h^{1-d} + o(h^{1-d}) \tag{3.6}$$

при $h \to +0$ равномерно по $\lambda \in [\lambda_2 - \delta, \lambda_2]$.

Мы можем вычислить $OF(\sigma_h^j(t))$ тем же точно способом, что и $WF(\sigma(t))$ в теории классических асимптотик [12] ; тогда, в силу теоремы 1.2 и определения $q_{2h}$

$$OF(\sigma_h^2(t)) \cap \{-T_1 \leq t \leq T_1\} \subset \{t = 0\},$$

если $T_1 < T$ и $\delta$ достаточно мало. Поэтому в (3.5) и (3.6) с $j=2$ величину $t_0$ можно заменить на $T_1$ . Поскольку $\varkappa_0^{j'}(\lambda)$ бесконечно гладки по $\lambda$ и $\varkappa_0^{1'}(\lambda_2) \leq \mu_{\lambda_2}(\operatorname{supp} q_{1h} \cap S_{\lambda_2}) < \varepsilon$,

$\varkappa_0^{2'}(\lambda_2) \leq \mu_{\lambda_2}(S_{\lambda_2})$ , то при достаточно малом $\delta$, в силу (3.4) , получаем, что

$$|N(\lambda, \lambda_2, h) - \varkappa_0(\lambda, \lambda_2) h^{-d} - \varkappa_1(\lambda, \lambda_2) h^{1-d}| \leq$$
$$\leq C\left(\frac{C_1}{T} + \frac{\varepsilon}{t_0}\right) h^{1-d} + o(h^{1-d})$$

при $h \to +0$ равномерно по $\lambda \in [\lambda_2 - \delta, \lambda_2]$, где $C, C_1$ от $T_1$ и $\varepsilon$ не зависят, $T_1$ и $\varepsilon$ произвольны.

Итак, для любого $\theta > 0$ существует $\delta = \delta(\theta) > 0$ такое, что

$$|N(\lambda, \lambda_2, h) - \varkappa_0(\lambda, \lambda_2) h^{-d} - \varkappa_1(\lambda, \lambda_2) h^{1-d}| \leq$$

$$\leq \theta h^{1-d} + o(h^{1-d})$$

при $h \to +0$ равномерно по $\lambda \in [\lambda_2 - \delta, \lambda_2]$.

Поэтому если $\varphi_2 \in C_0^\infty(R)$, $\operatorname{supp} \varphi_2 \subset [\lambda_2 - \delta, \lambda_2 + \delta]$, $\varphi_2$ монотонно не убывает на $[\lambda_2 - \delta, \lambda_2]$ и $\varphi_2 = 1$ в окрестности $\lambda_2$, то

$$\left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi_2(\lambda) d_\lambda N(\lambda_1, \lambda, h) - \right.$$

$$\left. - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi_2(\lambda)(h^{-d} \varkappa_0'(\lambda) + h^{1-d} \varkappa_1'(\lambda)) d\lambda \right| \leq \theta h^{1-d} + o(h^{1-d}).$$

Аналогично выводится такая же асимптотика для $\varphi_1 \in C_0^\infty(R)$, $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset [\lambda_1 - \delta, \lambda_1 + \delta]$, $\varphi_1$ монотонно не возрастает на $[\lambda_1, \lambda_1 + \delta]$, $\varphi_1 = 1$ в окрестности $\lambda_1$. Наконец, такая же асимптотика с $\theta = 0$, в силу теоремы 0.2, имеет место и для $\varphi_3 = 1 - \varphi_1 - \varphi_2$. Складывая эти три асимптотики, получаем, что

$$|N(\lambda_1, \lambda_2, h) - \varkappa_0(\lambda_1, \lambda_2) h^{-d} - \varkappa_1(\lambda_1, \lambda_2) h^{1-d}| \leq$$

$$\leq 2\theta h^{1-d} + o(h^{1-d});$$

откуда ввиду произвольности $\theta$ вытекает ( 0.9 ) .

Замечание. Очевидно, множество $Y$, состоящее из $\lambda \in \Lambda_0$, удовлетворяющих условиям теоремы 0.4, есть $G_\delta$ -множество. Легко показать, что асимптотика ( 0.9 ) равномерна на каждом замкнутом интервале, содержащемся в $Y$

## § 4. Доказательство леммы 0.1

Лемма 0.1 вытекает из следующего утверждения:

Лемма 4.1. *Пусть* $X$ *- область в* $R^d$, $a(x)$ *- гладкая эрмитова* $D \times D$ *-матрица,* $Z = \{(x, \lambda) :$ $\lambda$ *- собственное значение* $a(x)$ *и не существует векторного поля* $v$ *на* $X$ *такого, что*

$$<(\nabla a)(x)v, v> > 0 \quad \forall v \in \operatorname{Ker}(a(x)-\lambda)\setminus 0 .$$

*Тогда* $\operatorname{mes}\{\lambda, \exists x : (x,\lambda)\in Z\} = 0$.

Доказательство. Пусть $Y_s = \{(x,\lambda) : \operatorname{rank}(a(x)-\lambda) \le D-s$ ; нам нужно показать, что при всех $s$

$$\operatorname{mes}\{\lambda, \exists x : (x,\lambda)\in (Y_s \setminus Y_{s+1})\cap Z\} = 0.$$

Нам достаточно рассмотреть $s = D$. Действительно, существуют не более чем счетное открытое покрытие $X_\alpha \times J_\alpha \subset X \times R$ множества $Y_s \setminus$ $\setminus Y_{s+1}$ и унитарные гладкие $D\times D$ -матрицы $q_\alpha(x)$ такие, что при $(x,\lambda)\in X_\alpha \times J_\alpha$ справедливо

$$q_\alpha^{-1}(x)a(x)q_\alpha(x) = \begin{pmatrix} a'_\alpha(x) & 0 \\ 0 & a''_\alpha(x) \end{pmatrix},$$

$a'_\alpha(x)$, $a''_\alpha(x)$ имеют размерности $s\times s$ и $(D-s)\times(D-s)$ соответственно, $\operatorname{Ker}(a''_\alpha(x)-\lambda) = 0$. Поэтому общий случай сводится к случаю $s = D$.

Пусть $\sigma(x) = \frac{1}{D}\operatorname{tr} a(x)$, $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_p(x)$ - как-либо пронумерованные элементы матрицы $a(x) - \sigma(x)I$, $p = D^2$; тогда

$$Z\cap Y_D \subseteq \{(x,\lambda) : \lambda = \sigma(x),\ \alpha_1(x) = \ldots = \alpha_p(x) = 0$$

и $d\sigma(x)$ есть линейная комбинация $d\alpha_1(x), \ldots, d\alpha_p(x)\} \subset \bigcup_{\mathcal{K}} Z_{\mathcal{K}}$, где объединение берется по всем $\mathcal{K} \subset \{1, \ldots, p\}$,

$$Z_{\mathcal{K}} = \{(x,\lambda) : \lambda = \sigma(x),\ \alpha_j(x) = 0 \quad \forall j \in \mathcal{K},$$

$d\alpha_j(x)$ $(j\in\mathcal{K})$ линейно-независимы и $d\sigma(x)$ есть их линейная комбинация $\}$. Однако, по теореме Сарда, мера

$$\operatorname{mes}\{\lambda, \exists x : (x,\lambda)\in Z_{\mathcal{K}}\} = 0.$$

## Литература


1. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.- М.: Наука, 1976.- 296 с.
2. Иврий В.Я. О точных спектральных асимптотиках для эллиптических операторов, действующих в расслоениях.- Функцион. анализ и его прил., 1982, т.16, № 2, с.30-38.
3. Chazarain J. Spectre d'un Hamiltonien quantique et mécanique classique.- Comm.Part.Different.Equat., 1980, v.5, No 6, p. 595-644.
4. Chazarain J. Sur le comportement semiclassique du spectre et de l'amplitude se la diffusion d'un Hamiltonien quantique. - Singularities in Boundary Value Problems, Proc. NATO Adv. Study Inst., Marateo, 1980, Dordrecht, 1981, p. 1-18.
5. Иврий В.Я. О квазиклассической спектральной асимптотике для оператора Шредингера на многообразиях с краем и для $h$-псевдодифференциальных операторов, действующих в расслоениях.- Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 1, с.14-18.
6. Фейгин В.И. Асимптотическое распределение собственных чисел и формула типа Бора-Зоммерфельда.- Матем. сб., 1979, т.110, № 1, с.68-87.
7. Helffer B., Robert D. Comportement semiclassique su spectre des Hamiltonienes quantiques élliptiques. - Ann.Inst.Fourier, 1981, t.31, p. 169-223.
8. Левендорский С.З. Асимптотическое распределение собственных значений.- Изв. АН СССР, серия мат., 1982, т.46, № 4, с.810-852.
9. Иврий В.Я. О втором члене спектральной асимптотики для оператора Лапласа-Бельтрами на многообразиях с краем.- Функцион. анализ и его прил., 1980, т.14, № 2, с.25-34.
10. Иврий В.Я. Волновые фронты решений симметрических псевдодифференциальных систем.- Сиб.мат.журн., 1979, т.20, № 3, с.557-578.
11. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.- М.: Наука, 1978.- 279 с.
12. Duistermaat J.J., Guillemin V. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. - Invent.Math., 1975, v. 29, p.39-79.