УДК 517+518.87

ВЕСОВЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ ОПЕРАТОРАМ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В.И. Половинкин (Красноярск)

С.Л. Соболев [1] определил кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем. Последовательности их функционалов образуют последовательности функционалов с регулярным пограничным слоем (сокращенно ПФСРПС). С помощью последних была решена проблема построения асимптотически оптимальных решетчатых последовательностей кубатурных формул в пространствах $L_2^m(E_n)$, $L_2^m(\Omega)$. Исследования, относящиеся к данной проблеме для пространств $L_2^m(\Omega)$, $L_2^m(E_n)$, подробно изложены в [2]. В [3] были определены последовательности функционалов с пограничным слоем (ПФСПС), используя которые удалось решить задачу [4,5] о построении последовательностей решетчатых кубатурных формул, асимптотически оптимальных в пространствах $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$ при произвольных $p\in(1,\infty]$.

Для решения задачи о построении асимптотически оптимальных решетчатых последовательностей весовых кубатурных формул в $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$, $pm>n$, $p\in(1,\infty)$, с весовой функцией g из $L_q(\Omega)$, $q=(1-p^{-1})^{-1}$, были введены [6] последовательности (семейства) интерполяционных операторов с регулярным пограничным слоем (ПИОСРПС) и последовательности интерполяционных операторов с пограничным слоем (ПИОСПС) [7]. Класс ПИОСПС включает в себя как подкласс совокупность ПИОСРПС. Определения ПИОСРПС и ПИОСПС сходны с определениями ПФСРПС и ПФСПС. В [7] (см. также [8]) было установлено, что для любых $p\in(1,\infty)$ и $g\in L_q(\Omega)$ существует ПИОСПС такая, что последовательность кубатурных формул $\{l^h\}$ с функционалами ошибок:

$$(l^h,f)=\int_\Omega g(x)[f-\mathcal{J}^h f](x)dx \tag{1}$$

асимптотически оптимальна в $L_p^m(\Omega)$, $L_p^m(E_n)$.

В настоящей статье доказывается теорема, которая дает асимптотическое выражение $\|\ell^h\|_{L_2^{m*}(\Omega)}$ при стремлении шага решетки h к 0, где ℓ^h - функционалы вида (1), $L_2^{m*}(\Omega)$ - пространство, сопряженное к $L_2^m(\Omega)$, $\{J^h\}$ - ПИОСПС. В случае, когда $\{J^h\}$ - ПИОСРПС, эта теорема приводилась в [9]. Результат настоящей работы является аналогом для весовых кубатурных формул основных результатов [3, теорема 2] и [10, теорема на с.48].

Обозначения. Пусть E_n - n-мерное евклидово пространство; Ω - ограниченная область в E_n; $\partial\Omega$ - граница Ω; $G=$

$$=\{(x_1,\dots,x_n): 0<x_1,\dots,x_n<1\};$$

m - натуральное число, $m>n/2$; R - множество целочисленных векторов из E_n; h - положительный параметр; если $\gamma\in R$, то

$$\Omega_\gamma^h=\{x: x=hy+h\gamma,\ \ y\in G\};$$

$$Q(h,\gamma)=\Omega\cap\Omega_\gamma^h\ ,\ B_h=\{\gamma:\gamma\in R,\ \operatorname{mes} Q(h,\gamma)>0\};$$

L^m - множество функционалов, определенных на многочленах степени не выше m и равных на них 0.

Пусть M - область в E_n. Через $W_2^m(M)$ обозначим множество функций, заданных в M и обладающих в ней всеми обобщенными производными порядка m, которые квадратично суммируемы в M, а через $L_2^m(M)$ - гильбертово пространство, индуцированное билинейной формой на $W_2^m(M)$:

$$(\varphi,\psi)=\int_\Omega\sum_{j_1=1}^{n}\dots\sum_{j_m=1}^{n}\frac{\partial^m\varphi}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}}\cdot\frac{\partial^m\psi}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}}\,dx.$$

Если $f\in W_2^m(M)$ - представитель $F\in L_2^m(M)$, функционал $\ell\in L_2^{m*}(M)$, то (ℓ,f) будет обозначать (ℓ,F).

Предположим, что Ω может быть представлена в виде объединения конечного числа областей $\Omega_1,\dots,\Omega_K$, причем эти области звездны относительно некоторых шаров $S_1\subset\Omega_1,\dots,S_K\subset\Omega_K$.

Определение 1. Последовательность операторов $\{J^h\}$:

$$(J^hf)(x)=\sum_{\substack{\gamma\in R\\ h\gamma\in\overline{\Omega}}}f(h\gamma)g_\gamma^h(x),$$

где g_γ^h - некоторые функции, называется ПИОСПС в Ω, если $\mathcal{J}^h$ представимы в виде

$$\mathcal{J}^h=\sum_{\gamma\in B_h}\mathcal{J}_\gamma^h,$$

где $\mathcal{J}_\gamma^h$, $\gamma\in B_h$, - операторы, определенные над непрерывными в $\bar{\Omega}$ функциями f и такие, что

а) если f - многочлен степени ниже m, то

$$(\mathcal{J}_\gamma^h f)(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\in Q(h,\gamma);\\ 0 & \text{при } x\in\Omega\setminus Q(h,\gamma);\end{cases}$$

б) существуют постоянные M, $C>0$, конечное множество $\mu\subset R$, функции $g_{\gamma,\beta}^h$, g_β, $\beta\in\mu$, $\gamma\in B_h$, причем $g_{\gamma,\beta}^h$ определены в Ω и равны 0 в $\Omega\setminus Q(h,\gamma)$, g_β определены в E_n и равны 0 вне G, и для всех $x\in\Omega$ справедливо

$$(\mathcal{J}_\gamma^h f)(x)=\sum_{\beta\in\mu}f(h\gamma+h\beta)g_{\gamma,\beta}^h(x),\quad |g_{\gamma,\beta}^h(x)|<M,$$

при $\gamma\in B_h$, у которых расстояние от $h\gamma$ до $\partial\Omega$ больше Ch, $g_{\gamma,\beta}^h(x)=g_\beta(xh^{-1}-\gamma)$.

Определение 2. Если $\{\mathcal{J}^h\}$ -ПИОСПС, $\mu, g_\beta, \beta\in\mu$; - некоторые множество и функции, соответствующие ей в определении 1, то функционал ℓ

$$(\ell,f)=\int_G\Big[f(x)-\sum_{\beta\in\mu}f(\beta)g_\beta(x)\Big]dx$$

называется сопутствующим функционалом (сокращенно СФ) $\{\mathcal{J}^h\}$.

Замечание. ПИОСРПС, рассмотренные в [6,7] - это ПИОСПС, у которых СФ принадлежат L^m.

Пусть τ - некоторое положительное число, вектор $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in R$.

Обозначим

$$\Omega_\gamma^{\tau,h} = \{(x_1,\dots,x_n) : |x_i - \gamma_i| < \tau h, \ i=1,\dots,n\}.$$

Определение 3. Последовательность функционалов $\{\ell^h\}$ называется ПФСПС в $L_2^m(\Omega)$, если ℓ^h представимы в виде

$$\ell^h = \sum_{\gamma \in B_h} \ell_\gamma^h,$$

где ℓ_γ^h - функционалы из $L_2^{m*}(\Omega)$, обладающие следующими свойствами: существуют числа $\tau, K, C > 0$ и функционал ℓ, такие, что

$$supp\ \ell \subset \Omega_{(0,\dots,0)}^{\tau,1},$$

$$supp\ \ell_\gamma^h \subset \Omega_\gamma^{\tau,h}; \quad \|\ell_\gamma^h\|_{L_2^{m*}(\Omega_\gamma^{\tau,h})} < K h^{(2m+n)/2},$$

при $\gamma \in B_h$, у которых расстояние от $h\gamma$ до $\partial\Omega$ больше Ch.

$\ell_\gamma^h(x) = \ell(xh^{-1} - \gamma).$

Определение 4. Если $\{\ell^h\}$ - ПФСПС, ℓ - некоторый функционал, соответствующий ей в определении 3, то ℓ называется СФ $\{\ell^h\}$.

Определение 5. ПФСПС $\{\ell^h\}$ называется последовательностью функционалов ошибок с пограничным слоем (ПФОСПС), если существует конечное множество $\mu \subset R$, постоянные $c_{\gamma,\beta}^h$, $\beta \in \mu$, $\gamma \in B_h$, обладающие следующим свойством: функционалы ℓ_γ^h, соответствующие ей в определении 3, можно выбрать такими, что при $f \in W_2^m(\Omega)$, $\gamma \in B_h$, имеет место

$$(\ell_\gamma^h, f) = \int_{Q(h,\gamma)} f(x)dx - \sum_{\beta\in\mu} c_{\gamma,\beta}^h f(h\gamma + h\beta).$$

Определение 6. ПФОСПС называется ПФСРПС, если она обладает СФ, принадлежащим L^m.

Замечание. Из определений 1,2,4,5 следует, что если $\{\mathcal{J}^h\}$ - ПИОСПС ℓ - ее СФ, $\{\ell^h\}$ последовательность функционалов (1), то $\{\ell^h\}$ - ПФОСПС, ℓ - СФ $\{\ell^h\}$.

Если $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ - вектор из E_n с неотрицательными компонентами, f - функция, то будем обозначать

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!\,, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n\,, \quad x^\alpha = (x_1, \dots, x_n)^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\,,$$

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\,, \quad \|f\|_{L_2(\Omega)} = \left[\int_\Omega f^2(x)\,dx\right]^{1/2}.$$

Положим также $A_2^m = (2\pi)^{-2m} \sum\limits_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}' (\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2)^{-m}$.

Теорема. *Пусть* $\{J^h\}$ *- ПИОСПС,* ℓ *- ее СФ,* g *- функция, квадратично суммируемая в* Ω *,* ℓ^h *- функционалы (1),* ρ_g *- функционал*

$$(\rho_g, f) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{(\ell(x), x^\alpha)}{\alpha!} \int_\Omega g(x) f^{(\alpha)}(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Тогда при $h \to 0$ *справедливо*

$$\|\ell^h\|_{L_2^{m*}(\Omega)} = \left[\|\rho_g\|^2_{L_2^{m*}(\Omega)} + A_2^m \|g\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2} h^m (1 + o(1)). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть последовательность операторов $\{J^h\}$, функция g , функционалы ℓ^h, ℓ, ρ_g удовлетворяют условиям теоремы.

Если число $\tau > 0$, то через Φ^τ будем обозначать множество функций из $L_2(\Omega)$, равных нулю в некоторой окрестности $\partial\Omega$ и постоянных в каждом $Q(\tau, \gamma)$, $\gamma \in B_\tau$. Положим $\Phi = \bigcup\limits_{\tau > 0} \Phi^\tau$.

Установим вначале теорему при $g \in \Phi$.

Пусть при некотором $\tau > 0$ функция $g \in \Phi$. Тогда существуют векторы $\gamma(1), \dots, \gamma(s) \in B_h$ такие, что $\Omega^\tau_{\gamma(i)} \subset \Omega$, $i = 1, \dots, s = \overline{1,s}$, $g = 0$ в $\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} \Omega^\tau_{\gamma(i)}$ и постоянна в каждом $\Omega^\tau_{\gamma(1)}, \dots, \Omega^\tau_{\gamma(s)}$. Обозначим через c_i значения g в $\Omega^\tau_{\gamma(i)}$, $i = \overline{1,s}$.

Построим в каждом $\Omega^\tau_{\gamma(1)}, \dots, \Omega^\tau_{\gamma(s)}$ ПФОСПС с СФ ℓ , которые обозначим ℓ_h^i , $i = \overline{1,s}$, и положим

$$\ell_h = \sum_{i=1}^{s} c_i \, \ell_h^i . \qquad (4)$$

Так как $g \in \Phi^\tau$, то она ограничена. Поэтому методом из [11], применявшимся там для оценки порядка сходимости кубатурных формул, можно установить, что при $h \to 0$

$$\| \ell^h - \ell_h \|_{L_2^{m*}(\Omega)} = o(h^m) . \qquad (5)$$

Если область $M \subset \Omega$, то через $\overset{\circ}{L}{}_2^m (M, \Omega)$ будем обозначать замкнутое подпространство $L_2^m(\Omega)$, индуцированное функциями из $W_2^m(\Omega)$, равными нулю в некоторой окрестности $\partial\Omega$, в области M. Положим также

$$H_2^{m,s} = L_2^m(\Omega) \ominus \left[\bigoplus_{i=1}^{s} \overset{\circ}{L}{}_2^m (\Omega_{\gamma(i)}^\tau , \Omega) \right] . \qquad (6)$$

Из (5), (4) и (6) следует, что при $h \to 0$

$$\| \ell^h \|^2_{L_2^{m*}(\Omega)} = \| \ell_h \|^2_{H_2^{m,s*}} + \sum_{i=1}^{s} c_i^2 \| \ell_h^i \|^2_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(\Omega_{\gamma(i)}^\tau, \Omega)} + o(h^m). \qquad (7)$$

Оценим в (7) вначале слагаемые $\| \ell_h^i \|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(\Omega_{\gamma(i)}^\tau, \Omega)}$, $i = \overline{1,s}$.

В формулировке и доказательстве леммы, следующей ниже, будем предполагать, что границы всех рассматриваемых областей, не равных Ω, - кусочно-гладкие.

Лемма. *Если область M такова, что $\overline{M} \subset \Omega$, $\{\ell^h\}$ - ПФОСПС в M, то при $h \to 0$ имеет место*

$$\| \ell^h \|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)} = (A_2^m \operatorname{mes} M)^{1/2} h^m + o(h^m) .$$

Доказательство. Используя метод верхних оценок норм функционалов из [11], можно показать, что если ρ - функционал

$$(\rho, f) = \int\limits_G f(x)dx - \sum_{z\in\mu} c_z f(z), \quad \rho \in L^{m-1} \tag{8}$$

(μ - конечное подмножество R, c_z, $z\in\mu$, - постоянные), то существует константа K_ρ такая, что для любых областей $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \Omega$, $\mathcal{D}_1 \neq \mathcal{D}_2$ и ПФОСПС в $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ $\{\ell_1^h\}, \{\ell_2^h\}$ с СФ ρ при малых h выполняется

$$\|\ell_2^h - \ell_1^h\|_{L_2^{m*}(\Omega)} < K_\rho h^m \operatorname{mes}(\mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1). \tag{9}$$

Пусть область M такова, что $\overline{M} \subset \Omega$, $\{\ell^h\}$ - ПФОСПС в M, ℓ - СФ $\{\ell^h\}$. Выберем некоторый функционал ρ вида (8).

Из (9) следует, что существует постоянная $K>0$, обладающая следующим свойством: если область M_ε такова, что $\overline{M} \subset M_\varepsilon \subset \Omega$, ℓ_ε^h - ПФОСПС в M_ε с СФ ℓ, $\{\rho^h\}$, $\{\rho_\varepsilon^h\}$ - ПФСРПС в M и M_ε с СФ ρ, то при малых h справедливо

$$\|\ell_\varepsilon^h - \ell^h\|_{L_2^{m*}(\Omega)}, \|\rho_\varepsilon^h - \rho^h\|_{L_2^{m*}(\Omega)} < K h^m \operatorname{mes}(M_\varepsilon \setminus M). \tag{10}$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Выберем область M_ε так, что $\overline{M} \subset M_\varepsilon \subset \Omega$ и

$$\operatorname{mes}(M_\varepsilon \setminus M) \leq \frac{\varepsilon}{4K}, \tag{11}$$

где K - константа из (10). Построим в M_ε ПФОСПС с СФ ℓ, в M и M_ε ПФСРПС $\{\rho^h\}$, $\{\rho_\varepsilon^h\}$ с одинаковым СФ. Из (10) и (11) следует, что при малых h имеет место

$$\|\ell_\varepsilon^h - \ell^h\|_{\mathring{L}_2^{m*}(M,\Omega)} \leq \|\ell_\varepsilon^h - \ell^h\|_{L_2^{m*}(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{4} h^m \tag{12}$$

и аналогично

$$\|\rho_\varepsilon^h-\rho^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)}\leq\frac{\varepsilon}{4}h^m . \tag{13}$$

Так как

$$\|\ell^h-\rho^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)}\leq\|\ell^h-\ell_\varepsilon^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)}+$$

$$+\|\ell_\varepsilon^h-\rho_\varepsilon^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)}+\|\rho_\varepsilon^h-\rho^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)}$$

и при малых h верно $\|\rho_\varepsilon^h-\ell_\varepsilon^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)}=0$, то из (12) и (13) для таких h получаем

$$\|\ell^h-\rho^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)}\leq\varepsilon 2^{-1}h^m . \tag{14}$$

В [12] было показано, что для всех ПФСРПС $\{\rho^h\}$ в M при $h\to 0$ выполняется

$$\|\rho^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)}=\left(A_2^m \operatorname{mes} M\right)^{1/2}h^m\left(1+o(1)\right). \tag{15}$$

В частности, (15) верно и для $\{\rho^h\}$ из (13) и (14). Сравнивая (14) с (15), при малых h получаем

$$\left|\|\ell^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(M,\Omega)}-\left(A_2^m \operatorname{mes} M\right)^{1/2}h^m\right|\leq\varepsilon h^m . \tag{16}$$

Так как $\varepsilon>0$ в (16) произвольно, то лемма доказана.

Полагая $M=\Omega_{j(i)}^\tau$, $i=\overline{1,S}$, и учитывая, что для рассматриваемой нами g имеет место

$$\|g\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{S} c_i^2 \tau^n = \sum_{i=1}^{S} c_i^2 \operatorname{mes} \Omega^{\tau}_{\gamma(i)},$$

получаем из леммы, что

$$\sum_{i=1}^{S} c_i^2 \|\ell_h^i\|^2_{\overset{\circ}{L}{}_2^{m*}(\Omega^{\tau}_{\gamma(i)},\Omega)} = \|g\|^2_{L_2(\Omega)} A_2^m (1+o(1)). \tag{17}$$

Будем оценивать первое слагаемое правой части (7).

Если M - некоторая область в E_n, то через ρ_M будем обозначать функционалы

$$(\rho_M, f) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{(\ell(x), x^{\alpha})}{\alpha!} \int_M f^{(\alpha)}(x)dx.$$

Положим $\rho_h^i = h^m \rho_{\Omega^{\tau}_{\gamma(i)}}$, $i=\overline{1,S}$.

Последовательности функционалов $\{\rho_h^i\}$, $i=\overline{1,S}$, являются ПФСПС в $\Omega^{\tau}_{\gamma(i)}$ с СФ ρ_G.

В [9] показано, что если ℓ^h - ПФСРПС в некоторой области M,

$\overset{\circ}{L}{}_2^m(M) = \overset{\circ}{L}{}_2^m(M,M)$, $H_2^m(M) = L_2^m(M) \ominus \overset{\circ}{L}{}_2^m(M)$, то при $h \to 0$ справедливо

$$\|\ell^h\|_{H_2^{m*}(M)} = o(h^m). \tag{18}$$

Анализируя доказательство (18) из [9] и учитывая результаты [3], можно убедиться, что формула (18) остается справедливой и для произвольных $\{\ell^h\}$ с СФ из L^m.

Так как $\{\rho_h^i - \ell_h^i\}$ в $\Omega^{\tau}_{\gamma(i)}$, $i=\overline{1,S}$, являются ПФСПС с СФ из L^m, то из (18) вытекает, что при $h \to 0$ имеет место

$$\|\rho_h^i - \ell_h^i\|_{H_2^{m*}(\Omega^{\tau}_{\gamma(i)})} = o(h^m). \tag{19}$$

Из результатов [13] (см. также [2]), относящихся к полигармоническому уравнению

$$\Delta^m u = 0, \tag{20}$$

следует, что совокупность представителей элементов $H_2^{m,S}$ является множеством функций из $W_2^m(\Omega)$, удовлетворяющих в

$$\bigcup_{i=1}^{S} \Omega^{\tau}_{\gamma(i)}$$

уравнению (20), а совокупность представителей некоторого

$$H_2^m(\Omega^{\tau}_{\gamma(i)}), \quad i=\overline{1,S},$$

есть множество функций из

$$W_2^m(\Omega^{\tau}_{\gamma(i)}),$$

удовлетворяющих (20) в соответствующем кубе

$$\Omega^{\tau}_{\gamma(i)}.$$

Поэтому следы представителей элементов $H_2^{m,S}$ на $\Omega^{\tau}_{\gamma(i)}$, $i=\overline{1,S}$, – представители элементов

$$H_2^m(\Omega^{\tau}_{\gamma(i)}).$$

Отсюда, из (19) и неравенств

$$\|f\|_{L_2^m(\Omega^{\tau}_{\gamma(i)})} \leq \|f\|_{L_2^m(\Omega)} \quad \text{при } f \in W_2^m(\Omega)$$

вытекает

$$\|\rho_h^i - \ell_h^i\|_{H_2^{m,S*}} = o(h^m) \quad \text{при } h \to 0. \tag{21}$$

Для функции $g(x)$, рассматриваемой нами, функционал ρ_g вида (2) удовлетворяет равенству

$$h^m \rho_g = \sum_{i=1}^{s} c_i \rho_h^i . \tag{22}$$

Из (21),(4) и (22) при $h \to 0$ имеем

$$\| \ell^h \|_{H_2^{m,s*}} = h^m \| \rho_g \|_{H_2^{m,s*}} (1+o(1)). \tag{23}$$

Так как $g \in \Phi^\tau$, то функционал ρ_g равен нулю на любых представителях элементов

$$\overset{\circ}{L}{}_2^m (\Omega^\tau_{\gamma(i)}), \qquad i=\overline{1,s}.$$

Следовательно, (23) равносильно тому, что

$$\| \ell^h \|_{H_2^{m,s*}} = h^m \| \rho_g \|_{L_2^{m*}(\Omega)} (1+o(1)) \quad \text{при } h \to 0. \tag{24}$$

Из (24), (17) и (7) при $g \in \Phi^\tau$ вытекает (3).

Теорема 1 из [7] (см. также [8]) утверждает, что существует постоянная $K>0$, зависящая только от $\{\mathcal{J}^h\}$ и такая, что при любой $g \in L_2(\Omega)$ для функционалов $\{\ell^h\}$ вида (1) выполняется

$$\| \ell^h \|_{L_2^{m*}(\Omega)} \leq K \| g \|_{L_2(\Omega)} h^m . \tag{25}$$

Пусть $g \in L_2(\Omega)$ - произвольная, $\{g[\tau]\} \subset \Phi$ и

$\| g[\tau] - g \|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $\tau \to 0$, $\ell^{h,\tau}$ - функционалы,

$$(\ell^{h,\tau}, f) = \int_\Omega g[\tau](x)[f - \mathcal{J}^h f](x)dx.$$

Имеем

$$\left| \| \ell^h \|_{L_2^{m*}(\Omega)} - \left[\| \rho_g \|^2_{L_2^{m*}(\Omega)} + A_2^m \| g \|^2_{L_2(\Omega)} \right] h^m \right| \leq \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3, \quad (26)$$

где $$\mathcal{J}_1 = \left| \| \ell^h \|_{L_2^{m*}(\Omega)} - \| \ell^{h,\tau} \|_{L_2^{m*}(\Omega)} \right|,$$

$$\mathcal{J}_2 = \left| \| \ell^{h,\tau} \|_{L_2^{m*}(\Omega)} - h^m \left[\| \rho_{g[\tau]} \|^2_{L_2^{m*}(\Omega)} + \| g[\tau] \|^2_{L_2(\Omega)} A_2^m \right]^{1/2} \right|,$$

$$\mathcal{J}_3 = h^m \left| \left(\| \rho_{g[\tau]} \|^2_{L_2^{m*}(\Omega)} + \| g[\tau] \|^2_{L_2(\Omega)} A_2^m \right)^{1/2} - \left(\| \rho_g \|^2_{L_2^{m*}(\Omega)} + \| g \|^2_{L_2(\Omega)} A_2^m \right)^{1/2} \right|.$$

Зададим произвольно число $\varepsilon > 0$. Из теорем вложения для пространств типа W_2^m в пространство $L_2(\Omega)$ и неравенства Буняковского вытекает, что при $\tau \to 0$ имеет место

$$\| \rho_{g[\tau]} - \rho_g \|_{L_2^{m*}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Отсюда и из (25) следует, что существует $\tau > 0$ такое, что

$$\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_3 \leq 3^{-1} \varepsilon h^m. \quad (27)$$

Зафиксируем данное τ .

Формула (3) уже доказана для весовых функций из Φ , в частности, для $g[\tau]$, соответствующих $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_3$ из (27) . Поэтому при малых h выполняется $\mathcal{J}_2 \leq \varepsilon h^m 3^{-1}$. Отсюда, из (27) и (26) находим, что

при малых h имеет место

$$\left| \| \ell^h \|_{L_2^{m*}(\Omega)} - h^m \left[\| \rho_g \|^2_{L_2^{m*}(\Omega)} + A_2^m \| g \|^2_{L_2(\Omega)} \right]^{1/2} \right| \leq \varepsilon h^m. \quad (28)$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ в (28) произвольно, то теорема доказана.

Литература

1. Соболев С.Л. Кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем.- Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 3, с. 587-590.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974.- 808 с.
3. Половинкин В.И. Последовательности функционалов с пограничным слоем.- Сиб.мат.журн., 1974, т. 15, № 2, с. 413-429.
4. Половинкин В.И. Асимптотически наилучшие последовательности кубатурных формул.- Сиб.мат.журн., 1975, т.16, № 6, с. 1255-1262.
5. Половинкин В.И. Последовательности кубатурных формул с пограничным слоем.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Труды семинара С.Л. Соболева, № 1, Новосибирск, 1977, с. 149-158.
6. Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы.- Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 3, с. 542-544.
7. Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы в $L_p^m(\Omega)$.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, изд. Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1975, вып. 32, с. 99-104.
8. Половинкин В.И. Последовательности кубатурных формул и функционалов с пограничным слоем: Дис. на соиск. учен. степ. докт. физ.-мат. наук (01.01.07) - Л.,Б.и., 1979.- 240 с.
9. Половинкин В.И. Кубатурные формулы в $L_2^{(m)}(\Omega)$. - Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 1, с. 42-44.
10. Бесов О.В. Межъячеичные усреднения и оценка ошибок кубатурных формул в пространствах С.Л. Соболева и их обобщениях.- Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1977, т. 143, с. 42-57.
11. Половинкин В.И., Дидур Л.И. О порядке сходимости кубатурных формул.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, изд.Ин-та кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1975, вып.34, с.3-14.
12. Половинкин В.И. Некоторые оценки норм функционалов ошибок кубатурных формул.- Мат. заметки, 1969, т.5, вып.3, с.317-322.
13. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.- Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1962.- 251 с.