УДК 517.956

ВЕСОВЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

А.Д. Баев, В.П. Глушко (Воронеж)

В настоящей работе авторы продолжают развитие и совершенствование метода исследования эллиптических уравнений с вырождением, основанного на систематическом использовании специального класса весовых псевдодифференциальных операторов (в.п.д.о.). Идея этого метода изложена в [1].

Вопросы коэрцитивной разрешимости общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений начали разрабатывать В.П. Глушко [2] (для уравнений второго порядка), М.И. Вишик и В.В. Грушин [3] (для уравнений высокого порядка при "степенном" характере вырождения). Предлагаемый нами подход позволяет исследовать вырождающиеся эллиптические операторы при произвольно "сильном" характере вырождения.

Вместе с тем существенным моментом используемого метода является возможность перехода от рассмотрения граничных условий общего вида к однородным граничным условиям Дирихле. Поясним сказанное на примере априорных оценок решений общих краевых задач, доказательству которых в основном и посвящена настоящая работа. Введение специального (вообще говоря, псевдодифференциального) оператора Q позволяет установить коэрцитивную оценку снизу на форму $Re(A\omega, Q\omega)$, где A - исходный вырождающийся эллиптический оператор, а функции ω удовлетворяют однородным условиям Дирихле на границе вырождения. На возможность применения "разделяющего" оператора для доказательства априорных оценок в эллиптических задачах обратил наше внимание Л.Р. Волевич.

Из оценки формы $Re(Aw, Qw)$ выводится оценка нормы старшей весовой производной $D^{2m}_{\alpha,t}$, входящей в оператор A. После этого оценка норм остальных производных, входящих в оператор A, на функциях, удовлетворяющих граничным условиям общего вида, может быть сведена к получению соответствующих хорошо известных [16] оценок для решений регулярных квазиэллиптических уравнений. Отметим, что по своей роли оператор Q аналогичен известному "разделяющему" оператору Лере-Сакамото (см. [4]).

В отличие от [5] , мы отказываемся здесь от условия аналитической продолжимости по параметру корней характеристического уравнения с сохранением определенного рода оценок в области аналитичности. Это условие заменяется более простым и во многих случаях легко проверяемым условием 3 (см. ниже), которое может рассматриваться как обобщение известного условия С. Агмона [6] для эллиптических операторов с параметром.

Для доказательства теоремы разрешимости (см. ниже теорему 2) используется метод, предложенный в [7] для оператора A, представляющего суперпозицию вырождающихся эллиптических операторов второго порядка. Сформулированные в приводимых ниже теоремах 3-10 свойства в.п.д.о. позволяют реализовать этот метод и в рассмотренном здесь случае. Подробное доказательство этого утверждения имеется в [8] . Отметим также, что доказательства сформулированных ниже теорем 3-5 изложены в [9].

Мы используем также утверждения о коэрцитивной разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений (теоремы 7-8). Объем работы не позволил нам привести здесь полное доказательство этих утверждений. Авторы надеются изложить доказательства теорем 7 и 8 в одной из своих последующих работ. Следует лишь отметить, что в случае, когда символ $\lambda_{\pm}(\xi,\eta)$ соответствующего в.п.д.о. есть многочлен степени $2m$ $(m \geq 1)$, аналоги теорем 7 и 8 установлены в [10] и [11] , а в случае, когда функция $\lambda_{\pm}(\xi,\eta)$ аналитически продолжима в полуплоскость $\Im m\,\eta \geq 0$, - в [8] .

1. Основные определения, утверждения и предварительные результаты

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R_1^+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ для $t \geq d$ при некотором

$d>0$. Следуя [12] , введем интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t)\exp\left(i\eta\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}\ , \tag{1.1}$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t)\in C_0^\infty(R_1^+)$.

Преобразование (1.1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau,\quad \eta\in R_1\ ,$$

равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{1.2}$$

где $u_\alpha(\tau)=\sqrt{\alpha(t)}\ u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t=\varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)=\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R_1)} = \sqrt{2\pi}\ \|u\|_{L_2(R_1^+)}\ , \tag{1.3}$$

что дает возможность расширить его до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм $L_2(R_1)$ и $L_2(R_1^+)$. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R_1)$ на $L_2(R_1^+)$, будем обозначать через F_α^{-1} . В [13] показано, что преобразование F_α^{-1} может быть записано в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}\ F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}\ ,\ t>0, \tag{1.4}$$

для $w(\eta)\in L_2(R_1)$.

Легко показать, что на функциях $u(t)\in C_0^\infty(R_1)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}\,u(t)](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\quad j=1,2,\dots\ ,$$

где $D_{\alpha,t} = \sqrt{-\alpha(t)}\ \partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t=\frac{\partial}{\partial t}$.

Введем в рассмотрение функциональные пространства $H_{s,\alpha}(R_n^+), H_{s,\alpha,q}(R_n^+)$.

Пусть $\alpha(t)\in C^{N+2}(R_1)$ $(N\geq 1)$. Следуя [13], обозначим через $S^N(R_n)$ $(N\geq 1)$ пространство основных функций $\psi(\tau,x)$, $(\tau,x)\in R_n$, имеющих производные $D_\tau^\ell D_x^\nu\psi$ при $\ell\leq N+2$ и любом $|\nu|\geq 0$, причем при любых ρ конечны нормы

$$\|\psi\|_{N,\rho}=\sup_{(\tau,x)\in R_n}(1+|x|)^\rho(1+|\tau|)^{N+2}\left\{\sum_{\substack{|\nu|\leq\rho\\ \ell\leq N+2}}|D_\tau^\ell D_x^\nu\psi(\tau,x)|\right\}.$$

Через $S_\alpha^N(R_n^+)$ обозначим пространство функций $\varphi(t,x)$, для которых функции $\psi(\tau,x)=\varphi_\alpha(\tau,x)=\sqrt{\alpha(t)}\,\varphi(t,x)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$ принадлежат $S^N(R_n)$. Нормы в $S_\alpha^N(R_n^+)$ определяются формулой $\|\varphi\|^+_{N,\rho,\alpha}=\|\varphi_\alpha\|_{N,\rho}$. Множество всех линейных непрерывных функционалов над $S^N(R_n)$ обозначается $S'^N(R_n)$. Будем говорить, что функционал f принадлежит $S'^N_\alpha(R_n^+)$, если существует функционал $f_\alpha\in S'^N(R_n)$ такой, что для любой $\varphi\in S_\alpha^N(R_n^+)$ имеет место

$$(f,\varphi)^+=(f_\alpha,\varphi_\alpha).$$

Определим далее преобразования F_α на $S'^N_\alpha(R_n^+)$ и F_α^{-1} на $S'^N(R_n)$ по формулам

$$(F_\alpha[f],\varphi)=(f,F_\alpha^{-1}[\varphi])^+,$$

$$(F_\alpha^{-1}[f],\varphi)^+=(f,F_\alpha[\varphi]).$$

Легко проверить, что $F_\alpha F_\alpha^{-1}=I$, $F_\alpha^{-1}F_\alpha=I_+$.

Определение 1. Функция $v(x,t)\in S'^N_\alpha(R_n^+)$ принадлежит пространству $H_{s,\alpha}(R_n^+)$ при $|s|\leq N$, если конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha}=\left\{\int_{R_n}(1+|\xi|^2+\eta^2)^s\,|F_{x\to\xi}F_\alpha[v]|^2d\xi d\eta\right\}^{\frac12}.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R_n^+)$ $(s\geq 0,q>1)$ состоит из всех функций $v(x,t)\in H_{s,\alpha}(R_n^+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q}=\left\{\sum_{\ell=0}^{[s/q]}\|F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}|(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac12(s-q\ell)}F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_t^\ell v]|\|^2\right\}^{\frac12}.$$

Здесь и в дальнейшем обозначаем $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_2(R_n^+)}$.

Определение 3. Пространство $H_s(R_{n-1})$ (s - действительное) состоит из всех функций $g(x)\in S'(R_{n-1})$, для которых конечна норма

$$\ll g \gg_s = \|(1+|\xi|^2)^{s/2} F_{x\to\xi}[g]\|_{L_2(R_{n-1})}.$$

Пусть выполнено следующее

Условие 1. Существует число $\nu\in(0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)|<\infty$ при всех $t\in[0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t)\in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1\geq 2N-|\sigma|$, где $N\geq\max\limits_{0\leq p\leq\ell}\left\{2p+\frac{\ell-p+\frac{3}{2}}{\nu}+1,\ \sigma+1,\ \sigma+\frac{\ell}{2}\right\}$, $\ell=1,2,\ldots$, σ - действительные заданные числа.

Рассмотрим в R_n^+ линейное дифференциальное уравнение вида

$$A(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t) \equiv \sum_{|\tau|+j+q\ell\leq 2m} a_{\tau j\ell} D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j}\partial_t^{\ell} v(x,t)=\mathcal{F}(x,t), \quad (1.5)$$

где функция $\alpha(t)$ и операции $D_{\alpha,t}$, ∂_t определены выше, $D_x^{\tau}=(-i)^{\frac{|\tau|}{2}}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}\ldots\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$, $a_{\tau j\ell}$ - комплексные числа, $a_{00k}\neq 0$, $q=\frac{2m}{k}>1$ (m,k - натуральные числа). Без ограничения общности будем считать в дальнейшем, что $a_{00k}=1$.

На границе $t=0$ полупространства R_n^+ заданы условия общего вида

$$B_j(D_x,\partial_t)v\big|_{t=0} = \sum_{|\tau|+q\ell\leq m_j} b_{\tau\ell j} D_x^{\tau}\partial_t^{\ell} v\big|_{t=0}=g_j(x),\ j=1,2,\ldots,\mu, \quad (1.6)$$

где число μ определяется (см. ниже) свойствами многочлена $A(\xi,\eta,z)$; $b_{\tau\ell j}$ - комплексные числа.

Условие 1'. Выполнено условие 1 при $\sigma=s+q$, $\ell=1,2,\ldots,[s/q]$, где $q>1$, $s\geq 0$ - действительные числа.

Условие 2. Уравнение

$$A_0(\xi,\eta,z)\equiv\sum_{|\tau|+j+q\ell=2m} a_{\tau j\ell}\,\xi^{\tau}\eta^{j}z^{\ell}=0 \quad (1.7)$$

не имеет z-корней, лежащих на мнимой оси при всех $(\xi,\eta)\in R_n$, $|\xi|+|\eta|>0$, причем эти корни бесконечно дифференцируемы по переменной η при $\xi\neq 0$.

Заметим, что если z-корни уравнения (1.7) простые, то они принадлежат $C^\infty(R_1)$ по переменной η при всех $\xi \in R_{n-1}$, $\xi \neq 0$.

Пусть $z_1(\xi,\eta)$, $z_2(\xi,\eta), \dots, z_\tau(\xi,\eta)$, $0 \leq \tau \leq K$, - корни уравнения (1.7), лежащие в левой полуплоскости. Остальные $(K-\tau)$ корней $z_{\tau+1}(\xi,\eta), \dots$ $\dots, z_K(\xi,\eta)$ лежат в правой полуплоскости. Функции $z_i(\xi,\eta)$ являются однородными функциями от ξ и η степени q и, следовательно, удовлетворяют следующим неравенствам при $|\xi|+|\eta|>0$:

$$|\partial_\eta^j z_i(\xi,\eta)| \leq C_1(|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(q-j)}, \quad i=1,2,\dots,K, \quad j=0,1,2,\dots \tag{1.8}$$

Кроме того, из условия 2 вытекает, что

$$\begin{aligned} Re\, z_i(\xi,\eta) &\geq C_2(|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}q}, \quad i=\tau+1,\tau+2,\dots,K, \\ -Re\, z_i(\xi,\eta) &\geq C_3(|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}q}, \quad i=1,2,\dots,\tau. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Постоянные $C_\ell>0$, $\ell=1,2,3$, не зависят от $(\xi,\eta)\in R_n$.

Условие 3. Существует многочлен

$$A'(\xi_0,\xi,\eta,z) = \sum_{\tau_0+|\tau|+j+q\ell=2m,\ \tau_0\geq 1} a'_{\tau_0\tau j\ell}\, \xi_0^{\tau_0}\xi^\tau \eta^j z^\ell$$

такой, что многочлен по переменным $(\check{\xi},\eta)=(\xi_0,\xi,\eta)\in R_{n+1}$

$$\check{A}(\check{\xi},\eta,z) = A_0(\xi,\eta,z)+A'(\xi_0,\xi,\eta,z)$$

удовлетворяет условию 2 (с заменой ξ на $\check{\xi}$).

Очевидно, что корни $\check{z}_i(\check{\xi},\eta)$, $i=1,2,\dots,K$, уравнения

$$\check{A}(\check{\xi},\eta,z)=0$$

удовлетворяют оценкам (1.8), (1.9) с заменой $\xi\in R_{n-1}$ на $\check{\xi}\in R_n$.

В частности, если $A'(\xi_0,\xi,\eta,z)=(\xi_0)^{2m}e^{i\theta}$, $0<\theta<2\pi$, то условие 3 совпадает с известным условием, возникающим в параболических задачах (см. [6]).

Условие 4. Число μ граничных условий (1.6) равно числу z - корней уравнения (1.7), лежащих в левой полуплоскости, и при всех $\xi\in R_{n-1}$, $|\xi|>0$ многочлены $\overset{o}{B}_i(\xi,z) = \sum_{|\tau|+q\ell=m_i} b_{\tau\ell i}\xi^\tau z^\ell$, $i=1,2,\dots,\tau$, линейно-независимы по модулю многочлена $P(\xi,z)=\prod_{i=1}^{\tau}(z-z_i(\xi,0))$.

Сформулируем основные утверждения работы.

Теорема 1. *Пусть* $s \geq \max\{2m, \max\limits_{1\leq j\leq r} m_j + q$ *- действительное число и выполнены условия* 1', 2 - 4. *Тогда для любого решения* $v(x,t)\in H_{s,\alpha,q}(R_n^+)$ *задачи* (1.5)-(1.6) *справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{s,\alpha,q} \leq C_4\left(\|\mathcal{F}\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum_{i=1}^{r} \ll \mathcal{G}_i \gg_{s-m_i-\frac{1}{2}q} + \|v\|_{s-1,\alpha,q}\right) \qquad (1.10)$$

с постоянной $C_4 > 0$, *не зависящей от* $v, \mathcal{F}, \vec{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_r)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует правый регуляризатор задачи* (1.5)-(1.6), *т.е. такой оператор*

$$R : H_{s-2m,\alpha,q}(R_n^+) \times \prod_{j=1}^{r} H_{s-m_j-\frac{1}{2}q}(R_{n-1}) \longrightarrow H_{s,\alpha,q}(R_n^+),$$

что

$$\mathfrak{A} R_v = \{\mathcal{F}, \vec{\mathcal{G}}\} + T\{\mathcal{F}, \vec{\mathcal{G}}\},$$

где $\mathfrak{A}$ *- оператор, порожденный задачей* (1.5)-(1.6):

$$\mathfrak{A} : H_{s,\alpha,q}(R_n^+) \longrightarrow H_{s-2m,\alpha,q}(R_n^+) \times \prod_{j=1}^{r} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R_{n-1}),$$

а оператор T *является ограниченным оператором из*

$$H_{s-2m,\alpha,q}(R_n^+) \times \prod_{j=1}^{r} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R_{n-1}) \text{ в } H_{s-2m+1,\alpha,q}(R_n^+) \times \prod_{j=1}^{r} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j+1}(R_{n-1}).$$

Как известно (см., например, [2]), при выполнении оценки (1.10) правый регуляризатор задачи (1.5)-(1.6) является одновременно и левым регуляризатором.

В настоящей работе систематически используется специальный класс в.п.д.о. Свойства таких п.д.о. изучались в [9] . Приведем без доказательства необходимые для дальнейшего утверждения.

Определим с помощью интегрального преобразования (1.1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1} F_{x_2\to\xi_2} \dots F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ в.п.д.о. по формуле

$$K^{(\sigma)}(D_x, D_{\alpha,t})v = F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha} [\lambda(\xi,\eta) F_{\alpha} F_{x\to\xi}[v]], \quad \sigma \in R_1. \qquad (1.11)$$

Предполагается, что символ в.п.д.о. $\lambda(\xi,\eta)\in C^{\infty}(R_n)$ удовлетворяет условиям

$$|\partial_\eta^j \lambda(\xi,\eta)|\le c_j(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(\sigma-j)}, \quad j=0,1,\dots, \tag{1.12}$$

где постоянные $c_j>0$ не зависят от $(\xi,\eta)\in R_n$.

Теорема 3. *Пусть* σ, s *– любые действительные числа,* $\ell=1,2,\dots,$ $v(x,t)\in H_{\sigma+s,\alpha}(R_n^+)$, $\partial_t^\ell v(x,t)\in H_{\sigma+s}(R_n^+)$. *Тогда при выполнении условия 1 (с заменой* σ *на* $s+\sigma$ *) и неравенстве* (1.12) *для оператора*

$$M_{\ell,\sigma}=\partial_t^\ell K^{(\sigma)}(D_x,D_{\alpha,t})-K^{(\sigma)}(D_x,D_{\alpha,t})\,\partial_t^\ell \tag{1.13}$$

справедлива оценка

$$\|M_{\ell,\sigma}v\|_{s,\alpha}\le c_5\sum_{j=0}^{\ell}\|\partial_t^j v\|_{s+\sigma-1,\alpha}.$$

Константа $c>0$ *не зависит от* v.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 3 для любого* $\varepsilon>0$ *существует число* $c(\varepsilon)>0$ *такое, что*

$$\|M_{\ell\sigma}v\|_{s,\alpha}\le\varepsilon\sum_{j=0}^{\ell}\|\partial_t^j v\|_{s+\sigma,\alpha}+c(\varepsilon)\sum_{j=0}^{\ell}\|\partial_t^j v\|.$$

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 3 справедливо неравенство*

$$\|\partial_t^\ell K^{(\sigma)}(D_x,D_{\alpha,t})v\|_{s,\alpha}\le c\sum_{j=0}^{\ell}\|\partial_t^j v\|_{s+\sigma,\alpha}$$

с постоянной $c>0$, *не зависящей от* v.

Теорема 4. *Пусть* $q>1$, $s\ge 0$ *– действительные числа;* $\ell=1,2,\dots;$ $v(x,t)\in H_{s+(\ell+1)q,\alpha,q}(R_n^+)$. *Тогда при выполнении условия 1 (при* $\sigma=s+q$ *) и условий* (1.12) (*при* $\sigma=q$ *) для оператора* $M_{\ell,q}$, *определенного в* (1.13), *справедлива оценка*

$$\| M_{\ell,q} v \|_{s,\alpha,q} \le c_6 \| v \|_{s+(\ell+1)q-1,\alpha,q}$$

с постоянной $c_6 > 0$ *, не зависящей от* v .

Теорема 5. *Пусть* $q > 1$, σ *- действительные числа,* $v(x,t) \in \in H_{q+\max(0;\sigma),\alpha,q}$. *Тогда при выполнении условия 1 и оценок (1.12) справедливо равенство*

$$\lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(D_x, D_{\alpha,t})v = \lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(D_x, 0)v(x,t) =$$

$$= \lim_{t\to+0} F^{-1}_{\xi\to x}\left[\lambda(\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right].$$

Теорема 6. *Пусть выполнено условие 1 при некотором* $s_1 > \max\{\sigma+1, 1\}$ *и функция* $u(\xi,t)$ *такова, что* $D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)$ *при* $\max\{\sigma+1,1\} < N \le s_1$ *и почти всех* $\xi \in R_{n-1}$ *как функция* $t \in R^+_1$ *принадлежит пространству* $L_2(R^+_1)$ *и, кроме того,* $\lim_{t\to+\infty} D^i_{\alpha,t}u(\xi,t) = 0$, $i = 0,1,\ldots,N-1$. *Тогда при выполнении оценок (1.12) при почти всех* $\xi \in R_{n-1}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} K^{(\sigma)}(D_x, D_{\alpha,t})u(\xi,t) = 0.$$

При доказательстве теорем 1,2 нам потребуются утверждения о коэрцитивной априорной оценке и разрешимости краевых задач для специального класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений.

Рассмотрим в R^+_n задачи вида

$$\begin{cases} K^{(q)}_-(D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) - \partial_t v(x,t) = \mathcal{F}(x,t), & (1.14) \\ v(x,t)\big|_{t=0} = g(x), & (1.15) \\ K^{(q)}_+(D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) - \partial_t v(x,t) = \mathcal{F}(x,t), & (1.16) \end{cases}$$

где $K^{(q)}_\pm(D_x, D_{\alpha,t})$ - в.п.д.о. с символами $\lambda_\pm(\xi,\eta)$, удовлетворяющими следующему условию.

Условие 5. *Функции* $\lambda_\pm(\xi,\eta)$ *принадлежат* $C^\infty(R_n)$ *и для всех* $(\xi,\eta) \in R_n$

имеют место неравенства

$$\pm \operatorname{Re} \lambda_{\pm}(\xi,\eta) \geq c_7\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}q},$$

$$|\partial_\eta^j \lambda_{\pm}(\xi,\eta)| \leq c_8\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}(q-j)}, \quad j=0,1,2,\dots,$$

с постоянными $C_7>0, C_8>0$ *, не зависящими от* $(\xi,\eta)\in R_n$.

Теорема 7. *Пусть* $s\geq 0$, $q>1$ *- действительные числа и выполнены условия* $1'$, *5. Тогда для любого решения* $v(x,t)$ *задачи* (1.14) - (1.15) *, принадлежащего* $H_{s+q,\alpha,q}(R_n^+)$ *, справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_9\left(\|\mathcal{F}\|_{s,\alpha,q} + \ll g \gg_{s+\frac{1}{2}q}\right), \tag{1.17}$$

а для любого решения $v(x,t)$ *уравнения* (1.16), *принадлежащего* $\overset{\circ}{H}_{s+q,\alpha,q}(R_n^+)$, *имеет место оценка*

$$\|v\|_{s+q,\alpha,q} \leq c_{10}\|\mathcal{F}\|_{s,\alpha,q}. \tag{1.18}$$

Постоянные $C_9>0$ *и* $C_{10}>0$ *не зависят от* $v, \mathcal{F}, g$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 7. Если* $\mathcal{F}(x,t)\in H_{s,\alpha,q}(R_n^+)$, $g(x)\in H_{s+\frac{1}{2}q}(R_{n-1})$ *, то существует единственное решение задачи* (1.14) - (1.15), *принадлежащее* $H_{s+q,\alpha,q}(R_n^+)$ *; если* $\mathcal{F}(x,t)\in H_{s,\alpha,q}(R_n^+)$ *, то существует единственное решение уравнения* (1.16) *, принадлежащее* $\overset{\circ}{H}_{s+q,\alpha,q}(R_n^+)$.

Мы надеемся привести доказательство этих теорем в другой нашей работе. Отметим лишь, что доказательство теорем 7 и 8 в основных чертах повторяет доказательство соответствующих утверждений в [8] .

Пусть $\check{z}_i(\check{\xi},\eta)$, $i=1,2,\dots,K$, $((\check{\xi},\eta)\in R_{n+1}$, $\check{\xi}=(\xi_0,\xi)$, $\xi\in R_{n-1})$ - z-корни уравнения $\check{A}(\check{\xi},\eta,z)=0$ из условия 3. Тогда из условий 2 и 3 вытекает, что функции $\lambda_i(\xi,\eta)=\check{z}_i(\xi_0,\xi,\eta)$ при фиксированном $\xi_0\in R_1$, $\xi_0\neq 0$ (например $\xi_0=1$) обладают следующими свойствами (поскольку приводимые ниже свойства в.п.д.о., построенных по символам $\lambda_i(\xi,\eta)$, не зависят от конкретного вида $\lambda_i(\xi,\eta)$, мы формулируем соответствующие свойства $\lambda_i(\xi,\eta)$ как условия на эти символы).

Условие 6. Функции $\lambda_i(\xi,\eta)$ принадлежат $C^\infty(R_n)$ и при всех $(\xi,\eta)\in R_n$ удовлетворяют неравенствам

$$|\partial_\eta^j \lambda_i(\xi,\eta)|\le c_{11}\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}(q-j)}, \quad i=1,2,\dots,\kappa,\ j=0,1,2,\dots, \tag{1.19}$$

$$Re\,\lambda_i(\xi,\eta)\ge c_{12}\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}q}, \quad i=\tau+1,\ \tau+2,\dots,\kappa, \tag{1.20}$$

$$-Re\,\lambda_i(\xi,\eta)\ge c_{13}\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}q}, \quad i=1,2,\dots,\tau, \tag{1.21}$$

где постоянные $c_i>0$, $i=11,12,13$, не зависят от $(\xi,\eta)\in R_n$.

Построим при помощи формулы (1.11) в.п.д.о. $\check{K}_j(D_x,D_{\alpha,t})$ по символу $\lambda_i(\xi,\eta)$.

Фундаментальное значение для предлагаемого здесь метода доказательства теорем 1 и 2 имеет следующая теорема о "факторизации" исходного дифференциального оператора.

Теорема 9. *Пусть выполнены условие 1' при $s\ge 2m$ и условия 3,3'. Тогда для оператора $A(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ справедливо следующее представление:*

$$A(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)=\prod_{j=1}^{\kappa}\left(\partial_t-\check{K}_j(D_x,D_{\alpha,t})\right)+\check{T}(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t), \tag{1.22}$$

причем порядок оператора $\check{T}$ в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}$ не превосходит $2m-1$.

Введем в рассмотрение операторы

$$Q_i(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)=\prod_{j=1}^{\kappa-i}\left(\partial_t-\check{K}_j(D_x,D_{\alpha,t})\right),\quad i=0,1,\dots,\kappa-1, \tag{1.23}$$

$$Q_\kappa(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)\equiv I. \tag{1.24}$$

Здесь и в дальнейшем κ - степень по z многочлена в левой части (1.7), τ - число z-корней уравнения (1.7), лежащих в левой полуплоскости.

Следуя [12], определим скалярное произведение в $H_{s,\alpha}(R_n^+)$ формулой

$$(v,w)_{s,\alpha}=\left(\Lambda^s(D_x,D_{\alpha,t})v,\Lambda^s(D_x,D_{\alpha,t})w\right), \tag{1.25}$$

где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(R_n^+)$; $\Lambda^s(D_x,D_{\alpha,t})$ - в.п.д.о.

с символом $\lambda(\xi,\eta)=(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}s}$.

Обозначим

$$A^-(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)\equiv Q'_{k-\tau}(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t), \tag{1.26}$$

$$\Lambda_0^{\sigma}(D_x,D_{\alpha,t})=F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}\left[\left\{(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\sigma}-(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}\sigma}\right\}F_{\alpha}F_{x\to\xi}[\cdot]\right]. \tag{1.27}$$

Теорема 9 позволяет получить теорему 1 как следствие из следующего утверждения.

Теорема 10. *Пусть выполнены условие 1 при $s\geq 2m$ и условия 2 и 3. Тогда для любых $\sigma_0\geq 0$, $\varepsilon>0$ и любых функций $v(x,t)\in C_0^{\infty}(R_n)$ справедливо неравенство*

$$c_{14}\|\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|^2_{(k-\sigma_0)q,\alpha}\leq Re\left(A^-\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,\, Q_{k-\tau+1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\right)_{(k-\sigma_0-\tau+\frac{1}{2})q,\alpha}+$$

$$+\varepsilon\|v\|^2_{kq,\alpha,q}+c(\varepsilon)\|v\|^2_{kq-1,\alpha,q}, \tag{1.28}$$

где постоянная $c_{14}>0$ не зависит от ε и функции $v(x,t)$; оператор $Q_{k-\tau+1}$ определен в (1.23) при $i=k-\tau+1$.

Оператор $Q_{k-\tau+1}$ назовем разделяющим оператором по отношению к оператору A^-.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 2.1 *Пусть $q>1$, s - действительные числа и выполнено условие 1 при $\sigma=\{max(0;s)+\frac{1}{2}\}q$. Тогда для любой функции $v(x,t)$ такой, что $v(x,t)\in H_{(s+1)q,\alpha}(R_n^+)$, $\partial_t v(x,t)\in H_{sq,\alpha}(R_n^+)$, и любого $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$Re(\partial_t v,v)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha}\geq-\frac{1}{2}\langle\!\langle v(x,t)|_{t=0}\rangle\!\rangle^2_{(s+\frac{1}{2})q}-$$

$$-\varepsilon\|\partial_t v\|^2_{sq,\alpha}-\frac{c}{\varepsilon}\|v\|^2_{(s+1)q-1,\alpha} \tag{2.1}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от v.

Доказательство. Используя равенство (1.25) и теорему 5, находим неравенство

$$Re\,(\partial_t v, v)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} \geqslant -\frac{1}{2} \ll v(x,t)\big|_{t=0} \gg^2_{(s+\frac{1}{2})q} -$$

$$-\left|(M_{1,(s+\frac{1}{2})q}\, v,\ \Lambda^{(s+\frac{1}{2})q} v)\right|, \tag{2.2}$$

где $M_{1,(s+\frac{1}{2})q}$ - коммутатор операторов ∂_t и $\Lambda^{(s+\frac{1}{2})q}(D_x, D_{\alpha,t})$

При помощи неравенства Коши-Буняковского и равенства (1.3) для любого $\varepsilon>0$ получим

$$\left|(M_{1,(s+\frac{1}{2})q}\, v,\ \Lambda^{(s+\frac{1}{2})q} v)\right| \leqslant \varepsilon \left\| M_{1,(s+\frac{1}{2})q}\, v \right\|^2_{1-\frac{q}{2},\alpha} +$$

$$+\frac{c}{\varepsilon}\left\| \Lambda^{(s+\frac{1}{2})q} v\right\|^2_{q/2-1,\alpha}. \tag{2.3}$$

Применяя для оценки первого слагаемого в правой части (2.3) теорему 3 и используя полученное неравенство в правой части (2.2) , выводим оценку (2.1) .

Лемма 2.2. *Пусть* $q>1$, s *- действительные числа,* $\ell=K-\tau+1,\dots,K$, *и выполнены условие 1 при* $\sigma=\{\max(0;s)+\frac{1}{2}\}q$ *и условие 6. Тогда при всех* $v(x,t)\in C_0^\infty(R_n)$ *справедливо неравенство*

$$c\left\|Q_\ell \Lambda_0^{\sigma_0 q} v\right\|^2_{(s+1)q,\alpha} \leqslant Re\left(Q_{\ell-1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} v,\ Q_\ell \Lambda_0^{\sigma_0 q} v\right)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} +$$

$$+\varepsilon\left\|\partial_t Q_\ell \Lambda_0^{\sigma_0 q} v\right\|^2_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|Q_\ell \Lambda_0^{\sigma_0 q} v\right\|^2_{(s+1)q,\alpha} +$$

$$+\ll Q_\ell \Lambda_0^{\sigma_0 q} v\big|_{t=0} \gg^2_{(s+\frac{1}{2})q}, \tag{2.4}$$

где $\sigma_0\geqslant 0$, $\varepsilon>0$ *- любые числа, постоянные* $c>0$, $c(\varepsilon)>0$ *не зависят от* v

Доказательство. Обозначим $v_\ell(x,t)=Q_\ell \Lambda_0^{\sigma_0 q} v(x,t)$. Из (1.23) и леммы 2.1 получаем

$$Re\left(Q_{\ell-1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} v,\ Q_\ell \Lambda_0^{\sigma_0 q} v\right)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} = Re\left(\partial_t v_\ell, v_\ell\right)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} -$$

$$-Re\left(\check{K}_{K-\ell+1}(D_x, D_{\alpha,t})v_\ell, v_\ell\right)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} \geqslant -\frac{1}{2} \ll v_\ell\big|_{t=0} \gg^2_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} -$$

$$-\varepsilon\|\partial_t v\|^2_{sq,\alpha}-\frac{c}{\varepsilon}\|v\|^2_{(s+1)q-1,\alpha}-Re\left(\check{K}_{k-\ell+1}(D_x,D_{\alpha,t})v_\ell,v_\ell\right)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha}. \tag{2.5}$$

С помощью неравенства (1.21), соотношения (1.3) и равенства Парсеваля при $\ell=k-r+1,\dots,k$ находим

$$-Re\left(\check{K}_{k-\ell+1}(D_x,D_{\alpha,t})v_\ell,v_\ell\right)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha}\geq c\|v_\ell\|^2_{(s+1)q,\alpha}. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) легко вытекает оценка (2.4). Лемма доказана.

Следствие 2.1. *При выполнении условий леммы 2.2 справедлива оценка*

$$\|Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|_{(s+1)q,\alpha}\leq\varepsilon\|\partial_t Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|_{sq,\alpha}+c(\varepsilon)\|Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|_{(s+1)q-1,\alpha}+$$
$$+c\left(\|Q_{\ell-1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|_{sq,\alpha}+\langle\!\langle Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v|_{t=0}\rangle\!\rangle_{(s+\frac{1}{2})q}\right), \tag{2.7}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от v,ε.

Для доказательства достаточно воспользоваться в правой части (2.4) неравенством Коши-Буняковского.

Лемма 2.3. *Пусть $q>1$, $\sigma_0\geq 0$, $s\geq-\sigma_0$ - действительные числа, $\ell=k-r+1,\dots,k$; выполнены условие 1 при $\sigma=q(k-\ell+\frac{1}{2}+max(0,s))$ и условие 6. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует число $c(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $v(x,t)\in C_0^\infty(R_n)$ справедлива оценка*

$$\langle\!\langle Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v|_{t=0}\rangle\!\rangle_{(s+\frac{1}{2})q}\leq\varepsilon\|v\|_{(s+1+k-\ell+\sigma_0)q,\alpha,q}+$$
$$+c(\varepsilon)\|v\|_{(s+1+k-\ell+\sigma_0)q-1,\alpha,q}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Прокоммутируем операторы Q_ℓ и $\Lambda_0^{\sigma_0 q}$. Из (1.23) вытекает, что для этого достаточно прокоммутировать операторы ∂_t^j, $j=1,2,\dots,k-\ell$, и $\Lambda_0^{\sigma_0 q}$. Обозначив через $R_{k-\ell,\sigma_0 q}$ коммутатор операторов Q_ℓ и $\Lambda_0^{\sigma_0 q}$, получим

$$Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v=\Lambda_0^{\sigma_0 q}Q_\ell v+R_{k-\ell,\sigma_0 q}v, \tag{2.9}$$

причем с помощью (1.23) и теоремы 3 при $s \geq -\sigma_0$, $q > 1$ легко установить неравенство

$$\| R_{\kappa-\ell,\sigma_0 q} v \|_{(s+1)q,\alpha} \leq c \| v \|_{(s+1+\kappa-\ell+\sigma_0)q-1,\alpha,q} . \tag{2.10}$$

Аналогично, воспользовавшись очевидным равенством

$$\partial_t^i M_{j,\sigma_0 q} = M_{i+j,\sigma_0 q} - M_{i,\sigma_0 q} \partial_t^j , \tag{2.11}$$

где $M_{j,\sigma_0 q}$ - коммутатор операторов ∂_t^j и $\Lambda_0^{\sigma_0 q}$, при $s \geq -\sigma_0$ выводим

$$\| \partial_t R_{\kappa-\ell,\sigma_0 q} v \|_{sq,\alpha} \leq c \sum_{i=0}^{\kappa-\ell-1} \sum_{i_1=0}^{\kappa-\ell-i+1} \| \partial_t^{i_1} v \|_{(s+\sigma_0+i)q-1,\alpha} \leq$$

$$\leq c_1 \| v \|_{(s+\sigma_0+\kappa-\ell+1)q,\alpha,q} . \tag{2.12}$$

Используя (1.27) и теорему 5, получаем для $v(x,t) \in C_0^\infty(R_n)$ представление

$$\Lambda_0^{\sigma_0 q}(D_x, D_{\alpha,t}) Q_\ell v \big|_{t=0} = \Lambda_0^{\sigma_0 q}(D_x, 0) Q_\ell v \big|_{t=0} .$$

Следовательно, из (2.9) вытекает равенство

$$Q_\ell \Lambda_0^{\sigma_0 q} v \big|_{t=0} = R_{\kappa-\ell,\sigma_0 q} v \big|_{t=0} . \tag{2.13}$$

Используя известное неравенство

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}q} |w|_{t=0}|^2 \leq \varepsilon \left(\| \partial_t w \|^2 + \| w \|^2 \right) + \frac{c}{\varepsilon} \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}q} \| w \|^2 \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{2.14}$$

из (2.13) с помощью теоремы 5 находим

$$\langle\!\langle Q_\ell \Lambda_0^{\sigma_0 q} v \big|_{t=0} \rangle\!\rangle_{(s+\frac{1}{2})q} = \langle\!\langle \Lambda^{sq} R_{\kappa-\ell,\sigma_0 q} v \big|_{t=0} \rangle\!\rangle_{\frac{1}{2}q} \leq$$

$$< \varepsilon \| \partial_t \Lambda^{sq} R_{\kappa-\ell,\sigma_0 q} v \| + c(\varepsilon) \| R_{\kappa-\ell,\sigma_0 q} v \|_{(s+1)q,\alpha} . \tag{2.15}$$

С помощью следствия 2 и оценок (2.10), (2.12) из (2.15) выводим (2.8). Лемма доказана.

Лемма 2.4. *При выполнении условий леммы 2.3 для любого* $\varepsilon>0$ *существует число* $c(\varepsilon)>0$ *такое, что для всех* $v(x,t)\in C_0^{\infty}(R_n)$ *справедлива оценка*

$$c\|Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|^2_{(s+1)q,\alpha}\le Re\,(Q_{\ell-1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,\,Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha}+$$

$$+\varepsilon\|v\|^2_{(s+1+k-\ell+\sigma_0)q,\alpha,q}+c(\varepsilon)\|v\|^2_{(s+1+k-\ell+\sigma_0)q-1,\alpha,q} \tag{2.16}$$

с постоянной $c>0$*, не зависящей от* v.

Доказательство. Из (1.23) с помощью следствия 2 при $s\geq-\sigma_0,\ q>1$ имеем

$$\|\partial_t Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|_{sq,\alpha}\le c\|v\|_{(s+1+k-\ell+\sigma_0)q,\alpha,q}, \tag{2.17}$$

$$\|Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|_{(s+1)q-1,\alpha}\le c\|v\|_{(s+1+k-\ell+\sigma_0)q-1,\alpha,q}. \tag{2.18}$$

Применяя (2.8), (2.17) и (2.18) в правой части (2.4), устанавливаем искомую оценку (2.16).

Следствие 2.2. *При выполнении условий леммы 2.4 справедлива оценка*

$$\|Q_\ell\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|_{(s+1)q,\alpha}\le c\|Q_{\ell-1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\|_{sq,\alpha}+$$

$$+\varepsilon\|v\|_{(s+1+k-\ell+\sigma_0)q,\alpha,q}+c(\varepsilon)\|v\|_{(s+1+k-\ell+\sigma_0)q-1,\alpha,q} \tag{2.19}$$

с постоянными $c>0$, $c(\varepsilon)>0$*, не зависящими от* v.

Для доказательства достаточно воспользоваться в правой части (2.7) неравенствами (2.8), (2.17) и (2.18).

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Пусть* $j>0,\ \ell\geq0,\ m>0,\ k>0$ *– целые числа,* $q=\frac{2m}{k}>1$, *причем* $q\ell$ *– целое число и* $\tau=(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_{n-1})$ *удовлетворяет условию* $j+q\ell+|\tau|=2m$. *Если* $\alpha(t)\in C^{2m}[0,+\infty)$, $\alpha(+0)=0$*, то для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое число* $c(\varepsilon)>0$*, что для всех функций* $v(x,t)\in C_0^{2m}(R_n)$ *справедли-*

во неравенство

$$\|D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j}\, \partial_t^{\ell} v\| < \varepsilon \left(\|\partial_t^{\kappa} v\| + \sum_{|\tau|\le 2m} \|D_x^{\tau} v\|\right) +$$

$$+ c(\varepsilon) \sum_{i=0}^{2m} \|D_{\alpha,t}^{i} v\| . \tag{2.20}$$

Последнее при $q=2$ содержится в [14] . Доказательство неравенства (2.20) при любом $q>1$ проводится аналогично (см. [5]).

3. Доказательства основных теорем

Доказательство теоремы 6. Используя формулу Тейлора, находим

$$\lambda(\xi,\eta) = \lambda(\xi,0) + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(\xi,0)\eta^i + g_N(\xi,\eta)\eta^N, \tag{3.1}$$

где

$$\lambda_i(\xi,\eta) = \frac{1}{i!}\partial_\eta^i \lambda(\xi,\eta), \quad i=0,1,\dots,N,$$

$$g_N(\xi,\eta) = N\int_0^1 \lambda_N(\xi,\theta\eta)(1-\theta)^{N-1} d\theta. \tag{3.2}$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$K^{(\sigma)}(\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t) \equiv \lambda(\xi,0)u(\xi,t) + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(\xi,0) D_{\alpha,t}^i u(\xi,t) +$$

$$+ F_\alpha^{-1}\left[g_N(\xi,\eta) F_\alpha [D_{\alpha,t}^N u]\right].$$

Следовательно, по условию теоремы при $\max(\sigma+1,1) < N \le s_1$ и при каждом фиксированном $\xi \in R_{n-1}$ выполняется равенство

$$\lim_{t\to+\infty} K^{(\sigma)}(\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t) = \lim_{t\to+\infty} F_\alpha^{-1}\left[g_N(\xi,\eta)F_\alpha [D_{\alpha,t}^N u]\right]. \tag{3.3}$$

Покажем, что правая часть в (3.3) равна нулю. Так как $\alpha(t)=const$ при $t\ge d>0$, то с помощью (1.4) получаем

$$\lim_{t\to+\infty} F_\alpha^{-1}\left[g_N(\xi,\eta)F_\alpha [D_{\alpha,t}^N u]\right] =$$

$$= \frac{1}{c}\lim_{\tau\to-\infty} F_{\eta\to\tau}^{-1}\left[g_N(\xi,\eta)F_\alpha [D_{\alpha,t}^N u]\right]. \tag{3.4}$$

При $N>\max(\sigma+1,1)$ находим из (3.2) и (1.12) неравенство

$$|\eta g_N(\xi,\eta)| \le c < \infty \tag{3.5}$$

с постоянной $\overline{C} > 0$, не зависящей от $(\xi, \eta) \in R_n$.

Учитывая, что $g_N(\xi, \eta)$ непрерывна в окрестности $\eta = 0$, из (3.5) получаем, что $g_N(\xi, \eta)$ при каждом $\xi \in R_{n-1}$ принадлежит пространству $L_2(R_1)$. Кроме того, так как по условию теоремы функция $D^N_{\alpha,t} u(\xi, t)$ при каждом $\xi \in R_{n-1}$ принадлежит пространству $L_2(R_1)$, то функция $F_\alpha[D^N_{\alpha,t} u]$ при каждом $\xi \in R_{n-1}$ принадлежит пространству $L_2(R_1)$.

Таким образом, при каждом $\xi \in R_{n-1}$ функция $g_N(\xi, \eta) \cdot F_\alpha [D^N_{\alpha,t} u](\xi, \eta)$ принадлежит $L_1(R_1)$ и, следовательно, по лемме Римана-Лебега (см. [15]),

$$\lim_{|\tau| \to \infty} F^{-1}_{\eta \to \tau} [g_N(\xi, \eta) F_\alpha [D^N_{\alpha,t} u]] = 0.$$

Отсюда и из (3.3) , (3.4) вытекает утверждение теоремы 6.

Доказательство теоремы 9. Рассмотрим оператор $Q_0(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)$, определенный в (1.23) . Используя теорему 4 и свойства функций $\lambda_i(\xi, \eta)$ (см. условие 6), устанавливаем оценку

$$\|\check{A}(\xi_0, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v - Q_0(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v\| \le C \|v\|_{2m-1,\alpha,q}, \tag{3.6}$$

справедливую для любых функций $v(x,t) \in H_{2m,\alpha,q}(R^+_n)$.

Кроме того, по построению оператора $\check{A}$ имеем

$$\|\check{A}(\xi_0, D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v - A_0(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) v\| < C \|v\|_{2m-1,\alpha,q}. \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) легко выводится утверждение теоремы 9.

Доказательство теоремы 10. Так как, по построению, $Q_K \equiv I$, то, используя оценку (2.19) при $\ell = K$, $s = K - \sigma_0 - 1$, получаем

$$\|\Lambda_0^{\sigma_0 q} v\|_{(K-\sigma_0)q,\alpha} \le C \|Q_{K-1} \Lambda_0^{\sigma_0 q} v\|_{(K-\sigma_0-1)q,\alpha} +$$
$$+ \varepsilon \|v\|_{Kq,\alpha,q} + C(\varepsilon) \|v\|_{Kq-1,\alpha,q}. \tag{3.8}$$

Последовательно используя в правой части (3.8) оценку (2.19) при

$\ell = K-1$, $s = K - \sigma_0 - 2$; $\ell = K-2$, $s = K - \sigma_0 - 3$; $\dots$ $\ell = K - r + 2$, $s = K + 1 - \sigma_0 - r$, находим

$$\|\Lambda_0^{6_0 q} v\|_{(\kappa-6_0)q,\alpha} \le c\,\|Q_{\kappa-1}\Lambda_0^{6_0 q} v\|_{(\kappa-6_0-1)q,\alpha} +$$

$$+\varepsilon\|v\|_{\kappa q,\alpha,q} + c(\varepsilon)\|v\|_{\kappa q-1,\alpha,q}\,. \tag{3.9}$$

Применяя в правой части (3.9) неравенство (2.16) при $\ell=\kappa-\tau+1$, $s=\kappa-6_0-\tau$, устанавливаем требуемую оценку (1.28) . Теорема доказана.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые предварительные леммы.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условие $1'$ при $S=2m$ и условия 2,3. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует число $c(\varepsilon)>0$ такое, что при всех $v(x,t)\in C_0^\infty(R_n)$ справедлива оценка*

$$\|D_{\alpha,t}^{2m} v\| \le \varepsilon\|v\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)\left(\|v\|_{2m-1,\alpha,q} + \|A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v\|\right). \tag{3.10}$$

Доказательство. Выберем в теореме 10 число 6_0 , удовлетворяющее условиям $2\le 6_0 q\le 2m$ $(q>1)$. Тогда с помощью равенства (1.3) и неравенства

$$(1+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}6_0 q} - (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}6_0 q} \ge |\eta|^{6_0 q}$$

находим

$$\|D_{\alpha,t}^{2m} v\| \le \|\Lambda_0^{6_0 q} v\|_{2m-6_0 q,\alpha}\,. \tag{3.11}$$

Из (3.11) и (1.26) , (1.28) при $q=\frac{2m}{\kappa}>1$ получаем

$$\|D_{\alpha,t}^{2m} v\|^2 \le \varepsilon\|v\|^2_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)\|v\|^2_{2m-1,\alpha,q} +$$

$$+ c\,Re\left(Q_{\kappa-\tau}\Lambda_0^{6_0 q} v,\ Q_{\kappa-\tau+1}\Lambda_0^{6_0 q} v\right)_{(\kappa-6_0-\tau+\frac{1}{2})q,\alpha}\,. \tag{3.12}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (3.12) . Прокоммутируем операторы $Q_{\kappa-\tau}$ и $\Lambda_0^{6_0 q}$. Из (1.23) вытекает, что для этого достаточно прокоммутировать операторы ∂_t^j , $j=1,2,\dots,\tau$, и $\Lambda_0^{6_0 q}$ Обозначим коммутатор операторов $Q_{K-\tau}$ и $\Lambda_0^{\sigma_0 q}$ через $R_{K-\ell,\sigma_0 q}$.

Используя неравенство Коши-Буняковского, приходим к неравенству

$$\left|\left(Q_{K-\tau}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,\, Q_{K-\tau+1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\right)_{(K-\sigma_0-\tau+\frac{1}{2})q,\alpha}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon}\left\|Q_{K-\tau}v\right\|^2_{(K-\tau)q,\alpha} +$$
$$+\varepsilon\left\|Q_{K-\tau+1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\right\|^2_{(K-\tau+1-\sigma_0)q,\alpha} + \varepsilon\left\|R_{K-\tau,\sigma_0 q}v\right\|^2_{1+(K-\tau-\sigma_0)q,\alpha} +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|Q_{K-\tau+1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\right\|^2_{(K-\tau-\sigma_0+1)q-1,\alpha} . \qquad (3.13)$$

Оценим сверху правую часть (3.13) . С помощью теоремы 3, следствия 2 и (2.13) получаем

$$\left\|R_{K-\tau,\sigma_0 q}v\right\|_{1+(K-\tau-\sigma_0)q,\alpha} \leq$$
$$\leq C\sum_{i=0}^{\tau}\sum_{i_1=0}^{\tau-i}\left\|\partial_t^{i_1}v\right\|_{1+(K-\tau-\sigma_0)q+(\sigma_0+i)q-1,\alpha} \leq C_1\|v\|_{Kq,\alpha,q} . \qquad (3.14)$$

Используя следствие 2, из (1.23) имеем

$$\left\|Q_{K-\tau+1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\right\|_{(K-\tau_0-\sigma_0+1)q-1,\alpha} \leq$$
$$\leq C\sum_{i=0}^{\tau-1}\sum_{i_1=0}^{\tau-1-i}\left\|\partial_t^{i_1}v\right\|_{(K-\tau-\sigma_0+1)q-1+(\sigma_0+i)q,\alpha} \leq C_1\|v\|_{Kq-1,\alpha,q} . \qquad (3.15)$$

Применяя (3.14) , (3.15) в правой части (3.13), при помощи следствия 2 устанавливаем оценку

$$\left|\left(Q_{K-\tau}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,\, Q_{K-\tau+1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\right)_{(K-\tau-\sigma_0+\frac{1}{2})q,\alpha}\right| \leq \varepsilon\|v\|^2_{2m,\alpha,q} +$$
$$+C(\varepsilon)\left(\|v\|^2_{2m-1,\alpha,q} + \left\|Q_{K-\tau}v\right\|^2_{(K-\tau)q,\alpha}\right). \qquad (3.16)$$

С помощью (3.16) из неравенства (3.12) находим

$$\left\|D^{2m}_{\alpha,t}v\right\| \leq \varepsilon\|v\|_{2m,\alpha,q} + C(\varepsilon)\left(\|v\|_{2m-1,\alpha,q} + \left\|Q_{K-\tau}v\right\|_{(K-\tau)q,\alpha}\right). \qquad (3.17)$$

Если $K=\tau$, то из (3.17) получим

$$\left\|D^{2m}_{\alpha,t}v\right\| \leq \varepsilon\|v\|_{2m,\alpha,q} + C(\varepsilon)\left(\|v\|_{2m-1,\alpha,q} + \|Q_0 v\|\right). \qquad (3.18)$$

Из (3.18), (1.23) и (1.22) легко выводим (3.10).

Если же $\tau < K$, то, используя для оценки последнего слагаемого в правой части (3.17) теорему 7 последовательно при $s=K-\tau-1, K-\tau-2, \ldots, 0$, приходим к неравенству (3.18), из которого, как и выше, получаем оценку (3.10). Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условие 1' при $s=2m$ и условия 2, 3. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует число $c(\varepsilon)>0$ такое, что при всех $v(x,t) \in C_0^{\infty}(R_n)$ справедлива оценка*

$$\|A(D_x,0,\partial_t)v\| \leq \varepsilon\|v\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)\Big(\|v\|_{2m-1,\alpha,q} + \\ + \|A(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v\|\Big). \tag{3.19}$$

Доказательство. По определению оператора A имеем

$$\|A(D_x,0,\partial_t)v\| \leq \|A(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v\| + \\ + \Big\|\sum_{|\tau|+j+q\ell\leq 2m,\, j>0} a_{\tau j\ell} D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j} \partial_t^{\ell} v\Big\|. \tag{3.20}$$

Из (3.20) вытекает, что для доказательства леммы 3.2 при любом $\varepsilon>0$ достаточно получить

$$\sum_{|\tau|+j+q\ell\leq 2m,\, j>0} \|D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j} \partial_t^{\ell} v\| \leq \varepsilon\|v\|_{2m,\alpha,q} + \\ + c(\varepsilon)\Big(\|v\|_{2m-1,\alpha,q} + \|A(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v\|\Big). \tag{3.21}$$

Докажем неравенство (3.21). Рассмотрим сначала норму $\|D_x^{\tau} D_{\alpha,t}^{j} \partial_t^{\ell} v\|$ в том случае, когда число $q\ell$, $(|\tau|+j+q\ell\leq 2m,\ j>0)$ не является целым числом. Тогда существует такое $\delta>0$, что $|\tau|+j+q\ell \leq 2m-\delta$. Следовательно, если воспользоваться известным неравенством (см. [12])

$$\|w\|_{s-\delta,\alpha} \leq \varepsilon\|w\|_{s,\alpha} + c(\varepsilon)\|w\|,$$

справедливым при $\delta>0$ и любом $\varepsilon>0$ для всех функций $w \in H_{s,\alpha}(R_n^+)$, то получим

$$|D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^\ell v| \le c\,|\partial_t^\ell v|_{2m-q\ell-\delta,\alpha} \le \varepsilon \|v\|_{2m,\alpha,q} +$$

$$+c(\varepsilon)\|v\|_{2m-1,\alpha,q}, \quad |\tau|+j+q\ell \le 2m-\delta,\ \delta>0. \qquad (3.22)$$

из (3.22) вытекает, что для доказательства неравенства (3.21) остается рассмотреть случай, когда $q\ell$ - целое число, $|\tau|+j+q\ell=2m$, $j>0$. Воспользовавшись оценкой (2.20), в этом случае имеем

$$|D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^\ell v| \le \varepsilon \|v\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)\left(\|v\|_{2m-1,\alpha,q} + |D_{\alpha,t}^{2m} v|\right).$$

Применяя в правой части последнего неравенства оценку (3.10), легко получаем (3.21). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Предположим сначала, что порядки m_i граничных операторов B_i, $i=1,2,\ldots,\tau$ (см. (1.6).), в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_n^+)$ не превосходят $2m-q$. Рассмотрим уравнение

$$A(D_x,0,\partial_t)v(x,t)=\mathcal{F}_0(x,t). \qquad (3.23)$$

Уравнение (3.23) при выполнении условия 2 является регулярным квазиэллиптическим. Априорная оценка решений задачи (3.23), (1.6) хорошо известна (см. например, [16]). Ее можно записать в виде

$$\|F^{-1}_{\xi\to x}[(1+|\xi|^2)^m F_{x\to\xi}[v]]\| + \|\partial_t^\kappa v\| \le c\Big(\|v\| +$$

$$+\|A(D_x,0,\partial_t)v\| + \sum_{i=1}^{\tau} \ll B_i v|_{t=0} \gg_{2m-m_i-\frac{1}{2}q}\Big) \qquad (3.24)$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от v.

Почленно складывая неравенства (3.10) и (3.24) и замечая, что

$$\|v\|_{2m,\alpha,q} \le c\Big(|D_{\alpha,t}^{2m} v| + \sum_{|\tau|=2m} |D_x^\tau v| + |\partial_t^\kappa v|\Big),$$

имеем

$$\|v\|_{2m,\alpha,q} \le c\Big(\|A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v\| + \|A(D_x, 0, \partial_t)v\| +$$

$$+\sum_{i=1}^{r} \langle\langle B_i v|_{t=0}\rangle\rangle_{2m-m_i-\frac{1}{2}q}\Big) + \varepsilon\|v\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)\|v\|_{2m-1,\alpha,q}\,. \qquad (3.25)$$

Применяя в правой части (3.25) неравенство (3.19) и выбирая число $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем оценку (1.10) при $s=2m$ для $v(x,t)\in C_0^\infty(R_n)$. В силу плотности множества функций $C_0^\infty(R_n)$ в пространстве $H_{2m,\alpha,q}(R_n^+)$ устанавливаем справедливость теоремы 1 при $s=2m$ в случае, когда порядки m_i граничных операторов B_i в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_n^+)$ не превосходят $2m-q$. Доказательство теоремы 1 при $s>2m$ и в случае, когда порядок хотя бы одного оператора B_i в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_n^+)$ не меньше $2m-q$, проводится стандартными методами, использованными, например, в [10].

Литература

1. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы.- Докл. АН СССР, 1982, т. 265, № 5, с.1044-1046.
2. Глушко В.П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка.-Тр.Моск.мат.о-ва, 1970, т.23, с.113-178.
3. Вишик М.И., Грушин В.В. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы.- Успехи мат. наук, 1970, т. 25, вып. 4, с.29-56.
4. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Энергетические оценки в смешанной задаче для $(2b+1)$ - гиперболических уравнений.- М.: 1978.- 63 с.(Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР №137).
5. Баев А.Д. О применении метода разделяющего оператора для доказательства априорных оценок решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений.- Воронеж: 1982.- 44 с.- Рукопись представлена Воронеж. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 3 августа 1982, № 4208-82.

6. Agmon S. On Kernels, Eigenvalues and Eigenfunctions of Operators Related to Elliptic Problems.- Comm. Pure and Appl. Math., 1965, v. 18, p. 627-663.

7. Глушко В.П., Баталин М.Д. Коэрцитивная разрешимость общих граничных задач для некоторых вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка.- В сб.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск, 1975, с.59-88.

8. Баев А.Д. О разрешимости краевых задач для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений.- Воронеж: 1982.- 54 с.- Рукопись представлена Воронеж. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 6 сентября 1982, № 4736-82.

9. Баев А.Д. Пространства типа Соболева-Слободецкого с весом и весовые псевдодифференциальные операторы.- Воронеж: 1982.- 39 с.- Рукопись представлена Воронеж. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 3 августа 1982, № 4209-82.

10. Глушко В.П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка.- Воронеж: 1979.- 47 с.- Рукопись представлена Воронеж.ун-том. Деп. в ВИНИТИ 27 марта 1979, № 1048-79.

11. Глушко В.П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л. Соболева). Новосибирск: Наука, 1978, № 2, с.49-68.

12. Глушко В.П., Богатов М.И. Пространства типа С.Л. Соболева дробного порядка с весом и их свойства.- Воронеж, 1979.- 38 с.- Рукопись представлена Воронеж ун-том. Деп. в ВИНИТИ 10 сентября 1979, № 3239-79.

13. Глушко В.П. Пространства функций с дробными весовыми производными и граничные задачи переменного порядка.- В сб.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики, Новосибирск, 1981, с.46-53.

14. Глушко В.П., Глушанкова Л.Я. Об одном неравенстве между нормами производных функций с весом.- Воронеж, 1981.-27 с.- Рукопись представлена Воронеж. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 28 октября 1981, № 4983-81.

15. Грушин В.В. Псевдодифференциальные операторы.- М.: Изд. Моск. ин-та электронного машиностроения, 1975.- 107 с.

16. Волевич Л.Р. Локальные свойства квазиэллиптических систем.- Мат. сб., 1962, т.51, с.3-52.