УДК 517.947

ОЦЕНКИ ПРИ $t\to\infty$ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ n-МЕРНОЙ СИСТЕМЫ С.Л. СОБОЛЕВА

С.И. Янов (Новосибирск)

Асимптотика решения первой краевой задачи для системы С.Л. Соболева [1] изучалась различными авторами (см., например, [2-6]). Нас будет интересовать вопрос поведения решения первой краевой задачи при $t\to\infty$ для одного из n-мерных обобщений системы С.Л. Соболева, полученных А.А. Дезиным [7]:

$$\partial\overset{1}{v} - *(\overset{1}{v}\wedge\overset{n-2}{\omega}) + d\overset{0}{p} = 0,$$

$$\delta\overset{1}{v} = 0,$$

где $\overset{0}{\omega}=\omega$, $\overset{n-2}{\omega}=\omega dx_3\wedge dx_4\wedge\ldots\wedge dx_n$ при $n\geq 3$, или в явной записи задачи:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}-\overline{\omega} & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \overline{\omega} & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \ldots & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} \ldots & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \ldots & \frac{\partial}{\partial x_n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \\ p \end{pmatrix} = 0,\ t>0, \qquad x=(x_1,\ldots,x_n)\in G\subset R^n, \tag{1}$$

$$\vec{v}\big|_{t=0} = (v_1\ldots v_n)\big|_{t=0} = \vec{v}_0,\ \operatorname{div}\vec{v}_0 = 0,\quad p\big|_{\partial G} = 0.$$

Здесь G - ограниченная область, $\overline{\omega}=(-1)^{n-1}\omega$.

В данной работе, пользуясь методикой [8], мы получим оценки решения задачи (1) в нормах $W_2^m(G')$ и $C^l(G')$, где G' - область такая, что $\overline{G}'\subset G$.

Приведем обозначения и формулировку результата. Будем считать $G\subset R^n$ ограниченной областью с $(n-1)$-мерной достаточно гладкой границей ∂G,

$$\mathcal{L}_{t\to\tau} f(t,x) = \int_0^\infty \exp(-\tau t) f(t,x)\,dt,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{i}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{i}_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\vec{i}_n,$$

$W_2^\ell(G)$ - пространство С.Л. Соболева с нормой

$$\| f, W_2^\ell(G) \| = \left(\sum_{|\alpha| \le \ell} \int_G |\mathcal{D}^\alpha f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема. *Пусть* $\vec{Z} = (v_1, v_2, \dots, v_n, P)$ - *решение задачи* (1) ; G' - *подобласть области* G, $\overline{G}' \subset G$, $\vec{v}_0 \in C^\infty$. *Тогда имеют место оценки:*

$$\| \mathcal{D}_t^\ell P(t,x), W_2^m(G') \| \le c_1 t^{m-1} + c_2, \; m \ge 1, \; \ell \ge 1; \tag{1.1}$$

$$\| P(t,x), W_2^m(G') \| \le c_3 t^m + c_4; \tag{1.2}$$

$$\| \mathcal{D}_t^\ell v_i(t,x), W_2^m(G') \| \le \tilde{c}_1 t^m + \tilde{c}_2, \; i = 3 \dots n; \tag{1.3}$$

$$\| v_i, W_2^m(G') \| \le \tilde{c}_3 t^{m+1} + \tilde{c}_4, \quad i = 3 \dots n; \tag{1.4}$$

$$\| \mathcal{D}_t^\ell v_i, W_2^m(G') \| \le c_1^\circ t^{m+1} + c_2^\circ, \; i = 1,2; \tag{1.5}$$

$$\| v_i, W_2^m(G') \| \le c_3^\circ t^{m+1} + c_4^\circ, \quad i = 1,2, \tag{1.6}$$

а также оценки:

$$\sup_{\substack{y \in G' \\ |\alpha| = K}} |\mathcal{D}_x^\alpha P(t,x)| \le c_1' t^{\frac{n}{2}+K} + c_2'; \tag{1.7}$$

$$\sup_{\substack{x \in G' \\ |\alpha| = K}} |\mathcal{D}_t^\ell \mathcal{D}_x^\alpha P(t,x)| \le c_1(\varepsilon) t^{\frac{n}{2}+K-1+\varepsilon} + c_2, \quad \ell \ge 1; \tag{1.8}$$

$$\sup_{\substack{x \in G' \\ |\alpha| = K}} |\mathcal{D}_x^\alpha v_i(t,x)| \le c_1 t^{\frac{n}{2}+K+1} + c_2, \quad i = 3, \dots, n; \tag{1.9}$$

$$\sup_{\substack{x \in G' \\ |\alpha| = K}} |\mathcal{D}_t^\ell \mathcal{D}_x^\alpha v_i(t,x)| \le c_1 t^{\frac{n}{2}+K} + c_2, \; \ell \ge 1, \; i = 3, \dots, n; \tag{1.10}$$

$$\sup_{\substack{x\in G' \\ |\alpha|=\kappa}} |\mathcal{D}_t^\ell \mathcal{D}_x^\alpha v_i(t,x)| \le c_1(\varepsilon)\, t^{\frac{n}{2}+\kappa+1+\varepsilon} + c_2\,, \quad \ell \ge 0\,, \quad i=1,2, \tag{1.11}$$

где $\varepsilon > 0$ - любое, а c_2 - константы, не зависящие от t .

§1. Оценки решения задачи (1) при $t \to \infty$

Делая замену $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_0$ в задаче (1) , перейдем к задаче

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} - \overline{\omega} u_2 + \frac{\partial P}{\partial x_1} = \overline{\omega}\, v_2^0 ;\\
&\overline{\omega} u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_2} = -\overline{\omega} v_1^0 ;\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_3} = 0 ;\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_n} = 0 ;\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 ;\\
&\vec{u}\big|_{t=0} = 0\,, \quad P\big|_{\partial G} = 0.
\end{aligned} \tag{1'}$$

В силу результатов [9] , решение (1') существует и единственно в классе $H_\gamma^{2t,2\nu}(Q)$, если

$$N^{-1}(\tau)\mathcal{L}_{t\to\tau}(\overline{\omega} v_2^0, -\overline{\omega} v_1^0, 0,\ldots,0)\,\tau^{\kappa_0} \in H_{\gamma,\ell_0-s}(G\times C_\gamma) \text{ (см. [9]).}$$

Таким образом, решение (1) будет достаточно гладким, если начальные данные достаточно гладкие. Дифференцируя каждое уравнение задачи (1) ℓ раз по t , $\ell \ge 0$, умножая полученное i-е уравнение на $\mathcal{D}_t^\ell v_i$, $i=1,\ldots,n$, и складывая, будем иметь

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{D}_t^{\ell+1} v_i \mathcal{D}_t^\ell v_i + \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_t^\ell \mathcal{D}_{x_i} P \cdot \mathcal{D}_t^\ell v_i = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^\ell v_i}{\partial t^\ell}\right)^2 + \operatorname{div}\left(\mathcal{D}_t^\ell P \cdot \mathcal{D}_t^\ell \vec{v}\right) - \mathcal{D}_t^\ell P \cdot \operatorname{div}(\mathcal{D}_t^\ell \vec{v}) = 0.$$

Интегрируя обе части этого уравнения по области G и учитывая, что $\operatorname{div}(\mathcal{D}_t^{\ell}\vec{v}) = 0$, $\mathcal{D}_t^{\ell}P|_{\partial G} = 0$, получаем

$$\frac{1}{2}\int_G \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{\ell} v_i}{\partial t^{\ell}}\right)^2 dx = 0. \tag{1.12}$$

Интегрируя (1.12) от 0 до t, получаем n-мерный аналог интеграла энергии системы С.Л. Соболева [1] :

$$\mathcal{J}(t) = \int \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^{\ell} v_i(t,x)}{\partial t^{\ell}}\right)^2 dx = \mathcal{J}(0), \quad \ell \geq 0. \tag{1.13}$$

Пользуясь (1.13) и системой уравнений задачи (1), нетрудно получить оценку

$$\left(\int_G \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^{\ell+1}P}{\partial t^{\ell}\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C, \quad \ell \geq 0, \quad i=1\ldots n.$$

Оценим теперь $\dfrac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}$ в $L_2(G)$, $\ell \geq 0$:

$$\int_G \left(\frac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}\right)^2 dx = \int_G \left(\frac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}\right)^2 \frac{\partial x_i}{\partial x_i} dx = \int_G \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}\right)^2 x_i\right] dx -$$

$$-\int_G 2\frac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}\,\frac{\partial^{\ell+1}P}{\partial t^{\ell}\partial x_i}\, x_i dx = \left(\text{ так как } \frac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}\Big|_{\partial G} = 0\right) =$$

$$= -\int_G 2\frac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}\, x_i\, \frac{\partial^{\ell+1}P}{\partial t^{\ell}dx_i}\, dx.$$

Отсюда

$$\left\|\frac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}, L_2(G)\right\|^2 \leq \left(\int_G\left(2\frac{\partial^{\ell+1}P}{\partial t^{\ell}\partial x_i}\, x_i\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_G\left(\frac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

или

в силу (1.14), $$\left\|\frac{\partial^{\ell}P}{\partial t^{\ell}}, L_2(G)\right\| \leq C_1, \quad \ell \geq 0. \tag{1.15}$$

Пользуясь системой уравнений (1), найдем уравнение, которому должно удовлетворять P (при $n=3$ см., например, [4]).

Дифференцируя i-е уравнение (1) по x_i, $i=1,\ldots n$, а потом складывая, получаем

$$\bar{\omega}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \bar{\omega}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \Delta P = 0. \qquad (1.16)$$

Далее вычтем из второго уравнения (1), продифференцированного по x_1, первое уравнение, продифференцированное по x_2, имеем

$$\bar{\omega}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right). \qquad (1.17)$$

Дифференцируя (1.16) по t и подставляя вместо $\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\omega}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \bar{\omega}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)$ его выражение из (1.17), получаем

$$\bar{\omega}^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) + \mathcal{D}_t \Delta P = 0. \qquad (1.18)$$

Теперь, подставляя вместо $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ его выражение из $(n+1)$-го уравнения (1), будем иметь

$$-\bar{\omega}^2\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_4}{\partial x_4} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}\right) + \mathcal{D}_t \Delta P = 0, \qquad (1.19)$$

Продифференцировав (1.19) по t и подставив, пользуясь (1), вместо

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_i}, \quad i = 3 \ldots n, \; -\frac{\partial^2 P}{\partial x_i^2},$$

получим $$\mathcal{D}_t^2 \Delta P + \bar{\omega}^2 \Delta' P = 0, \qquad (1.20)$$

где $$\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Проведем теперь оценки P, пользуясь методикой [8].

Лемма 1. *Пусть G' - подобласть G, $\bar{G}' \subset G$. Тогда для P имеют место оценки:*

$$\| \mathcal{D}_t^{\ell} \mathcal{D}^2_{x_j x_k} P, L_2(G') \| \le c_1 t + c_2, \; j, k = 1 \ldots n, \qquad (1.21)$$

$$\| \mathcal{D}_t^{\ell-1} \mathcal{D}_{x_i} \nabla P, L_2(G') \| \le c_3 t + c_4, \; \ell \ge 1, \; i = 3 \ldots n, \qquad (1.22)$$

где константы c_i зависят от области G', но не зависят от t.

Доказательство. Пусть функция $\chi(x)\in C_0^\infty(G)$ тождественно равна 1 на $\overline{G'}$ и 0 вне G'', где $\overline{G''}\subset G$, $\overline{G'}\subset G''$. Действуя оператором $\mathcal{D}_t^2\Delta+\overline{\omega}^2\Delta'$ на функцию $\sigma(t,x)=\chi(x)P(t,x)$, получаем

$$\mathcal{D}_t^2\Delta\sigma+\overline{\omega}^2\Delta'\sigma=(\vec{a}_1(x),\mathcal{D}_t^2\nabla P)+(\vec{a}_2(x),\nabla'P)+a_3(x)\mathcal{D}_t^2P+a_4(x)P, \tag{1.23}$$

где коэффициенты $a_i(x)\in C_0^\infty$ зависят от $\chi(x)$,

$$\nabla'=\frac{\partial}{\partial x_3}\vec{i}_3+\frac{\partial}{\partial x_4}\vec{i}_4+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\vec{i}_n.$$

Обозначим правую часть (1.23) через $f(t,x)$. Из оценок (1.14), (1.15) вытекает равномерная по t оценка

$$\| f(t,x),L_2(G)\|\leq C. \tag{1.24}$$

Умножая скалярно в $L_2(G)$ обе части равенства (1.23) на функцию $\mathcal{D}_t\Delta\sigma$ и интегрируя от 0 до t, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_G(\mathcal{D}_t\Delta\sigma)^2dx+\sum_{k=3}^n\sum_{i=1}^n\int\limits_G\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)^2dx\Bigg|_0^t=\int\limits_0^t\int\limits_G f\mathcal{D}_{t'}\Delta\sigma\,dx\,dt'. \tag{1.25}$$

Из (1.24) следует равномерная по t оценка

$$\|\mathcal{D}_t\Delta\sigma(t,x),L_2(G)\|\leq c_1+c_2t.$$

Поскольку $\sigma(t,x)\equiv 0$ при $x\in\overline{G}\setminus G''$, то $\forall j,\ k=1\ldots n$, имеет место оценка

$$\|\mathcal{D}_t\mathcal{D}_{kj}^2\sigma(t,x),L_2(G)\|\leq c_1+c_2t. \tag{1.26}$$

Учитывая эту оценку, из (1.25) получаем, что

$$\sum_{k=3}^n\sum_{i=1}^n\left(\int\limits_G\left|\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq c_3+c_4t. \tag{1.27}$$

Так как $\sigma(t,x)=\chi(x)p(t,x)$, то из (1.26), (1.27) следуют оценки (1.21), (1.22) при $\ell=1$. Для доказательства оценок (1.21), (1.22) при $\ell\geq 2$ продифференцируем обе части (1.23) по t $\ell-1$ раз и, умножив скалярно на функцию $\mathcal{D}_t^\ell\Delta\sigma$, повторим предыдущие рассуждения.

Лемма 2. *Пусть* P *– компонента решения задачи* (1), *а* G' *– подобласть области* G, $\overline{G'}\subset G$. *Тогда для* P *имеют место оценки* (1.1), (1.2) и

$$\|\mathcal{D}_t^{\ell-1}\mathcal{D}_x^{\alpha}\mathcal{D}_{x_\kappa}P, L_2(G')\| \leq \tilde{C}_3^0 t^m + \tilde{C}_4^0, \tag{1.28}$$

где $|\alpha| = m$, $\kappa = 3,4\dots n$, $\ell \geq 1$, - *константы зависящие от* G' , *но не зависящие от* t .

Доказательство аналогично проведенному в [8].

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 3 из [8 , § 3] , получаем оценки (1.7) , а используя интерполяционные неравенства [10], получаем (1.8)

Оценим v_i, $i = 3\dots n$. Из системы (1) имеем

$$(\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_i)^2 = (\mathcal{D}_t^{\ell-1}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m \mathcal{D}_{x_i} P)^2, \quad i = 3,\dots,n.$$

Интегрируя по G' и пользуясь (1.28), получаем

$$\|\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_i, L_2(G')\| \leq \tilde{C}_3^0 t^m + \tilde{C}_4^0.$$

Из системы (1) имеем

$$\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_i = -\int_0^t \mathcal{D}_{x_\kappa}^m \mathcal{D}_{x_i} P d\tau + \mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_i^0, \quad i = 3,\dots,n.$$

Отсюда

$$\|\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_i, L_2(G')\| \leq \left(t\int_0^t\int_{G'}(\mathcal{D}_{x_\kappa}^m \mathcal{D}_{x_i} P)^2 dx d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + C',$$

или

$$\|\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_i, L_2(G')\| \leq \tilde{C}_3' t^{m+1} + \tilde{C}_4'.$$

Итак, получим оценки (1.3), (1.4). Аналогично предыдущему получаем (1.10), (1.9).

Оценим теперь v_1 и v_2 . Пусть $\ell \geq 0$. Дифференцируя первое уравнение (1) по t ℓ раз и по x_κ, $\kappa = 1\dots n$, m раз, затем умножая на $\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_2$, получаем

$$\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_1 \cdot \mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_2 - \bar{\omega}\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_2 \cdot \mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_2 + \mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_1}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m P \cdot \mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m v_2 = 0. \tag{1.29}$$

Дифференцируя второе уравнение (1) по t ℓ раз и по x_κ, $\kappa = 1\dots n$, m раз, а затем, умножая на $\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_\kappa}^m \cdot v_1$, получаем

$$\bar{\omega}\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1\cdot\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1+\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_2\cdot\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1+$$

$$+\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}\mathcal{D}_{x_2}p\cdot\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1=0. \qquad (1.30)$$

Вычитая из (1.30), (1.29), имеем

$$\bar{\omega}\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1\right)^2+\bar{\omega}\frac{1}{2}\mathcal{D}_t\left(\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_2\right)^2=\mathcal{D}_t\Big[\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_1}\mathcal{D}_{x_k}^{m}p\times$$
$$\times\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_2-\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_2}\mathcal{D}_{x_k}^{m}p\cdot\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1\Big]+\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_k}^{m}\mathcal{D}_{x_2}p\cdot\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1-$$
$$-\mathcal{D}_t^{\ell+1}\mathcal{D}_{x_k}^{m}\mathcal{D}_{x_1}p\cdot\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_2. \qquad (1.31)$$

Интегрируя обе части (1.31) по G' и по τ от 0 до t, будем иметь:

$$\frac{1}{2}\int_{G'}\left(\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1\right)^2+\left(\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_2\right)^2dx\leqslant$$
$$\leqslant C(G')\|\mathcal{D}_t^{\ell}p,W_2^{m+1}(G')\|\cdot\left(\int_{G'}\left(\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_2\right)^2+\left(\mathcal{D}_t^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+C_1(G')\int_0^t\|\mathcal{D}_\tau^{\ell+1}p,W_2^{m+1}(G')\|\cdot\left(\int_{G'}\left(\mathcal{D}_\tau^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_2\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\mathcal{D}_\tau^{\ell}\mathcal{D}_{x_k}^{m}v_1\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}d\tau+C_2(G').$$

Из этой оценки и из (1.1), (1.2) получаем (1.5), (1.6) , а также (1.11). Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору С.В.Успенскому за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики.- Изв. АН СССР. Серия мат., 1954, т,18, № 1, с. 3-50.
2. Масленникова В.Н. Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для системы Соболева - Сиб.мат. журн., 1968, т.9, № 5, с. 1182-1198.

3. Зеленяк Т.И., Михайлов В.П. Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t \to \infty$.- В кн.: Дифференциальные уравнения. Труды симпозиума, М., Наука, 1970, с.96-118.
4. Зеленяк Т.И. Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными.- Новосибирск, НГУ, 1970.-164 с.
5. Капитонов Б.В. Асимптотика решений краевых задач для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости: Дис. на соиск. учен.степ. канд. физ.-мат. наук 01.01.02 .- Новосибирск, Б.и.,1977.
6. Капитонов Б.В. Теория потенциала для уравнений малых колебаний вращающейся жидкости.- Мат.сб., 1979, т.109, №4, с. 607-628.
7. Дезин А.А. Инвариантные дифференциальные операторы и граничные задачи.- Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1962, т.68, с. 3-88.
8. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О смешанных краевых задачах для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л.Соболева) . 1980, №2, с.92-115.
9. Янов С.И. О сведении смешанных задач для одного класса систем не типа Коши-Ковалевской к уравнениям Фредгольма второго рода.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. (Труды семинара С.Л. Соболева), 1981, №1, с.139-149.
10. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.- М.: ИЛ., 1980.- 664 с.