УДК 518+517.392

ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ НА СФЕРЕ

С.И.Коняев (Москва)

1. При изучении многомерных кубатурных формул С.Л.Соболев [1] ввел понятие инвариантной относительно конечной группы преобразований трехмерного пространства кубатурной формулы на сфере. При построении конкретных кубатурных формул основную роль играет теорема 1 из [1]. Сформулируем эту теорему в более удобном для дальнейшего изложения виде.

Теорема. *Кубатурная формула, инвариантная относительно конечной группы преобразований сферы, тогда и только тогда точно интегрирует все многочлены порядка* n*, когда она точно интегрирует все инвариантные многочлены порядка* n.

В.И. Лебедев [2-5], используя эту теорему, получил новые кубатурные формулы для сферы, инвариантные относительно группы G_8^* (G_8^* - группа октаэдра с инверсией), а С.И.Коняев [6-8] - для группы G_{20}^* (G_{20}^*- группа икосаэдра с инверсией). Аналогичными методами И.П.Мысовских [9] и В.И.Лебедев [10] получили кубатурные формулы для интегрирования по сфере в R^n.

2. В дальнейшем мы займемся построением кубатурных формул, инвариантных относительно группы G_{20}^*. Известно [11,12], что группа G_{20}^* порождена отражениями и является группой Кокстера. В обозначениях [11] система Кокстера (G_{20}^*, S), где S - система образующих группы G_{20}^*, будет системой Кокстера типа H_3. Число элементов группы G_{20}^* равно 120. Напомним, что группа икосаэдра G_{20} порождена элементами r, f с соотношениями $r^5=e,\ f^2=e,\ (rf)^3=e$.

Пусть $\mathfrak{A}_{20}$- алгебра инвариантных относительно группы G_{20}^* многочленов на S_2. Так как показатели группы G_{20}^* равны 1,5,9 (см. [11,12]), то эта алгебра порождается двумя многочленами $P_6(x,y,z)$ и $P_{10}(x,y,z)$ шестой и десятой степеней, т.е любой элемент из $\mathfrak{A}_{20}$ имеет вид $P_6^k P_{10}^m$, $k\geqslant 0,\ m\geqslant 0$ (многочлен второй степени $P_2(x,y,z)/S_2 = x^2+y^2+z^2\equiv 1$ тривиален) и такое представление единственно. В работе [13] описана связь групп Кокстера с инвариантными кубатурными формулами.

Для нахождения параметров формул численного интегрирования на сфере потребуется координатное задание икосаэдра. Зададим сферические координаты вершин икосаэдра A_i так же, как и в [1]:

$$\begin{aligned}
&\vartheta = 0;\\
&\vartheta = \operatorname{arctg} 2; \quad \varphi = 0; \ \frac{2\pi}{5}; \ \frac{4\pi}{5}; \ \frac{6\pi}{5}; \ \frac{8\pi}{5};\\
&\vartheta = \pi - \operatorname{arctg} 2; \ \varphi = \frac{\pi}{5}; \ \frac{3\pi}{5}; \ \pi; \ \frac{7\pi}{5}; \ \frac{9\pi}{5};\\
&\vartheta = \pi.
\end{aligned} \tag{1}$$

Для дальнейшего понадобится явный вид однородных инвариантных многочленов $P_6(x,y,z)$ и $P_{10}(x,y,z)$:

$$\begin{aligned}
&P_6(x,y,z) = z^6 + 5x^4z^2 + 5y^4z^2 + 10x^2y^2z^2 - 5x^2z^4 - 5y^2z^4 +\\
&\qquad + 2x^5z + 10xy^4z - 20x^3y^2z; \quad P_6(0,0,1) = 1;\\
&P_{10}(x,y,z) = (z^2 - 6xz + 4x^2)\times\\
&\times(x^4 + 5y^4 + z^4 + 2x^3z - 2xz^3 - 10x^2y^2 - x^2z^2 - 30xy^2z - 25y^2z^2)\times\\
&\times(x^4 + 5y^4 + z^4 - 8x^3z + 8xz^3 - 10x^2y^2 + 14x^2z^2 - 10y^2z^2),\\
&P_{10}(0,0,1) = 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Мы ограничимся построением кубатурных формул не выше 29-го порядка, инвариантных относительно группы G_{20}^*. Будут построены формулы следующего вида:

$$S(f) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_2} f(s)\,ds \approx S_n(f) =$$

$$= a\sum_{i=1}^{12} f(A_i) + b\sum_{i=1}^{30} f(B_i) + c\sum_{i=1}^{20} f(C_i) + \sum_{i=1}^{\ell} d_i \sum_{j=1}^{60} f(D_{ij}). \tag{3}$$

В формуле (3) $S_n(f)$ - кубатурная формула порядка n ($n \leqslant 29$); A_i - вершины икосаэдра; $B_i\,(C_i)$ - проекции на сферу S_2 середин ребер (центров граней) вписанного икосаэдра; a, b, c - значения весов кубатурной формулы в узлах A_i, B_i, C_i; D_{ij} - это такие узлы на сфере S_2, что их центральные проекции лежат или на ребрах икосаэдра, или на медианах треугольников, являющихся гранями икосаэдра; d_i - вес в узлах D_{ij} (j = 1, ..., 60).

В следующей таблице приводятся все нетривиальные однородные инвариантные многочлены до 29-го порядка.

Таблица 1

n	0	6	10	12	16	18	20	22	24	26	28
P		P_6	P_{10}	P_6^2	P_6P_{10}	P_6^3	P_{10}^2	$P_6^2P_{10}$	P_6^4	$P_6P_{10}^2$	$P_6^3P_{10}$

Таким образом, чтобы построить кубатурную формулу порядка n, надо решить систему алгебраических уравнений

$$S_n(P_6^k P_{10}^m) = S(P_6^k P_{10}^m), \tag{4}$$

где $k \geqslant 0,\ m \geqslant 0,\ 6k+10m \leqslant n$.

3. Наибольший интерес представляют инвариантные кубатурные формулы типа Гаусса на сфере, т.е. формулы, содержащие минимальное число узлов.

В таких формулах ищутся веса и координаты узлов D_{ij}. При построении таких кубатурных формул удобно перейти к сферическим координатам.

Тогда

$$P_6(\vartheta,\varphi) = 11\cos^6\vartheta - 15\cos^4\vartheta + 5\cos^2\vartheta + 2\cos\vartheta\sin^5\vartheta\cos 5\varphi,$$

$$P_{10}(\vartheta,\varphi) = 4\sin^{10}\vartheta\cos^2 5\varphi + 496\cos^{10}\vartheta - 1180\cos^8\varphi + 935\cos^6\varphi -$$

$$- 275\cos^4\vartheta + 25\cos^2\vartheta - 6\cos\vartheta\sin^5\vartheta(76\cos^4\vartheta - 40\cos^2\vartheta + 5)\cos 5\varphi. \tag{5}$$

Кроме того, если положить $t = 2\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin^2\vartheta$ и считать $\varphi = 0$, то получим

$$P_6(t) = P_6(\vartheta,0) = 1 - 2t^2 - t^3,$$

$$P_{10}(t) = P_{10}(\vartheta,0) = 1 - 10t^2 - 5t^3 + 20t^4 + 12t^5. \tag{6}$$

В кубатурной формуле (3) один из узлов D_{ij} имеет координаты $(t_i^{\vartheta}, 0)$; этот узел в дальнейшем обозначается через D_i. Все остальные узлы этой группы получаются из D_i действием группы G_{20}^*.

Учитывая, что многочлены P_6 и P_{10} инвариантны и кубатурная формула (3) также инвариантна, приходим к системе уравнений

$$12aP_6^k(A)P_{10}^m(A) + 30bP_6^k(B)P_{10}^m(B) + 20cP_6^k(C)P_{10}^m(C) +$$

$$+ 60\sum_{i=1}^{\ell} d_i P_6^k(t_i) P_{10}^m(t_i) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_2} P_6^k(s) P_{10}^m(s)\,ds = h_{k,m}, \tag{7}$$

где $K \geq 0$; $m \geq 0$; $6K + 10m \leq n$.

В уравнениях (7) $P_6(A), P_{10}(A), P_6(B), P_{10}(B), P_6(C), P_{10}(C)$, $h_{K,m}$ - известные числа. Надо найти неизвестные веса a, b, c, d_i и "координаты" t_i узлов D_i.

4. Рассмотрим случай $\ell = 0$. Здесь возникают системы линейных уравнений для определения весов a, b, c в кубатурных формулах 5;9;11-го порядков. Для кубатурных формул 9-го порядка система состоит из двух уравнений, для кубатурной формулы 11-го порядка - из трех уравнений. Решив эти системы, получим три кубатурные формулы 5-го порядка, три кубатурные формулы 9-го порядка и кубатурную формулу 11-го порядка. Эти кубатурные формулы достаточно давно известны [1,7,14,15].

5. В случае, когда $\ell \neq 0$, систему уравнений (7) удобно преобразовать, выразив из первых уравнений веса a, b, c через переменные d_i, t_i $(i=1,\dots,\ell)$ и подставив их во все оставшиеся уравнения системы. При этом система уравнений (7) упростится и уменьшится число уравнений, из которых находятся переменные d_i, t_i.

5.1. Для кубатурных формул типа Гаусса 15-го порядка задача отыскания параметров сводится к решению квадратных уравнений. Решая эти уравнения, удается построить две кубатурные формулы с 92 узлами, кубатурную формулу со 102 узлами и две кубатурные формулы со 110 узлами.

5.2. Для кубатурных формул типа Гаусса 17-,21-,23-,29-го порядков после проведения указанных выше преобразований приходим к моментным системам вида

$$\sum_{i=1}^{\ell} \tilde{d}_i t_i^{p} = f_p . \tag{8}$$

Здесь $\ell = 1,2,3,4$ (в зависимости от порядка кубатурной формулы n ; $n = 13 + 4\ell$), $p = 0,2,\dots,2\ell$;

$$\tilde{d}_i = \frac{9009}{160} t_i^2 (t_i^2 + t_i - 1)(3t_i + 4)^2 d_i .$$

Правые части f_p уравнений (8) известны. Метод решения этих моментных систем приведен в [7,8]. Решив эти системы, мы найдем параметры кубатурных формул 17-, 21-, 25-, 29-го порядков, содержащих соответственно 122,182,242, 302 узла [6-8].

5.3. Наиболее сложными становятся системы уравнений при построении кубатурных формул типа Гаусса 19-,23-и 27-го порядков. В этих кубатурных формулах один из весов a, b, c может быть взят равным нулю. Начнем с построения кубатурных формул, для которых вес $b = 0$.

Система уравнений для определения параметров кубатурной формулы примет вид:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{\ell}(13t_i^2+8t_i-8)\hat{d}_i=0,\\ \sum_{i=1}^{\ell}(t_i^2+t_i-1)t_i^p\hat{d}_i=f_p.\end{gathered}\tag{9}$$

Здесь $\ell=2,3,4$ (в зависимости от порядка кубатурной формулы n; $n=11+4\ell$), $p=0,2,\dots,2\ell-1$,

$$\hat{d}_i=\frac{9009}{160}t_i^2(3t_i+4)^2d_i.$$

Для решения системы уравнений (9) выразим все $\hat{d}_i$ из последних уравнений системы и подставим их значения в первые ℓ уравнений системы (9). В получившейся системе из ℓ уравнений введем переменные $s_1=\sum_{i=1}^{\ell}t_i$, $s_2=\sum_{1\le i<j\le\ell}t_i t_j$ (s_i - элементарные симметрические функции переменных t_i).

Таким образом, приходим к системе из ℓ уравнений

$$g_i(s_1,\dots,s_\ell)=0,\quad i=1,\dots,\ell.\tag{10}$$

В случае $n=19$ ($\ell=2$) мы приходим к системе двух уравнений второй степени. В случае $n=23$ ($\ell=3$) первые два уравнения системы (10) - второй степени, третье уравнение - линейное. Наконец, если $n=27$ ($\ell=4$), то первые два уравнения - второй степени, а третье и четвертое уравнения - линейные.

В случае $\ell=3,4$ система (10) сводится к системе двух уравнений второй степени, которая далее решается стандартными методами. Найдя результат этой системы - уравнение четвертой степени и его вещественные корни, мы тем самым найдем параметры кубатурных формул.

Кубатурные формулы 19-го порядка, инвариантные относительно группы G_{20}, получены в [8].

Проведя описанные выше вычисления, мы построим две кубатурные формулы 23-го порядка с 212 узлами и две кубатурные формулы 27-го порядка с 272 узлами.

Приведем значения параметров кубатурных формул 27-го порядка:

a = 0.002 715 257 525 331	a = 0.002 724 879 579 393
b = 0	b = 0
c = 0.001 711 046 418 587	c = 0.003 790 219 990 491

$d_1 = 0.003\ 747\ 140\ 232\ 068$
$x_1 = 0.728\ 698\ 069\ 928$
$y_1 = 0$
$z_1 = -0.684\ 835\ 106\ 346$
$d_2 = 0.004\ 134\ 816\ 078\ 532$
$x_2 = 0.367\ 136\ 761\ 005$
$y_2 = 0$
$z_2 = -0.930\ 166\ 973\ 569$
$d_3 = 0.003\ 734\ 027\ 503\ 323$
$x_3 = 0.205\ 234\ 387\ 086$
$y_3 = 0$
$z_3 = 0.978\ 712\ 851\ 840$
$d_4 = 0.003\ 937\ 282\ 541\ 481$
$x_4 = 0.419\ 074\ 039\ 309$
$y_4 = 0$
$z_4 = 0.907\ 952\ 063\ 479$

$d_1 = 0.003\ 840\ 769\ 628\ 594$
$x_1 = 0.779\ 296\ 369\ 131$
$y_1 = 0$
$z_1 = -0.626\ 655\ 542\ 590$
$d_2 = 0.003\ 764\ 632\ 847\ 586$
$x_2 = 0.410\ 403\ 795\ 840$
$y_2 = 0$
$z_2 = -0.911\ 903\ 900\ 836$
$d_3 = 0.003\ 474\ 505\ 159\ 641$
$x_3 = 0.201\ 209\ 855\ 204$
$y_3 = 0$
$z_3 = -0.979\ 548\ 158\ 167$
$d_4 = 0.003\ 778\ 376\ 451\ 469$
$x_4 = 0.351\ 466\ 299\ 889$
$y_4 = 0$
$z_4 = 0.936\ 200\ 534\ 096$

Схематическое расположение узлов в проекции на одну из граней икосаэдра для этих кубатурных формул приведено на рис.1,2.

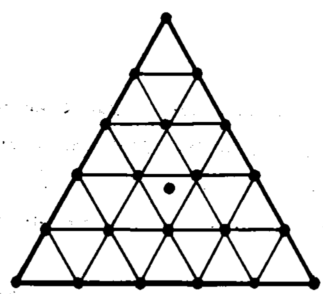

Рис.1

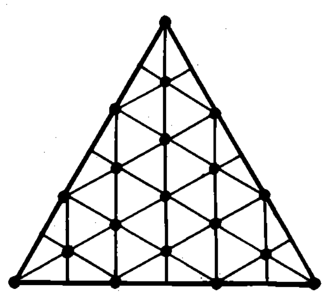

Рис.2

В случае, когда вес $C = 0$, система уравнений для определения парамет ров кубатурной формулы решается аналогично.

Решив эти системы, мы получим две кубатурные формулы 19-го порядка [8] кубатурную формулу 23-го порядка с 222 узлами, две кубатурные формулы 27-г порядка с 282 узлами.

В случае веса $a = 0$ кубатурные формулы типа Гаусса построить не уда лось: системы уравнений для определения параметров имели комплексные корн Остается открытым вопрос, существует ли кубатурная формула типа Гаусса 27-го порядка с весом $a = 0$.

В табл.2 приведены значения коэффициента эффективности $\eta=(n+1)^2/3N$ и число узлов N кубатурных формул типа Гаусса.

Таблица 2

n	5	9	11	15	17	19
N	12	32	62	92	122	152
η	1	1.0417	0.7742	0.9275	0.8853	0.8772
n	21	23	25	27	29	
N	182	212	242	272	302	
η	0.8865	0.9057	0.9311	0.9608	0.9934	

Итак, используя предложенные в работах [1-8] методы, удается построить инвариантные кубатурные формулы относительно группы G^*_{20} типа Гаусса до 29-го порядка точности. В большинстве построенных кубатурных формул все веса положительны и узлы достаточно правильно триангулируют сферу S_2 .

Литература

1. Соболев С.Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы.- Сиб.мат.журн., 1962, т.3, № 5, с.769-796.
2. Лебедев В.И. О квадратурных формулах для сферы повышенной алгебраической степени точности.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева). Новосибирск, 1973, с.31-35.
3. Лебедев В.И. О квадратурах на сфере.- Журн. вычислит. математики и мат физики, 1976, т.16, № 2, с.293-306.
4. Лебедев В.И. Квадратурные формулы для сферы 25-29-го порядка точности.- Сиб.мат.журн., 1977, т.18, № 1, с.132-142.
5. Лебедев В.И. Квадратурная формула 35-го порядка для сферы.- В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика. Новосибирск, 1980, с.110-114.
6. Коняев С.И. Квадратурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы икосаэдра. - М.,Б.и., 975.-(Препринт/ИАЭ; 2516).
7. Коняев С.И. Инвариантные формулы интегрирования на сфере.- М.,Б.и., 1975.- 24 с.- (Препринт/ИАЭ; 2553).

8. Коняев С.И. Квадратуры типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы икосаэдра с инверсией.- Мат. заметки, 1979, т.25, № 4, с.629-634.

9. Мысовских И.П. О вычислении интегралов по поверхности сферы.- Докл.АН СССР, 1977, т.235, № 2, с.269-272.

10. Лебедев В.И. Вычисление квадратур типа Гаусса-Маркова для областей и весов, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1975 г., вып. 32, с.77-84.

11. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли.-М.:Мир, 1972, главы IУ-УI.

12. Coxeter H.S.M. The product of the generators of a finite group generated by reflections. - Duke Math.J., 1951, v.18, № 4, p. 765-782.

13. Мысовских И.П. Об инвариантных кубатурных формулах.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. (Труды семинара С.Л.Соболева). Новосибирск, 1978, № 1, с.69-78.

14. Люстерник Л.А., Диткин В.А. Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере.- В кн.: Вычислительная математика и вычислительная техника, 1953, № 1, с.3-13.

15. McLaren A.D. Optimal Numerical Integration on a Sphere. - Math. of Comp., 1963, v. 17, № 83, p. 361-383.