УДК 518:517.392

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ГАУССОВА ТИПА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Г.Г.Распутин (Архангельск)

Вопрос о существовании кубатурных формул гауссова типа изучался многими авторами и к настоящему времени в значительной степени исследован (см., например, [1]). В настоящей работе рассматриваются две основные вычислительные задачи, возникающие при фактическом построении гауссовых формул, - вычисление узлов и коэффициентов формулы.

Пусть $\Omega \subset R^2$ - область интегрирования. Рассматривая интеграл

$$\mathcal{J}(F)=\iint\limits_{\Omega} p(x,y)\cdot F(x,y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

предполагаем, что $p(x,y)$ - неотрицательная в Ω весовая функция, для которой при всех целых i,j существуют моменты $\mathcal{J}(x^i\cdot y^j)$, причем $\mathcal{J}(1)>0$.

Первым утверждением общего характера о существовании кубатурных формул с узлами в общих нулях ортогональных многочленов была следующая теорема, установленная в 1969 г. И.П. Мысовских [2] и независимо от него Строудом [3].

Теорема 1. *Если два ортогональных многочлена $f(x,y)$, $g(x,y)$ степени s для области Ω и веса $p(x,y)$ имеют точно $\sigma = s^2$ общих, конечных и попарно различных нулей (x_i,y_i), $i=1,2,\ldots,\sigma$, то для интеграла (1) существует кубатурная формула*

$$\mathcal{J}(F)\cong\sum_{i=1}^{\sigma} C_i\cdot F(x_i,y_i), \tag{2}$$

имеющая алгебраическую степень точности $d=2s-1$.

Позже эта теорема обобщалась в различных направлениях. Ниже мы ограничимся рассмотрением кубатурных формул (2). Считая, что выбор ортогональных многочленов f и g для построения кубатурной формулы (2) осуществлен, обратимся к вычислению ее параметров.

1. Приведем некоторые вспомогательные утверждения. Пусть $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})$ - алгебраические многочлены из кольца $C[\bar{x}]$ многочленов от n переменных $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $s_k = \deg f_k$, $J(\bar{x})$ - якобиан этих многочленов. Будем считать, что многочлены $f_1, f_2, \dots, f_n$ имеют только простые конечные общие нули; пусть это точки $\bar{x}^{(\alpha)}(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots, x_n^{(\alpha)})$, $\alpha = 1, 2, \dots, \mu$. Вследствие простоты нулей при всех α имеем $J(\bar{x}^{(\alpha)}) \neq 0$. Зафиксируем некоторое β, $1 \le \beta \le \mu$, и запишем многочлены $f_k(\bar{x})$ в следующем виде:

$$f_k(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_k^{(i)}(\bar{x}) \cdot (x_i - x_i^{(\beta)}), \tag{3}$$

для чего достаточно, например, разложить $f_k(\bar{x})$ по формуле Тейлора. Ясно, что в выборе многочленов $f_k^{(i)}(\bar{x})$ имеется некоторый произвол. Если равенство (3) получено непосредственно применением формулы Тейлора, то $\deg f_k^{(i)} \le$ $\le s_k - 1$. В дальнейшем будем предполагать, что эти неравенства выполняются. Рассмотрим многочлен

$$L_\beta(\bar{x}) = \det(f_k^{(i)}(\bar{x}))(\deg L_\beta \le \sum_{k=1}^{n} s_k - n). \tag{4}$$

Лемма 1. *Многочлен* $L_\beta(\bar{x})$ *удовлетворяет следующему условию:*

$$L_\beta(\bar{x}^{(\alpha)}) = \delta_{\alpha\beta} \cdot J(\bar{x}^{(\beta)}),$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ *- символ Кронекера.*

Доказательство. 1) Возьмем произвольное α, $\alpha \neq \beta$, и пусть $a_{ik} = f_k^{(i)}(\bar{x}^{(\alpha)})$, $\xi_i = x_i^{(\alpha)} - x_i^{(\beta)}$. Из (3) получаем

$$0 = f_k(\bar{x}^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot \xi_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{5}$$

Рассматривая (5) как линейную однородную алгебраическую систему, имеющую ненулевое решение $(\bar{x}^{(\alpha)} \neq \bar{x}^{(\beta)})$, можем утверждать, что $L_\beta(\bar{x}^{(\alpha)}) =$ $= \det(a_{ik}) = 0$.

2) Для вычисления $L_\beta(\bar{x}^{(\beta)})$ воспользуемся следующими равенствами:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\bar{x}^{(\beta)}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k^{(j)}(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot (x_j - x_j^{(\beta)}) + f_k^{(i)}(\bar{x})\right)\Bigg|_{\bar{x} = \bar{x}^{(\beta)}} = f_k^{(i)}(\bar{x}^{(\beta)}).$$

Учитывая их, находим

$$L_\rho(\bar{x}^{(\rho)}) = \det(f_\kappa^{(i)}(\bar{x}^{(\rho)})) = \det\left(\frac{\partial f_\kappa}{\partial x_i}(\bar{x}^{(\rho)})\right) = J(\bar{x}^{(\rho)}).$$

В следующей лемме сформулирована степень неоднозначности в выборе многочлена $L_\rho(\bar{x})$.

Лемма 2. *Пусть для многочленов* $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})$ *указаны два разных изображения вида* (3) *в окрестности одного общего нуля,* $L(\bar{x})$ *и* $\tilde{L}(\bar{x})$ *- соответствующие этим изображениям многочлены, построенные согласно* (4). *Тогда* $\tilde{L} = L + a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + \ldots + a_n \cdot f_n$, *где* $a_1(\bar{x}), a_2(\bar{x}), \ldots, a_n(\bar{x})$ *- некоторые многочлены.*

Доказательство. Рассмотрим многочлен $r(\bar{x}) = \tilde{L}(\bar{x}) - L(\bar{x})$. Вследствие леммы 1, $r(\bar{x}^{(\alpha)}) = 0$ для всех α . Тогда, по обобщенной теореме М.Нётера [4] , найдутся многочлены $a_1(\bar{x}), a_2(\bar{x}), \ldots, a_n(\bar{x})$ такие, что $r = a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + \ldots + a_n \cdot f_n$, откуда получаем необходимое.

2. При вычислении узлов кубатурной формулы гауссова типа возникает необходимость находить все решения некоторой системы нелинейных алгебраических уравнений (сокращенно решений СНАУ).

Будем говорить для определенности о системе n уравнений с n неизвестными

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{0} \tag{6}$$

(здесь $\bar{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^n$, $\bar{f}(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})) \in (C[\bar{x}])^n$; как и в п.1, предположим, что $f_1, f_2, \ldots, f_n$ имеют только простые конечные общие нули).

Процесс вычисления всех конечных решений СНАУ обычно распадается на два этапа:

1) определение начальных приближений ко всем решениям СНАУ;

2) уточнение начальных приближений для получения решений с требуемой точностью.

Поиск начальных приближений ко всем решениям СНАУ уже при $n=2$ и сравнительно небольших степенях уравнений требует значительных усилий, его трудно осуществить на ЭВМ. При бо́льших n трудности неизмеримо возрастают. С другой стороны, в случае $n=1$ первый этап не является принципиально необходимым. Действительно, вычисляя (например, методом Мюллера) какой-нибудь из корней x_1 алгебраического многочлена $f(x)$, переходим к рассмотрению многочлена $f^{(1)}(x) : f(x) = f^{(1)}(x) \cdot (x - x_1)$ и т.д.

На основании леммы 1 можно предложить естественное обобщение этого алгоритма на многомерный случай. Полученный алгоритм можно назвать "методом исключения решений СНАУ".

Применяя один из методов вычисления решения нелинейной системы, найдем какое-нибудь решение СНАУ (6), пусть это будет $\bar{x}^{(1)}$ (можно применить, например, метод Ньютона-Канторовича, начиная итерации с произвольной точки в C^n; с вероятностью 1 они сойдутся к одному из решений СНАУ). Построим в соответствии с (4) многочлен $L_1(\bar{x})$ и перейдем к рассмотрению новой СНАУ:

$$\begin{cases} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{0}, \\ L_1(\bar{x}) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Вычислим какое-нибудь решение $\bar{x}^{(2)}$ системы (7). Так как $L_1(\bar{x}^{(1)}) \neq 0$, то $\bar{x}^{(2)} \neq \bar{x}^{(1)}$ и $\bar{x}^{(2)}$- решение исходной СНАУ (6), $(\bar{f}(\bar{x}^{(2)}) = \bar{0})$. Далее обратимся к следующей СНАУ:

$$\begin{cases} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{0}, \\ L_1(\bar{x}) = 0, \\ L_2(\bar{x}) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

и т.д. Таким образом, в принципе получаем возможность последовательно определять все решения СНАУ (6), не занимаясь специально поиском начальных приближений к ним. Каждый шаг алгоритма позволяет исключить одно решение системы, но с каждым шагом вспомогательные системы (7), (8), . . . принимают все более сложный вид. Для того чтобы исходная СНАУ была решена в целом, нужно иметь в распоряжении эффективный метод вычисления "частного" решения сколь угодно сложной СНАУ.

Если левые части исходной СНАУ (6) - действительные многочлены и она имеет только действительные решения, то это затруднение преодолевается просто. В этом случае вместо (7), (8), . . . можно рассматривать, например, такие СНАУ:

$$\begin{cases} f_1^2(\bar{x}) + L_1^2(\bar{x}) = 0, \\ f_2(\bar{x}) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(\bar{x}) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_1^2(\bar{x}) + L_1^2(\bar{x}) + L_2^2(\bar{x}) = 0, \\ f_2(\bar{x}) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(\bar{x}) = 0, \ \ldots, \end{cases}$$

в которых число уравнений остается прежним.

3. Считая узлы кубатурной формулы (2) известными, рассмотрим вопрос о вычислении ее коэффициентов. Пусть P_d - линейное пространство действительных алгебраических многочленов $\varphi(x,y)$ степени не выше d, $\tau = \dim P_d = (d+1)(d+2)/2$, $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \ldots, \varphi_\tau(x,y)$ - базис P_d (например, одночлены $x^i y^j$, $i,j \geq 0$, $i+j \leq d$, занумерованные произвольным образом). Условия алгебраической точности формулы (2) приводят к системе линейных алгебраических

уравнений для ее коэффициентов

$$\sum_{i=1}^{\sigma} C_i \cdot \varphi_\kappa (x_i, y_i) = \mathcal{I}(\varphi_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, \ldots, \tau. \tag{9}$$

Определение коэффициентов кубатурной формулы непосредственно из системы (9) часто затрудняется тем, что линейные системы типа (9), как правило, плохо обусловлены. Поэтому при фактическом построении кубатурных формул стараются избегать таких систем и применяют специальные приемы для вычисления коэффициентов, учитывающие те или иные особенности кубатурной формулы.

Например, для кубатурной формулы вида (2), имеющей алгебраическую степень точности $d = 2s$ и наименьшее возможное число узлов $\nu = (s+1)(s+2)/2$, коэффициенты можно вычислить по формулам [5]:

$$C_i = K_s^{-1} (x_i, y_i ; x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{10}$$

где
$$K_s(x, y ; \xi, \eta) = \sum_{j=1}^{\nu} \Phi_j (x, y) \cdot \Phi_j (\xi, \eta);$$

$\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y), \ldots, \Phi_\nu (x,y)$ - ортонормированный базис пространства P_s, наделенного скалярным произведением $\langle\varphi, \psi\rangle = \mathcal{I}(\varphi \cdot \psi)$. Формулы (10) являются обобщением известных формул для коэффициентов квадратур [6 с. 61] и доставляют устойчивый метод вычисления коэффициентов C_i.

Для коэффициентов кубатурной формулы (2) гауссова типа также можно указать простые выражения, аналогичные известным в одномерном случае и позволяющие автоматизировать процесс их вычисления.

В соответствии с (4) для $i = 1, 2, \ldots, \sigma$ построим многочлены

$$l_i(x, y) = \frac{L_i (x, y)}{L_i (x_i, y_i)} = \frac{\det \begin{pmatrix} f^{(1,i)}, & f^{(2,i)} \\ g^{(1,i)}, & g^{(2,i)} \end{pmatrix} (x, y)}{J (x_i, y_i)},$$

где $J(x, y)$ - якобиан многочленов f, g ; $f^{(j,i)}, g^{(j,i)}$ - многочлены в разложениях

$$\begin{aligned} f &= f^{(1,i)} \cdot (x - x_i) + f^{(2,i)} \cdot (y - y_i), \\ g &= g^{(1,i)} \cdot (x - x_i) + g^{(2,i)} \cdot (y - y_i), \end{aligned} \tag{11}$$

на выбор которых накладываем единственное ограничение:

$$\deg f^{(j,i)},\ \deg g^{(j,i)} \le s-1.$$

Многочлен $\ell_i(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\ell_i(x_i,y_i)=\delta_{ij},\quad \deg \ell_i \le 2s-2. \tag{12}$$

Принимая во внимание (12) и степень точности кубатурной формулы (2), находим значения ее коэффициентов

$$C_i=\mathcal{J}(\ell_i)=\frac{\langle f^{(1,i)},g^{(2,i)}\rangle-\langle g^{(1,i)},f^{(2,i)}\rangle}{\mathcal{J}(x_i,y_i)},\quad i=1,2,\dots,6. \tag{13}$$

Отметим, что C_i не зависят от выбора многочленов $f^{(j,i)}, g^{(j,i)}$ в разложениях (11). Действительно, пусть имеются другие изображения (11) для f и g с множителями $\tilde f^{(j,i)}, \tilde g^{(j,i)}$. Для соответствующего многочлена $\tilde\ell_i(x,y)$

с учетом леммы 2 получаем $\tilde\ell_i=\ell_i+\varphi_i\cdot f+\psi_i\cdot g$, где $\deg\varphi_i,\deg\psi_i\le s-2$

(учитываем ограничение на степени $f^{(j,i)}, g^{(j,i)}$). Используя ортогональность многочленов f и g, находим

$$\mathcal{J}(\tilde\ell_i)=\mathcal{J}(\ell_i)+\mathcal{J}(f\cdot\varphi_i)+\mathcal{J}(g\cdot\psi_i)=\mathcal{J}(\ell_i).$$

Замечания. 1) Если многочлены $f(x,y)$ и $g(x,y)$ ортогональны лишь к многочленам из P_{s-2}, то существует кубатурная формула вида (2), имеющая степень точности $(2s-2)$ (см. [7]). Выражения (13) остаются справедливыми и для ее коэффициентов.

2) Пусть $(a,b),(c,d)\in R^2:\ K_s(a,b;c,d)=0$,

$$f(x,y)=K_s(x,y;a,b),\quad g(x,y)=K_s(x,y;c,d).$$

Тогда эффективный способ построения интерполяционных кубатурных формул доставляет (см. [7]) следующая

Теорема 2. *Если многочлены $f(x,y)$, $g(x,y)$ имеют точно $\sigma=s^2$ общих, конечных и попарно различных нулей (x_i,y_i), $i=1,2,\dots,\sigma$, то для интеграла (1) существует кубатурная формула*

$$\mathcal{J}(F)\cong A\cdot F(a,b)+B\cdot F(c,d)+\sum_{i=1}^{6}C_i\cdot F(x_i,y_i), \tag{14}$$

имеющая алгебраическую степень точности $2s$ *, причем*

$$A = K_s^{-1}(a,b;a,b), \quad B = K_s^{-1}(c,d;c,d).$$

В этом случае также можно использовать способ вычисления коэффициентов кубатурной формулы, изложенный в п.3.

Зафиксировав произвольное i, для узла (x_i,y_i) и многочленов f и g построим многочлен $L_i(x,y)$ в соответствии с (4) так, чтобы $\deg L_i \le 2s$. Записав условие точности формулы (14) для этого многочлена, получаем

$$J(L_i) = A\cdot L_i(a,b) + B\cdot L_i(c,d) + C_i\cdot L_i(x_i,y_i),$$

откуда находим выражения для коэффициентов C_i :

$$C_i = \left(J(L_i) - L_i(a,b)\cdot K_s^{-1}(a,b;a,b) - L_i(c,d)\cdot K_s^{-1}(c,d;c,d)\right)/J(x_i,y_i),$$

где J - якобиан многочленов f и g .

Литература

1. Mysovskikh J.P. The approximation of multiple integtals by using interpolatory cubature formulas. - Quantitative Approximation, ed. by R.A.De Vore and K.Scherer, New York, Academie Press, 1980, p.217-243.
2. Мысовских И.П. Кубатурные формулы и ортогональные многочлены. - Журн. вычислит. математики и мат. физ., 1969, т.9, № 2, с.419-425.
3. Stroud A.H. Integration formulas and orthogonal polynomials for two variables. - SIAM J. Numer.Analysis, 1969, № 6, p. 222-229.
4. Мысовских И.П. Общие нули ортогональных многочленов и кубатурные формулы. - Вестн. Ленингр. ун-та, 1973, № 7, с.40-49.
5. Мысовских И.П.К построению кубатурных формул с наименьшим числом узлов. - Докл. АН СССР, 1968, т.178, № 6, с. 1252-1254.
6. Сеге Г. Ортогональные многочлены. - М.: Физматгиз, 1962. - 500 с.
7. Möller H.M. Polynomideale und Kubaturformeln. - Dissertation in der Abteilung Mathematik der Universität Dortmund, Dortmund, 1973, 103 S.