УДК 517.392

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО НЕКОТОРЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

М.В. Носков (Красноярск)

Исследуются весовые кубатурные формулы в пространствах функций, периодических по группе переменных, и рассматриваются методы построения весовых формул, в том числе формул, образующих асимптотически оптимальные последовательности. К рассмотрению интегралов от таких функций приводит задача об интегрировании по поверхности цилиндра. Построение кубатурных формул с постоянным весом в этих пространствах было приведено в [1]. Изучая весовой случай, в настоящей работе мы используем понятие последовательностей интерполяционных операторов с пограничным (регулярным пограничным) слоем [2] и метод декартовых произведений [3]. Последовательности функционалов погрешностей построенных кубатурных формул являются асимптотически оптимальными для указанных пространств в классе всех решетчатых кубатурных формул. В целом работа принадлежит к направлению, разработанному С.Л. Соболевым [4], и продолжает исследования, начатые в [1,5].

§1. Обозначения. Определения

Пусть E^K - K-мерное евклидово пространство, R^K - множество целочисленных векторов из E^K. Если M и N - множества, то $M \otimes N$ - их декартово произведение, а $d(M,N)$ - расстояние между множествами. Если $x^i = (x_1^i, \dots, x_{s_i}^i)$, $i = 1, \dots, t$, - векторы из E^{s_i}, то $\langle x^1, \dots, x^t \rangle = (x_1^1, \dots, x_{s_1}^1, x_1^2, \dots, x_{s_2}^2, \dots, x_{s_t}^t)$. Далее, Ω - область из E^K, $\partial\Omega$ - граница Ω, $i_\Omega(x)$ - характеристическая функция Ω. В лемме 3 и теоремах из § 3 области предполагаются звездными относительно некоторых шаров, содержащихся в них. Обсуждение условий на границе области, для которых результаты остаются верными, приведены в [6, 7].

Пусть $G_K = \{x = (x_1, \dots, x_K),\ 0 < x_1, \dots, x_K\}$-$K$-мерный единичный куб;

$$\Omega_\gamma^h = \{x : x = h\gamma + hy,\ y \in G\},\ \gamma \in R^K;\ Q_\gamma^h(\Omega) = \Omega \cap \Omega_\gamma^h;$$

$$B_h(\Omega) = \{y : y \in R^K,\ \operatorname{mes} Q_y^h(\Omega) > 0\};$$

$$D_h(\Omega) = \{y : y \in R^K,\ hy \in \bar{\Omega}\};$$

p, q, m - числа, $p \in (1, \infty)$, $q = p(p-1)^{-1}$, m - натуральное;

$L_p^m(\Omega)$ - множество функций, обладающих суммируемыми в степени p в Ω обобщенными производными порядка m.

Если $f(x) \in L_p^m(\Omega)$, то полунорма

$$\|f\|_{L_p^m(\Omega)} = \left[\int_\Omega m! \sum_{|\alpha|=m} (\alpha!)^{-1} \left(f_{(x)}^{(\alpha)}\right)^{p/2} dx\right]^{1/p} < \infty,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_K!$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_K$, $f_{(x)}^{(\alpha)} = \dfrac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_K^{\alpha_K}}$;

$\overset{\circ}{L}{}_p^m(\Omega)$ - множество функций из $L_p^m(\Omega)$, финитных в Ω.

Определение 1. Оператор $\mathcal{J}$,

$$(\mathcal{J}f)(x) = \sum_{\lambda \in \mu} P_\lambda(x) f(\lambda),$$

где μ - конечное множество точек из E^K, называется *интерполяционным оператором на* Ω, если $P_\lambda(x)$ - суммируемые на Ω функции, равные нулю на $E^K \setminus \Omega$.

Пусть $\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2$, $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ - интерполяционные операторы на Ω_1, Ω_2 с узлами интерполирования из множеств μ_1, μ_2 соответственно.

Определение 2. *Декартовым произведением* интерполяционных операторов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ называется оператор $\mathcal{J}$ на Ω:

$$(\mathcal{J}f)\langle x,y\rangle = \sum_{\lambda_1 \in \mu_1} \sum_{\lambda_2 \in \mu_2} P_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle}\langle x,y\rangle f\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle,$$

где $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$, $P_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle}\langle x,y\rangle$ удовлетворяет равенству

$$\iint_\Omega P_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle}\langle x,y\rangle dx dy = \int_{\Omega_1} P_{\lambda_1}(x) dx \cdot \int_{\Omega_2} P_{\lambda_2}(y) dy$$

для всех $\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle \in \mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Определение 3. Если $P_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle}\langle x,y\rangle = P_{\lambda_1}(x) \cdot P_{\lambda_2}(y)$ для всех

$<\lambda_1,\lambda_2>\in\mu$, то $\mathcal{J}$ назовем *простым декартовым произведением.*

Для обозначения декартова произведения интерполяционных операторов будем пользоваться символом $\odot$: $\mathcal{J}_1\odot\mathcal{J}_2$.

Определение 4. Последовательность интерполяционных операторов $\{\mathcal{J}^h\}$, $h\in H=\{h_1,h_2,\ldots\}$, на Ω называется *последовательностью равномерно распределенных интерполяционных операторов,* если

$$\mathcal{J}^h=\sum_{\gamma\in B_h(\Omega)}\mathcal{J}^h_\gamma, \tag{1}$$

где $\mathcal{J}^h_\gamma$ - интерполяционные операторы, определенные на непрерывных функциях со следующими условиями:

а) $(\mathcal{J}^h_\gamma(x^\alpha))(x)=i_{Q^h_\gamma(\Omega)}(x)\cdot x^\alpha$

при $|\alpha|<m$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_\kappa^{\alpha_\kappa}$;

б) $(\mathcal{J}^h_\gamma f)(x)=\sum\limits_{\beta\in\mu}f(h\gamma+h\beta)\,g^h_{\gamma,\beta}(x)$,

где μ – конечное множество из R^κ, $g^h_{\gamma,\beta}(x)$ - определенные в Ω функции, равные нулю вне $Q^h_\gamma(\Omega)$;

в) $|g^h_{\gamma,\beta}(x)|<M$, M - постоянное число.

Определение 5 [2]. Последовательность равномерно распределенных операторов называется *последовательностью интерполяционных операторов с пограничным слоем,* если

г) существуют число $C>0$ и функции $g_\beta(x)$, $\beta\in\mu$, определенные в E^κ, равные нулю вне G_κ, такие, что

$$g^h_{\gamma,\beta}(x)=g_\beta\left(\frac{x}{h}-\gamma\right),\quad x\in\Omega,$$

при $\gamma\in B'_h(\Omega)$ и $d(h\gamma,\partial\Omega)>Ch$.

Определение 6. Если $\{\mathcal{J}^h\}$, μ, $g_\beta(x)$, $\beta\in\mu$, - соответственно последовательность, множество и функции из определений 3,4, то интерполяционный оператор $\mathcal{J}$:

$$(\mathcal{J}f)(x)=\sum_{\beta\in\mu}g_\beta(x)f(\beta),$$

называется *сопутствующим оператором последовательности* $\{\mathcal{J}^h\}$.

Определение 7 [2,8]. Последовательность интерполяционных операторов с пограничным слоем называется *последовательностью интерполяционных операторов с регулярным пограничным слоем*, если ее сопутствующий интерполяционный оператор восстанавливает многочлены степени не выше m :

$$(\mathcal{J}(x^{\alpha}))(x) = x^{\alpha}\cdot i_{Q_{\gamma}^{h}(\Omega)}(x), \quad |\alpha|\leq m.$$

§ 2. Декартовы произведения интерполяционных операторов

Из определения 2 следует, что декартово произведение интерполяционных операторов, вообще говоря, некоммутативное и определено с точностью до функций $P<x,y>$, для которых

$$\iint\limits_{\Omega} P<x,y>dxdy = 0. \tag{2}$$

Принимая везде далее равенство функций как равенство "почти всюду", заметим, что множество $(\mathcal{J}_1 \odot \mathcal{J}_2)\odot \mathcal{J}_3$ совпадает с множеством операторов $\mathcal{J}_1 \odot (\mathcal{J}_2 \odot \mathcal{J}_3)$.

Лемма 1. *Пусть* $\{\mathcal{J}_1^h\}$ *и* $\{\mathcal{J}_2^h\}$ *– последовательности интерполяционных операторов с пограничным слоем на* Ω_1 , Ω_2 *соответственно и* $\{\mathcal{J}^h\}$ *– последовательность простых декартовых произведений* $\mathcal{J}^h$ *операторов* $\mathcal{J}_1^h$ *и* $\mathcal{J}_2^h$. *Тогда* $\{\mathcal{J}^h\}$ *– последовательность интерполяционных операторов с пограничным слоем.*

Доказательство. Положим

$$(\mathcal{J}_1^h f)(x) = \sum_{\gamma_1\in D_h(\Omega_1)} P^h_{1,\gamma_1}(x) f(\gamma_1 h), \tag{3}$$

$$(\mathcal{J}_2^h f)(y) = \sum_{\gamma_2\in D_h(\Omega_2)} P^h_{2,\gamma_2}(y) f(\gamma_2 h), \tag{4}$$

$$(\mathcal{J}^h f)<x,y> = \sum_{\gamma\in D_h(\Omega)} P^h_{\gamma}<x,y> f(\gamma h),$$

где $\gamma=<\gamma_1,\gamma_2>$, $P^h_{\gamma}<x,y> = P^h_{1,\gamma_1}(x)\cdot P^h_{2,\gamma_2}(y)$.

Заметим, что $D_h(\Omega)=D_h(\Omega_1)\otimes D_h(\Omega_2)$. Покажем, что $\{\mathcal{J}^h\}$ удовлетворяет всем требованиям определения 4.

Пусть

$$\mathcal{J}_i^h = \sum_{\gamma_i \in B_h(\Omega_i)} \mathcal{J}^h_{i,\gamma_i}\ , \quad i=1,2\ ;$$

$$(\mathcal{J}^h_{1,\gamma_1} f)(x) = \sum_{\beta_1 \in \mu_1} f(h\gamma_1 + h\beta_1)\, g^h_{\gamma_1,\beta_1}(x)\ ;$$

$$(\mathcal{J}^h_{2,\gamma_2} f)(y) = \sum_{\beta_2 \in \mu_2} f(h\gamma_2 + h\beta_2)\, g^h_{\gamma_2,\beta_2}(y)\ ;$$

$\beta = <\beta_1,\beta_2>$, $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ и $\mathcal{J}^h_\gamma$ - простое декартово произведение $\mathcal{J}^h_{1,\gamma_1}$ и $\mathcal{J}^h_{2,\gamma_2}$: $(\mathcal{J}^h_\gamma f)<x,y> = \sum_{\beta\in\mu} g^h_{\gamma,\beta}<x,y> f(h\gamma + h\beta)$,

где

$$g^h_{\gamma,\beta}<x,y> = g^h_{\gamma_1,\beta_1}(x)\cdot g^h_{\gamma_2,\beta_2}(y). \tag{5}$$

Покажем справедливость (1). Очевидно, что множество $B_h(\Omega) = B_h(\Omega_1)\otimes B_h(\Omega_2)$. Положим $<h\gamma_1 + h\beta_1, h\gamma_2 + h\beta_2> = <h\delta_1, h\delta_2>$. Тогда

$$\sum_{\gamma_1+\beta_1=\delta_1} \ \sum_{\gamma_2+\beta_2=\delta_2} g^h_{\gamma_1,\beta_1}(x)\cdot g^h_{\gamma_2,\beta_2}(y) =$$

$$= \sum_{\gamma_1+\beta_1=\delta_1} g^h_{\gamma_1,\beta_1}(x) \sum_{\gamma_2+\beta_2=\delta_2} g^h_{\gamma_2,\beta_2}(y) = P^h_{1,\delta_1}(x)\, P^h_{2,\delta_2}(y),$$

где $P^h_{1,\delta_1}(x)$, $P^h_{2,\delta_2}(y)$ - функции из (3), (4). Действительно, легко увидеть, что, например, $P^h_{1,\delta_1}(x)$ состоит из таких $g^h_{\gamma_1,\beta_1}(x)$, что $h\gamma_1 + h\beta_1 = h\delta_1$. Поэтому

$$\sum_{\gamma\in B_h(\Omega)} (\mathcal{J}^h_\gamma f)<x,y> =$$

$$= \sum_{<\gamma_1,\gamma_2>\in B_h(\Omega)} \ \sum_{<\beta_1,\beta_2>\in\mu} g^h_{\gamma_1,\beta_1}(x)\, g^h_{\gamma_2,\beta_2}(y) \times$$

$$\times f(h<\gamma_1,\gamma_2> + h<\beta_1,\beta_2>) = \sum_{<\delta_1,\delta_2>\in D_h(\Omega)} P^h_{1,\delta_1}(x)\times$$

$$\times P^h_{2,\delta_2}(y) f(h\delta_1, h\delta_2) = (\mathcal{J}^h f)<x,y>.$$

Из (5) следует выполнимость условий "а","б","в","г" определений 3,4.

Можно показать, что справедливость леммы 1 сохраняется, если последовательности в ее формулировке считать последовательностями интерполяционных операторов с регулярным пограничным слоем.

Неоднозначность построения декартова произведения интерполяционных операторов не существенна для кубатурных формул вида

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx \approx \int_{\Omega} (\mathcal{J}f)(x)\,dx,$$

где $\mathcal{J}=\mathcal{J}_1 \odot \mathcal{J}_2$. Это следует из представления $\mathcal{J}$ в виде

$$(\mathcal{J}f)<x,y> = \sum_{\lambda_1 \in \mu_1} \sum_{\lambda_2 \in \mu_2} (P_{<\lambda_1,\lambda_2>}<x,y> + P'_{<\lambda_1,\lambda_2>}<x,y>),$$

где $P'_{<\lambda_1,\lambda_2>}<x,y>$ удовлетворяет (2).

Пусть $\{\mathcal{J}^h\}$, $\{K^h\}$ - последовательности операторов на Ω, разложимых в декартово произведение операторов из последовательностей равномерно распределенных интерполяционных операторов $\{\mathcal{J}_1^h\}$ и $\{\mathcal{J}_2^h\}$ на Ω_1, Ω_2 соответственно:

$$K^h, \mathcal{J}^h \in \mathcal{J}_1^h \odot \mathcal{J}_2^h; \quad K^h = \sum_{\gamma \in B_h(\Omega)} K_\gamma^h, \quad \mathcal{J}^h = \sum_{\gamma \in B_h(\Omega)} \mathcal{J}_\gamma^h,$$

$K_\gamma^h, \mathcal{J}_\gamma^h \in \mathcal{J}_{1,\gamma_1}^h \odot \mathcal{J}_{2,\gamma_2}^h$, где $\gamma=<\gamma_1,\gamma_2>$ и $\mathcal{J}_{1,\gamma_1}^h$, $\mathcal{J}_{2,\gamma_2}^h$ - составляющие операторов $\mathcal{J}_1^h$, $\mathcal{J}_2^h$ (см. определение 3), $\Omega=\Omega_1 \otimes \Omega_2$,

$\omega<x,y> \in L_q(\Omega)$, $f \in L_p^m(\Omega)$, $\Omega \subset E^n$, $pm>n$.

Пусть ℓ_1 и ℓ_2 - функционалы вида

$$(\ell_1,f) = \int_{\Omega} \omega<x,y>(f-\mathcal{J}^h f)<x,y>dxdy,$$

$$(\ell_2,f) = \int_{\Omega} \omega<x,y>(f-K^h f)<x,y>dxdy$$

и выполнено

$$\|\ell_i\|_{L_p^{m*}(\Omega)} < K\|\omega\|_{L_q(\Omega)} h^m, \tag{6}$$

где $K>0$ не зависит от h и $\omega<x,y>$, $i=1,2$.

Имеет место следующая

Лемма 2. *Норма*

$$\left\| \int_{\Omega} \omega<x,y>(\mathcal{J}^h - K^h, f)<x,y>dxdy \right\|_{L_p^{m*}(\Omega)} = o(h^m) \quad \text{при } h \to 0.$$

Замечание. Условия леммы выполнены, например, если $\{\mathcal{J}^h\}$, $\{K^h\}$ - последовательности равномерно распределенных операторов.

Доказательство. Для любой функции $\omega\langle x,y\rangle \in L_q(\Omega)$ из (6) имеем

$$\left\| \int_\Omega \omega\langle x,y\rangle (\mathcal{J}^h - K^h, f)\langle x,y\rangle dxdy \right\|_{L_p^{m*}(\Omega)} =$$

$$= \left\| \int_\Omega \left[\omega\langle x,y\rangle (f - K^h f)\langle x,y\rangle - \omega\langle x,y\rangle (f - \mathcal{J}^h f)\langle x,y\rangle\right] dxdy \right\| =$$

$$= \| \ell_1^h \|_{L_p^{m*}(\Omega)} + \| \ell_2^h \|_{L_p^{m*}(\Omega)} < K_1 \|\omega\|_{L_q(\Omega)} h^m,$$

где K снова не зависит от $\omega\langle x,y\rangle$ и h.

Обозначим через Φ^τ множество функций, постоянных в каждом $Q_\gamma^\tau(\Omega)$, где $\gamma \in B_\tau(\Omega)$; $\Phi = \bigcup_{\tau>0} \Phi^\tau$.

Если $\omega_0 \in \Phi^\tau$, то при $h < \tau$, h - делитель τ, имеем:

$$\int_\Omega \omega_0\langle x,y\rangle (\mathcal{J}^h - K^h, f)\langle x,y\rangle dxdy =$$

$$= \int_\Omega \omega_0\langle x,y\rangle \sum_{\gamma \in B_h(\Omega)} (\mathcal{J}_\gamma^h - K_\gamma^h, f)\langle x,y\rangle dxdy =$$

$$= \int_\Omega \omega_0\langle x,y\rangle \sum_{\gamma \in B_h(\Omega)} \sum_{\beta \in \mu} \left[g_{\gamma,\beta}^h\langle x,y\rangle - \bar{g}_{\gamma,\beta}^h\langle x,y\rangle\right] f(h\gamma + h\beta) dxdy =$$

$$= \sum_{\gamma \in B_h(\Omega)} C_\gamma \int_{Q_\gamma^h(\Omega)} \sum_{\beta \in \mu} \left[g_{\gamma,\beta}^h\langle x,y\rangle - \bar{g}_{\gamma,\beta}^h\langle x,y\rangle\right] f(h\gamma + h\beta) dxdy = 0, \quad (7)$$

где C_γ - значение $\omega_0\langle x,y\rangle$ на $Q_\gamma^h(\Omega)$, а $g_{\alpha,\beta}^h\langle x,y\rangle, \bar{g}_{\gamma,\beta}^h\langle x,y\rangle$ - функции, получающиеся в результате декартова произведения операторов $\mathcal{J}_{1,\gamma_1}^h$ и $\mathcal{J}_{2,\gamma_2}^h$, поэтому разность $g_{\gamma,\beta}^h\langle x,y\rangle - \bar{g}_{\gamma,\beta}^h\langle x,y\rangle$ удовлетворяет равенству (2).

Выберем τ таким, чтобы для $\omega_0 \in \Phi$ выполнялось

$$\|\omega - \omega_0\|_{L_q(\Omega)} < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (8)$$

Тогда из (7), (8) и равенства

$$\int_\Omega \omega\langle x,y\rangle (\mathcal{J}^h - K^h, f)\langle x,y\rangle dxdy = \int_\Omega (\omega - \omega_0)\langle x,y\rangle (\mathcal{J}^h - K^h, f)\langle x,y\rangle dxdy +$$

$$+ \int_\Omega \omega_0\langle x,y\rangle (\mathcal{J}^h - K^h, f)\langle x,y\rangle dxdy = \int_\Omega (\omega - \omega_0)\langle x,y\rangle (\mathcal{J}^h - K^h, f)\langle x,y\rangle dxdy$$

получим

$$\left\| \int_{\Omega} \omega<x,y> (\mathcal{J}^h - K^h, f)<x,y> dx dy \right\|_{L_p^{m*}(\Omega)} <$$

$$< K \| \omega - \omega_0 \|_{L_q(\Omega)} h^m < K_1 \varepsilon h^m .$$

Из произвольности ε следует справедливость утверждения леммы 2.

§3. Формулы для интегрирования функций, периодических по некоторым переменным

Пусть $\Omega_1 = \bigotimes_{i=1}^{s} (0, a_i)$, h - делитель $a_1, \dots, a_s$,

$$H = \{h\},\ \Omega_2 \subset E^{n-s},\ \Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2,\ \omega_1(x) \in L_q(\Omega_1),\ \omega_1(x)$$

считаем периодически продолженной с Ω_1 на E^s, $\omega_2(y) \in L_q(\Omega_2)$,

$$x \in \Omega_1,\ y \in \Omega_2,\ \gamma = <\gamma_1, \gamma_2>,\ \beta = <\beta_1, \beta_2>,\ \eta(h) =$$

$$= \left(\left[\frac{a_1}{2}\right], \dots, \left[\frac{a_s}{2}\right] \right) h^{-1} \in R^s,\ Q^h_{\eta(h)}(\Omega) = Q_{\eta(h)}.$$

Обозначим через $W_p^{m,s}(\Omega)$ совокупность функций из $L_p^m(\Omega)$, периодических в Ω по переменным x_i с периодом a_i, $i = 1, \dots, s$. Нормированное пространство, индуцированное на $W_p^{m,s}(\Omega)$ полунормой $\|\cdot\|_{L_p^m(\Omega)}$, обозначим через $L_p^{m,s}(\Omega)$. Обозначим

$$\widetilde{W}_p^m = W_p^{m,n}(G_n),\ \widetilde{L}_p^m = L_p^{m,n}(G_n).$$

Определение 8. Последовательность функционалов $\{\rho^h\}$ из $L_p^{m*}(\Omega)$:

$$(\rho^h, f) = \int_{\Omega} \omega(x) f(x) dx - \sum_{\gamma \in \mathfrak{X}} C_\gamma^h f(h\gamma), \tag{9}$$

где $\mathfrak{X}$ - множество целочисленных векторов, называется *асимптотически оптимальной в* $L_p^m(\Omega)$, если для любой последовательности функционалов $\{\rho_1^h\}$ того же вида справедливо

$$\varliminf_{h \to 0} \left\{ \|\rho_1^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \cdot \|\rho^h\|^{-1}_{L_p^{m*}(\Omega)} \right\} \geq 1.$$

В [2] доказано существование в $L_p^m(\Omega)$, $\mathring{L}_p^m(\Omega)$ асимптотически оптимальных формул вида (9) для $pm > n$, причем

$$\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} = A_p^m h^m \|\omega\|_{L_q(\Omega)} (1+o(1)) \qquad \text{при } h \to 0, \tag{10}$$

где

$$A_p^m = \sup\left\{ \int_{G_n} f(x)dx \,|\, f \in \widetilde{W}_p^m,\ f(0)=0,\ \|f\|_{L_p^{m*}(G)} = 1 \right\}.$$

В теоремах этого параграфа для построенных последовательностей функционалов доказываются только оценки типа (10), а асимптотическая оптимальность следует из их построения. Заметим лишь, что из неравенств

$$\|e^h\|_{\overset{\circ}{L}{}_p^{m*}(\Omega)} \leq \|e^h\|_{L_p^{m,s*}(\Omega)} \leq \|e^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)}$$

и асимптотической оптимальности $\{e^h\}$ в $\overset{\circ}{L}{}_p^m(\Omega)$ и $L_p^m(\Omega)$ следует асимптотическая оптимальность этой последовательности в $L_p^{m,s}(\Omega)$, причем

$$\|e^h\|_{L_p^{m,s*}(\Omega)} = A_p^m h^m \|\omega\|_{L_q(\Omega)} (1+o(1)).$$

Пусть $p=2$ или m - нечетное, $pm > n$; μ - конечное множество из R^n ; $J^{(n)}$ - интерполяционный оператор на G_n вида

$$(J^{(n)}f)(x) = \sum_{\beta\in\mu} f(\beta)\, g_\beta(x),$$

где $g_\beta(x)$ - функции, определенные на E^n, равные нулю вне G_n и такие, что $(J^{(n)}(x^\alpha))(x) = x^\alpha\, i_{G_n}(x)$ для $|\alpha| \leq m$.

Пусть

$$S_\gamma^h(x) = \sum_{\beta+\delta=\gamma} g_\beta\left(\frac{x}{h} - \delta\right); \quad \Omega = \Omega_1 = \bigotimes_{i=1}^{n} (0, a_i).$$

Положим

$$\omega^h[\gamma] = \int_{E^n} \omega(x)\, S_\gamma^h(x)\, dx.$$

Имеет место следующая

Лемма 3. *Последовательность функционалов погрешностей кубатурных формул* $\{e^h\}$:

$$(\ell^h, f) = \int_{\Omega} \omega(x) f(x)\,dx - \sum_{\gamma\in B_h(\Omega)} \omega^h[\gamma]\, f(\gamma h)$$

асимптотически оптимальна в $\widetilde{L}_p^m(\Omega)$.

Замечание 1. Множество $B_h(\Omega)$ здесь можно определить так:

$$B_h(\Omega) = \{\gamma : \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n);\ \gamma_i = 0, 1, \ldots, a_i h^{-1} - 1,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{J}^h$ - последовательность интерполяционных операторов с регулярным пограничным слоем и $\mathcal{J}^{(n)}$ - ее сопутствующий оператор. Тогда последовательность функционалов $\{\rho^h\}$

$$(\rho^h, f) = \int_{\Omega} \omega(x)\,(f - \mathcal{J}^h f)(x)\,dx$$

асимптотически оптимальна в $\widetilde{L}_p^m(\Omega)$ [2] . Построим последовательность интерполяционных операторов $\{\mathcal{J}_1^h\}$:

$$(\mathcal{J}_1^h f)(x) = \sum_{\delta\in B_h(\Omega)} \sum_{\beta\in\mu} f(h\delta + h\beta)\, g_\beta\left(\frac{x}{h} - \delta\right)$$

и соответствующую ей последовательность функционалов

$$(e_1^h, f) = \int_{\Omega} \omega(x)\,(f - \mathcal{J}^h f)(x)\,dx.$$

Тогда последовательность $\{e_1^h\}$ асимптотически оптимальна. В самом деле, $\mathcal{J}_1 = \sum_{\gamma\in B_h(\Omega)} \mathcal{J}_{1,\gamma}^h$, где

$$(\mathcal{J}_{1,\gamma}^h f)(x) = \sum_{\beta\in\mu} g\left(\frac{x}{h} - \gamma\right) f(h\gamma + h\beta),$$

а $\mathcal{J}^h = \sum_{\gamma\in B_h(\Omega)} \mathcal{J}_\gamma^h$, причем для γ таких, что $d(h\gamma, \partial\Omega) > Ch$,

$\mathcal{J}_{1,\gamma}^h = \mathcal{J}_\gamma^h$. Кроме того, как показано в [2] , нормы функционалов

$$(\rho_\gamma^h, f) = \int_{Q_\gamma^h(\Omega)} \omega(x)\,(f - \mathcal{J}_\gamma^h f)(x)\,dx,$$

$$(e^h_{1,\gamma}, f) = \int\limits_{Q^h_\gamma(\Omega)} \omega(x)(f - \mathcal{J}^h_{1,\gamma} f)(x)dx$$

в $L_p^{m*}(\Omega)$ меньше $K \|\omega(x)\|_{L_q(Q^h_\gamma)} h^m$, где $K > 0$ и не зависит от γ, h и $\omega(x)$. Пусть M_h^q - множество γ таких, что $\gamma \in B_h(\Omega)$ и $d(h\gamma, \partial\Omega) < Ch$. Тогда

$$\tau^h = \rho^h - e^h_1 = \sum_{\gamma \in B_h(\Omega)} (\rho^h_\gamma - e^h_{1,\gamma}) = \sum_{\gamma \in M_h} (\rho^h_\gamma - e^h_{1,\gamma})$$

и

$$\|\tau^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} = \|\sum_{\gamma \in M_h} (\rho^h_\gamma - e^h_{1,\gamma})\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leq \sum_{\gamma \in M_h} \|\rho^h_\gamma - e^h_{1,\gamma}\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \leq$$

$$\leq K_1 h^m \sum_{\gamma \in M_h} \|\omega\|_{L_q(Q^h_\gamma(\Omega))} \leq K_1 h^m \|\omega\|_{L_q(\bigcup\limits_{\gamma \in M_h} Q^h_\gamma(\Omega))} = o(h^m),$$

так как $mes \bigcup\limits_{\gamma \in M} Q^h_\gamma(\Omega) \longrightarrow 0$ при $h \to 0$. Отсюда и из неравенства

$\|\rho^h\| - \|\tau^h\| \leq \|e^h_1\| \leq \|\rho^h\| + \|\tau^h\|$ следует асимптотическая оптимальность $\{e^h_1\}$.

Пользуясь периодичностью функции $f(x)$, отождествим узлы, координаты которых отличаются на числа, кратные a_i, и положим F_γ - множество узлов, отождествленных с γh, $\gamma \in B_h(\Omega)$.

Пусть $\{K^h\}$ - последовательность операторов, образованных из $\{\mathcal{J}^h_1\}$ при таком отождествлении. Покажем, что

$$(e^h, f) = \int\limits_\Omega \omega(x)(f - K^h f)(x)dx.$$

В самом деле,

$$(e^h, f) = \int\limits_\Omega \omega(x) f(x)dx - \sum_{\gamma \in B_h(\Omega)} f(h\gamma) \int\limits_\Omega \omega(x) P^h_\gamma(x)dx,$$

где

$$P^h_\gamma(x) = \sum_{\alpha \in F_\gamma} \sum_{\delta + \beta = \alpha h^{-1}} g\left(\frac{x}{h} - \delta\right). \tag{11}$$

Если F_γ состоит из одного элемента, то

$$\int\limits_\Omega \omega(x) P^h_\gamma(x)dx = \int\limits_\Omega \omega(x) \sum_{\delta + \beta = \gamma} g_\beta\left(\frac{x}{h} - \delta\right)dx = \omega^h[\gamma]. \tag{12}$$

Пусть $F_\gamma = \{\xi_i\}$ и $\gamma - \xi_i = \tau_i$, $i \in \{\overline{1,t}\}$. Тогда

$$P_\gamma^h(x) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{\delta+\beta_{\xi_i}=\xi_i} g\left(\frac{x}{h}-\delta\right),$$

причем множества

индексов $\{\beta_{\xi_i}\}$ попарно не пересекаются и $\bigcup_{i=1}^{t}\{\beta_{\xi_i}\}=\mu$, поэтому

$$\int_\Omega \omega(x) P_\gamma^h(x)dx = \int_\Omega \omega(x) \sum_{i=1}^{t} \sum_{\delta+\beta_{\xi_i}=\xi_i} g_{\beta_{\xi_i}}\left(\frac{x}{h}-\delta\right)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \int_\Omega \omega(x) \sum_{\delta+\beta_{\xi_i}=\xi_i} g_{\beta_{\xi_i}}\left(\frac{x}{h}-\delta\right)dx = \sum_{i=1}^{t} \int_\Omega \omega(x-\tau_i) \times$$

$$\times \sum_{\delta+\beta_{\xi_i}=\xi_i} g_{\beta_{\xi_i}}\left(\frac{x}{h}-\delta\right)dx = \int_{E^n} \omega(x) \sum_{\delta+\beta=\gamma} g_\beta\left(\frac{x}{h}-\delta\right) = \omega^h[\gamma]. \tag{13}$$

Так как для периодических функций $(e_1^h, f) = (e^h, f)$, то из асимптотической оптимальности $\{e_1^h\}$ и из (12) и (13) следует утверждение леммы.

Определение 9. *Декартовым произведением кубатурных формул*

$$\int_{\Omega_1} \omega_1(x) f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} a_i f(x_i), \quad \int_{\Omega_2} \omega_2(y) f(y)dy \approx \sum_{j=1}^{M} b_j f(y_j)$$

называется кубатурная формула

$$\int_{\Omega_1 \otimes \Omega_2} \omega_1(x)\omega_2(y) f\langle x,y\rangle dxdy \approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} a_i b_j f\langle x_i, y_j\rangle .$$

Определим оператор $\mathcal{J}^{(s)}$, числа $\omega_1^h[\gamma_1]$, $\gamma_1 \in B_h(\Omega_1)$, для E^s и Ω_1 аналогично оператору и числам, построенным для леммы 3, и положим $p=2$ или m - нечетно, $pm>n$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Последовательность функционалов погрешности декартовых произведений кубатурных формул*

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1} \omega_1(x) f(x)dx \approx \sum_{\gamma_1\in B_h(\Omega_1)} \omega_1^h[\gamma_1] f(h\gamma_1), \\ &\int_{\Omega_2} \omega_2(y) f(y)dy \approx \int_{\Omega_2} \omega_2(y)(\mathcal{J}^h f)(y)dy, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\{\mathcal{J}^n\}$ *- последовательность интерполяционных операторов с регулярным пограничным слоем, асимптотически оптимальна в* $L_p^{m,s}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть

$$(\mathcal{J}^h f)(y) = \sum_{\gamma_2 \in D_h(\Omega_2)} f(\gamma_2 h)\, Q^h_{\gamma_2}(y)$$

и $\mathcal{J}$ - сопутствующий оператор последовательности $\{\mathcal{J}^h\}$. Используя оператор $\mathcal{J}^{(S)}$, построим операторы

$$(\mathcal{J}^{(S),h}_{\gamma_1} f)(x) = \sum_{\beta_1 \in \mu_1} g_{\beta_1}\left(\frac{x}{h} - \gamma_1\right) f(h\gamma_1 + h\beta_1),$$

$$(K^h_1 f)(x) = \sum_{\gamma_1 \in B_h(\Omega_1)} (\mathcal{J}^{(S),h}_{\gamma_1} f)(x).$$

Отождествляя узлы интерполяционного оператора K^h_1 так же, как при доказательстве леммы 3, получаем

$$(K^h f)(x) = \sum_{\gamma_1 \in B_h(\Omega_1)} f(h\gamma_1) P^h_{\gamma_1}(x),$$

где $P^h_{\gamma_1}(x)$ имеет вид, сходный с (11).

Построим L^h - простое декартово произведение операторов K^h и $\mathcal{J}^h$:

$$(L^h f)\langle x,y\rangle = \sum_{\gamma_1 \in B_h(\Omega_1)} \sum_{\gamma_2 \in D_h(\Omega_2)} f(h\langle \gamma_1, \gamma_2\rangle) P^h_{\gamma_1}(x) Q^h_{\gamma_2}(y).$$

Рассмотрим

$$\int_\Omega \omega_1(x)\,\omega_2(y)\,(L^h f)\langle x,y\rangle\, dx\,dy =$$

$$= \sum_{\gamma_1 \in B_h(\Omega_1)} \sum_{\gamma_2 \in D_h(\Omega_2)} \int_{\Omega_1} \omega_1(x) P^h_{\gamma_1}(x)\,dx \int_{\Omega_2} Q^h_{\gamma_2}(y)\,\omega_2(y)\,dy \cdot f(h\gamma).$$

Заметим, что

$$\int_{\Omega_1} \omega_1(x) P^h_{\gamma_1}(x)\,dx = \omega_1^h[\gamma_1],$$

а $\int_{\Omega_2} Q^h_{\gamma_2}(y)\,\omega_2(y)\,dy$ - коэффициент формулы (14) при узле $h\gamma_2$.

Докажем асимптотическую оптимальность последовательности функционалов

$$(e^h, f) = \int_\Omega \omega_1(x)\,\omega_2(y)\,[f - L^h f] <x, y> dx\,dy.$$

Пусть $\mathcal{J}_1$ - простое декартово произведение операторов $\mathcal{J}^{(s)}$ и $\mathcal{J}$, $\{\mathcal{J}_1^h\}$ - последовательность интерполяционных операторов с регулярным пограничным слоем с сопутствующим оператором $\mathcal{J}_1$. Последовательность функционалов $\{e_1^h\}$:

$$(e_1^h, f) = \int_\Omega \omega_1(x)\,\omega_2(y)\,[f - \mathcal{J}_1^h f] <x, y> dx\,dy$$

асимптотически оптимальна в $L_p^{m,s}(\Omega)$. Но операторы $\mathcal{J}_1^h$ и $\mathcal{J}^h$ - простое декартово произведение K_1^h и $\mathcal{J}^h$ - отличаются лишь вблизи $\partial\Omega$. Поэтому, как и в лемме 3, последовательность функционалов $\{\tau^h\}$

$$(\tau^h, f) = \int_\Omega \omega_1(x)\,\omega_2(y)\,[f - \mathcal{J}^h f] <x, y> dx\,dy$$

асимптотически оптимальна в $L_p^{m,s}(\Omega)$. Отсюда и из совпадения функционалов τ^h и e^h на функциях из $W_p^{m,s}(\Omega)$ следует утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Для любых* $p, m, pm > n$*, и функции* $\omega(y)$ *существуют асимптотически оптимальные в* $L_p^{m,s}(\Omega)$ *последовательности функционалов ошибок кубатурных формул, разложимых в декартово произведение формул вида*

$$\int_{\Omega_1} f(x)\,dx \approx h^s \sum_{\gamma_1 \in B_h(\Omega_1)} f(h\gamma_1)$$

и

$$\int_{\Omega_2} \omega(y) f(y)\,dy \approx \int_{\Omega_2} \omega(y)\,(L^h f)(y)\,dy,$$

где $\{L^h\}$ *- последовательность интерполяционных операторов с пограничным слоем на* Ω_2.

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{J}^h\}$ - последовательность интерполяционных операторов с пограничным слоем на Ω такая, что последовательность функционалов $\{\ell^h\}$

$$(\ell^h, f) = \int_\Omega \omega(y)\,[f - \mathcal{J}^h f] <x, y> dx\,dy.$$

асимптотически оптимальна в $L_p^m(\Omega)$. Существование таких последовательностей доказано в [2].

На множестве

$$Q^h = \bigcup_{\xi \in B_h(\Omega_2)} Q^h_{<\eta(h),\xi>}(\Omega)$$

построим интерполяционный оператор

$$(\mathcal{J}_{\eta(h)} f)<x,y> = \sum_{\xi \in B_h(\Omega_2)} (\mathcal{J}^h_{<\eta(h),\xi>} f)<x,y>.$$

Пусть

$$(\bar{\mathcal{J}}^h_{\gamma_1} f)<x,y> = (\mathcal{J}_{\eta(h)} f)<x+(\eta(h)-\gamma_1)h, y>;$$

$$\bar{\mathcal{J}}^h = \sum_{\gamma_1 \in B_h(\Omega_1)} \bar{\mathcal{J}}^h_{\gamma_1},$$

здесь $\bar{\mathcal{J}}^h$ - интерполяционный оператор на Ω с узлами интерполирования $<\delta_1 h, \delta_2 h>$ такими, что $d(\delta_1 h, \Omega_1) \leq Ch$, где C - постоянная из определения 4, соответствующая $\{\mathcal{J}^h\}$, а $\delta_2 \in D_h(\Omega_2)$. Положим T - множество узлов оператора $\bar{\mathcal{J}}^h$, т.е.

$$(\bar{\mathcal{J}}^h f)<x,y> = \sum_{\alpha \in T} P^{1,h}_{\alpha}<x,y> f(\alpha).$$

Отождествляя, как и в предыдущих доказательствах узлы, преобразуем $\bar{\mathcal{J}}^h$ в интерполяционный оператор $\tilde{\mathcal{J}}^h$:

$$(\tilde{\mathcal{J}}^h f)<x,y> = \sum_{\gamma \in B_h(\Omega_1) \otimes D_h(\Omega_2)} P^h_{\gamma}<x,y> f(h\gamma),$$

причем для функций из $W_p^{m,s}(\Omega)$ выполняется

$$\int_\Omega \omega(y)(\bar{\mathcal{J}}^h f)<x,y>dxdy = \int_\Omega \omega(y)(\tilde{\mathcal{J}}^h f)<x,y>dxdy. \tag{15}$$

Вводя снова обозначение F_γ, принятое в лемме 3, замечаем, что

$P_\gamma^h\langle x,y\rangle$ имеет вид (11), в частности, если F_γ состоит из одного узла $h\gamma$, то

$$P_\gamma^h\langle x,y\rangle=\sum_{\delta+\beta=\gamma} g^h_{\delta,\beta}\langle x,y\rangle. \tag{16}$$

Обозначим через $\overline{\mu}$ множество таких β_2, что $\beta=\langle\beta_1,\beta_2\rangle\in\mu$, $\mu(\beta_2)$ - множество β_1 таких, что $\langle\beta_1,\beta_2\rangle\in\mu$ при данном β_2. Теперь, считая везде $\beta_2\in\overline{\mu}$, $\beta_1\in\mu(\beta_2)$, в (16) имеем:

$$\sum_{\delta+\beta=\gamma} g^h_{\delta,\beta}\langle x,y\rangle=\sum_{\delta_2+\beta_2=\gamma_2}\ \sum_{\delta_1+\beta_1=\gamma_1} g^h_{\langle\delta_1,\delta_2\rangle,\langle\beta_1,\beta_2\rangle}\langle x,y\rangle=$$

$$=\sum_{\delta_2+\beta_2=\gamma_2}\ \sum_{\delta_1+\beta_1=\gamma_1} g^h_{\langle\eta(h),\delta_2\rangle,\langle\beta_1,\beta_2\rangle}\langle x+(\eta(h)-\delta_1)h,y\rangle=$$

$$=\sum_{\delta_2+\beta_2=\gamma_2}\ \sum_{\beta_1\in\mu(\beta_2)} g^h_{\langle\eta(h),\delta_2\rangle,\langle\beta_1,\beta_2\rangle}\langle x+(\eta(h)-\gamma_1+\beta_1)h,y\rangle.$$

Введем функции

$$R^h_{\gamma_2}(y)=\int_{\Omega_1} P^h_\gamma\langle x,y\rangle dx=$$

$$=\sum_{\delta_2+\beta_2=\gamma_2}\ \sum_{\beta_1\in\mu(\beta_2)}\ \int_{Q^h_{\gamma_1-\beta_1}(\Omega)} g^h_{\langle\eta(h),\delta_2\rangle,\langle\beta_1,\beta_2\rangle}\langle x+(\eta(h)-\gamma_1+\beta_1)h,y\rangle dx=$$

$$=\sum_{\delta_2+\beta_2=\gamma_2}\ \sum_{\beta_1\in\mu(\beta_2)}\ \int_{Q_{\eta(h)}} g^h_{\langle\eta(h),\delta_2\rangle,\langle\beta_1,\beta_2\rangle}\langle x,y\rangle dx. \tag{17}$$

Заметим, что функции $R^h_{\gamma_2}(y)$ действительно не зависят от индекса γ_1. Суммируемость этих функций следует из теоремы Фубини. Функцию $R^h_{\gamma_2}(y)$ можно получить таким же способом, используя более общую формулу вида (11).

Рассмотрим

$$\iint_\Omega P^h_\gamma\langle x,y\rangle dxdy=\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}P^h_\gamma\langle x,y\rangle dx\right)dy=$$

$$=\int_{\Omega_2}R^h_{\gamma_2}(y)dy=\int_{\Omega_2}h^{-s}R^h_{\gamma_2}(y)dy\int_{Q^h_{\gamma_1}(\Omega)} i_{Q^h_{\gamma_1}(\Omega)}(x)dx. \tag{18}$$

Из (18) следует, что $\tilde{\mathcal{J}}^h$ есть декартово произведение интерполяционных операторов на Ω_1, Ω_2 соответственно:

$$(\tilde{\mathcal{J}}_1^h f)(x) = \sum_{\gamma_1 \in B_h(\Omega_1)} i_{Q^h_{\gamma_1}(\Omega_1)}(x) f(h\gamma_1),$$
$$(\tilde{\mathcal{J}}_2^h f)(y) = \sum_{\gamma_2 \in D_h(\Omega_2)} R^h_{\gamma_2}(y) f(h\gamma_2). \qquad (19)$$

Покажем, что $\{\tilde{\mathcal{J}}_2^h\}$ - последовательность интерполяционных операторов с пограничным слоем.

Пусть

$$(\mathcal{J}_2^h f)(y) = h^{-s} \int\limits_{Q_{\eta(h)}} (\mathcal{J}_{\eta(h)} f)\langle x,y\rangle dx =$$
$$= h^{-s} \sum_{\xi \in B_h(\Omega_2)} \int\limits_{Q_{\eta(h)}} \left(\mathcal{J}^h_{\langle \eta(h),\xi\rangle} f\right)\langle x,y\rangle dx =$$
$$= h^{-s} \sum_{\xi \in B_h(\Omega_2)} \sum_{\beta \in \mu} f(h\langle \eta(h),\xi\rangle + h\beta) \int\limits_{Q_{\eta(h)}} g^h_{\langle \eta(h),\xi\rangle,\beta}\langle x,y\rangle dx.$$

Если $\mathcal{J}_2^h$ рассматривать как интерполяционный оператор, действующий на функциях $f(y)$, заданных на Ω_2, то $\{\mathcal{J}_2^h\}$ - последовательность интерполяционных операторов с пограничным слоем на Ω_2. Действительно, для таких функций, полагая

$$(\mathcal{J}_\xi^h f)(y) = h^{-s} \int\limits_{Q_{\eta(h)}} (\mathcal{J}^h_{\langle \eta(h),\xi\rangle} f)\langle x,y\rangle dx,$$

где $\xi \in B_h(\Omega_2)$, имеем

$$\mathcal{J}_2^h = \sum_{\xi \in B_h(\Omega_2)} \mathcal{J}_\xi^h,$$

причем $\mathcal{J}_\xi^h$ удовлетворяет условиям определения 3:

а) при $|\alpha| < m$ выполняется

$$(\mathcal{J}_\xi^h (y^\alpha))(y) = h^{-s} \int\limits_{Q_{\eta(h)}} (\mathcal{J}^h_{\langle \eta(h),\xi\rangle}(y^\alpha))\langle x,y\rangle dx =$$
$$= h^{-s} \int\limits_{Q_{\eta(h)}} i_{Q^h_{\langle \eta(h),\xi\rangle}(\Omega)} \langle x,y\rangle \cdot y^\alpha dx = y^\alpha i_{Q^h_\xi(\Omega_2)}(y),$$

так как

$$i_{Q^h_{<\eta(h),\xi>}(\Omega)}<x,y> = i_{Q_{\eta(h)}}(x)\cdot i_{Q^h_\xi(\Omega_2)}(y);$$

б) $$(\mathcal{J}^h_\xi f)(y) = h^{-s}\sum_{<\beta_1,\beta_2>\in\mu} f(h\xi+h\beta_2)\int_{Q_{\eta(h)}} g^h_{<\eta(h),\xi>,\beta}<x,y>dx. \tag{20}$$

Равенство (20) верно, так как, по предположению, f не зависит от x. Пусть

$$g^h_{\xi,\beta_2}(y) = h^{-s}\sum_{\beta_1\in\mu(\beta_2)}\int_{Q_{\eta(h)}} g^h_{<\eta(h),\xi>,\beta}<x,y>dx. \tag{21}$$

Тогда (20) принимает вид

$$(\mathcal{J}^h_\xi f)(y) = \sum_{\beta_2\in\bar\mu} f(h\xi+h\beta_2)\, g^h_{\xi,\beta_2}(y).$$

Заметим, что $g^h_{\xi,\beta_2}(y)$ равны нулю вне $Q^h_\xi(\Omega_2)$, поскольку соответствующие им функции $g^h_{<\eta(h),\xi>,<\beta_1,\beta_2>}<x,y>$ равны нулю вне $Q^h_{<\eta(h),\xi>}(\Omega)$;

в) функции $g^h_{\xi,\beta_2}(y)$ ограничены, так как подынтегральные функции в (21) ограничены (см. определение 3, "в") и число элементов множества $\mu(\beta_2)$ конечно (не превосходит числа элементов из μ);

г) пусть $C, g_\beta<x,y>$ - соответственно число и функции из определения 3, "г" и $\xi\in D_h(\Omega_2)$ таковы, что $d(h\xi,\partial\Omega) > Ch$.

Из выбора $\eta(h)$ следует, что

$$g^h_{\xi,\beta_2}(y) = h^{-s}\sum_{\beta_1\in\mu(\beta_2)}\int_{Q_{\eta(h)}} g_{<\beta_1,\beta_2>}\left(\frac{<x,y>}{h} - <\eta(h),\xi>\right)dx. \tag{22}$$

Положим

$$g_{\beta_2}(y) = h^{-s}\sum_{\beta_1\in\mu(\beta_2)}\int_{Q_{\eta(h)}} g_{<\beta_1,\beta_2>}<\frac{x}{h}-\eta(h), y>dx. \tag{23}$$

Из (22), (23) следует

$$g^h_{\xi,\beta_2}(y) = g_{\beta_2}\left(\frac{y}{h}-\xi\right).$$

Итак, $\{\mathcal{J}^h_2\}$ - последовательность интерполяционных операторов с пограничным слоем. Если

$$(\mathcal{J}^h_2 f)(y) = \sum_{\gamma_2\in D_h(\Omega_2)} P^h_{\gamma_2}(y) f(h\gamma_2),$$

то

$$P_{\gamma_2}^h(y) = \sum_{\xi+\beta_2=\gamma_2} g_{\xi,\beta_2}^h(y) =$$

$$= h^{-s} \sum_{\xi+\beta_2=\gamma_2} \sum_{\beta_1\in\mu(\beta_2)} \int_{Q_{\eta(y)}} g^h_{<\eta(h),\xi>,<\beta_1,\beta_2>} <x,y>dx = h^{-s} R^h_{\gamma_2}(y), \qquad (24)$$

где, как видно из (17) , $R^h_{\gamma_2}(y)$ - из (19).

Из (24) следует равенство между интерполяционными операторами $\tilde{\mathcal{J}}_2^h$ и $\mathcal{J}_2^h$.

Асимптотическая оптимальность последовательности функционалов

$$(\tilde{\ell}^h, f) = \int_{\Omega} \omega(y)(f - \tilde{\mathcal{J}} f) <x,y> dx dy$$

в $L_p^{m,s}(\Omega)$ следует из (15) и того, что для функционалов ρ^h,

$$(\rho^h, f) = \int_{\Omega} \omega(y)(\mathcal{J}^h - \tilde{\mathcal{J}}^h, f) <x,y> dx dy,$$

верно $\|\rho^h\|_{L_p^{m*}(\Omega)} = o(h^m)$. Это доказывается так же, как и в лемме 3.

Для завершения доказательства заметим, что

$$\int_{\Omega} \omega(y)(\tilde{\mathcal{J}}^h f)<x,y> dy dx = \int_{\Omega} \omega(y) \sum_{\gamma\in B_h(\Omega_1)\otimes D_h(\Omega_2)} P_\gamma^h <x,y> f(h\gamma) dx dy =$$

$$= \sum_{\gamma\in B_h(\Omega_1)\otimes D_h(\Omega_2)} \int_{\Omega} \omega(y) P_\gamma^h <x,y> f(h\gamma) dx dy = \sum_{\gamma\in B_h(\Omega_1)\otimes D_h(\Omega_2)} f(h\gamma) \times$$

$$\times \int_{\Omega_2} \omega(y) dy \int_{\Omega_1} P_\gamma^h <x,y> dx = h^s \sum_{\gamma\in B_h(\Omega_1)\otimes D_h(\Omega_2)} f(h\gamma) \int_{\Omega_2} h^{-s} \omega(y) R^h_{\gamma_2}(y) dy,$$

причем $C_{\gamma_2} = \int_{\Omega_2} h^{-s} \omega(y) R^h_{\gamma_2}(y) dy$ - коэффициент при узле кубатурной формулы

$$\int_{\Omega_2} \omega(y) f(y) dy \approx \int_{\Omega_2} \omega(y) (\tilde{\mathcal{J}}_2^h f)(y) dy.$$

Используя введенное в [9] определение последовательностей кубатурных формул с пограничным слоем, можно формулировать теорему 2 так:

Для любых $p, m, pm > n$ существует асимптотически оптимальная в $L_p^{m,s}(\Omega)$ последовательность кубатурных формул, являющаяся декартовым произведением формул прямоугольников и последовательности с пограничным слоем.

Литература

1. Половинкин В.И. Декартовы произведения формул прямоугольников и формул с регулярным пограничным слоем.- 5-е Советско-чехословацкое совещание по применению функциональных методов. Тез. докл., Новосибирск, 1978, с.248-250.
2. Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, Ин-т кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1975, вып. 32, с. 99-103.
3. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию.- М.: Наука, 1966.- 370 с.
4. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.-М.: Наука, 1974.- 808 с.
5. Войтишек Л.В.Некоторые вопросы теории интегрирования функций нескольких переменных: Дис. на соиск. учен.степ. канд. физ.-мат. наук (01.008).- Новосибирск, Б.и., 1971.
6. Половинкин В.И., Дидур Л.И. О порядке сходимости кубатурных формул.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, Ин-т кибернетики с ВЦ АН УзССР, 1975, вып.34, с.3-14.
7. Половинкин В.И. Сходимость последовательностей кубатурных формул с пограничным слоем на конкретных функциях. -В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики.- Новосибирск, Наука, 1978, с.183-191.
8. Половинкин В.И. Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул.- Сиб.мат.журн., 1971, т.12, № 1, с.177-178.
9. Половинкин В.И. Асимптотическая оптимальность последовательностей формул с регулярным пограничным слоем при нечетных m .- Сиб.мат.журн., 1975, т.16, № 2, с.328-335.