УДК 517.947

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА

Г.В. Демиденко (Новосибирск)

Изучаются смешанные краевые задачи в квадранте:

$$L(x,x_n;D_t,D_x,D_{x_n})u=f(t,x,x_n),\ t>0,\ x_n>0,\ x\in E_{n-1};$$

$$B_j(D_x,D_{x_n})u\big|_{x_n=0}=0,\quad j=1,\dots,\mu, \tag{1}$$

$$u=0 \quad \text{при } t<0,$$

для уравнений с переменными коэффициентами, не разрешенных относительно производной по времени, следующего вида:

$$L(\bar{x};D_t,D_{\bar{x}})u\equiv D_tL_1(\bar{x};D_{\bar{x}})u+L_0(\bar{x};D_{\bar{x}})u=f(t,\bar{x}). \tag{2}$$

В рассматриваемый класс входят, в частности, однородные псевдопараболические уравнения [1,2].

Доказано, что при выполнении равномерного условия Лопатинского смешанная задача (1) корректно разрешима в соболевских классах $W^m_{2,\gamma}$ с экспоненциальным весом по t, если правая часть ортогональна некоторым полиномам. При этом число условий ортогональности зависит от порядка оператора и размерности пространства. Отметим, что впервые аналогичные условия разрешимости для уравнений вида (2) были получены С.А. Гальперном [1] при изучении задачи Коши.

§1. Определения и формулировка результатов

Введем некоторые обозначения:

$$E^+_n=\{\bar{x}=(x,x_n):x=(x_1,\dots,x_{n-1})\in E_{n-1},\ x_n>0\};$$

$$E^{++}_{n+1}=\{(t,\bar{x}):\ \bar{x}\in E^+_n,\ t>0\};$$

$$x^s = x_1^{s_1} \dots x_{n-1}^{s_{n-1}} \;;$$

$$D_{x_k}^{\nu_k} = \frac{\partial^{\nu_k}}{\partial x_k^{\nu_k}}\,, \quad D_x^{\nu} = D_{x_1}^{\nu_1} \dots D_{x_{n-1}}^{\nu_{n-1}} \;;$$

$$\vec{\nu}\vec{\alpha} = \sum_{i=0}^{n} \nu_i \alpha_i\,, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \;;$$

$$\alpha_{min} = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}\;;$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})\,, \quad <\xi>^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^{2/\alpha_i}\;;$$

$$s = (\tau, \xi)\,, \; \tau = i\eta + \delta\,, \quad <s>^2 = |\tau|^{2/\alpha_0} + <\xi>^2\;;$$

$$F_{x\to\xi}\, u(\cdot, x, \cdot) = \hat{u}(\cdot, \xi, \cdot) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{-i\xi x} u(\cdot, x, \cdot)\, dx;$$

$$L_{t\to\tau}\, u(t, \cdot) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\infty} e^{-\tau t} u(t, \cdot)\, dt\,, \quad Re\,\tau > \gamma > 0.$$

Определим условия, которым удовлетворяют операторы $L(D)$ и $B_j(D)$:

1) Характеристические многочлены операторов $L(\bar{x}; i\eta, i\xi, i\lambda)$ и $B_j(i\xi, i\lambda)$ однородны относительно вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i > 0$, т.е. для любого $c > 0$ имеем:

$$L(\bar{x}; c^{\alpha_0} i\eta, c^{\alpha} i\xi, c^{\alpha_n} i\lambda) = cL(\bar{x}; i\eta, i\xi, i\lambda),$$

$$B_j(c^{\alpha} i\xi, c^{\alpha_n} i\lambda) = c^{\beta_j} B_j(i\xi, i\lambda), \quad 0 \le \beta_j < 1.$$

2) Операторы $L_1(\bar{x}, D_{\bar{x}})$ и $L_0(\bar{x}; D_{\bar{x}})$ квазиэллиптические, т.е. при $(\xi, \lambda) \in E_n$ имеет место

$$L_K(\bar{x}; i\xi, i\lambda) = 0, \quad K = 0,1 \iff (\xi, \lambda) = \{0\}.$$

Допустим, что $L_K(\bar{x}; i\xi, i\lambda) \ge 0$, $K = 0,1$.

3) Коэффициенты операторов $L_K(\bar{x}; D_{\bar{x}})$ гладкие и постоянные вне компакта $K \subset E_n^+$, причем выполнено следующее условие:

в операторе $L_1(\bar{x}; D_{\bar{x}})$ коэффициенты, стоящие при производных $D_{x_n}^{\ell}$, постоянные, в операторе $L_0(\bar{x}; D_{\bar{x}})$ коэффициенты при производных $D^{\ell}_{x_n}$, где $\alpha_n \ell > \alpha_0$, также постоянные.

4) Операторы $B_j(D)$, $j=1,\ldots,\mu$, имеют вид

$$B_j(D_x, D_{x_n}) = D_{x_n}^{m_j} + \sum_{\kappa=0}^{m_j-1} b_\kappa(D_x) D_{x_n}^{\kappa}, \quad \text{т.е.}\ m_j\alpha_n = \beta_j,$$

где μ равно числу корней по λ уравнения $L(\bar{x}; \tau, i\xi, i\lambda) = 0$ при $Re\,\tau \geq 0$, $\xi \in E_{n-1} \setminus \{0\}$, имеющих $\operatorname{Im}\lambda_\kappa > 0$. Но поскольку $L_0(\bar{x}; i\xi, i\lambda) > 0$ и $L_1(\bar{x}; i\xi, i\lambda) > 0$ при $\xi \in E_{n-1} \setminus \{0\}$, $\lambda \in E_1$, то это уравнение не имеет вещественных корней по λ при $Re\,\tau \geq 0$, $\xi \in E_{n-1} \setminus \{0\}$ и, следовательно, число μ не зависит от точки $(\bar{x}, \tau, \xi)$, где $\bar{x} \in E_n^+$, $Re\,\tau \geq 0$, $\xi \in E_{n-1} \setminus \{0\}$.

Положим

$$M^+(\bar{x}; \tau, i\xi, i\lambda) = \prod_{\kappa=1}^{\mu} \left(\lambda - \lambda_\kappa^+(\bar{x}; \tau, i\xi)\right).$$

5) Предположим, что выполнено равномерное условие Лопатинского: полиномы B_j, как полиномы от λ, при $x \in E_n^+$, $Re\,\tau \geq 0$, $\xi \in E_{n-1}$ линейно-независимы по $\operatorname{mod} M^+(\bar{x}; \tau, i\xi, i\lambda)$, т.е.

$$\det(b_{j\kappa}(\bar{x}; \tau, i\xi)) \neq 0 \quad \text{при}\ Re\,\tau \geq 0,\ \xi \in E_{n-1},$$

где $b_{j\kappa}$ определяются из равенств

$$\sum_{\kappa=1}^{\mu} b_{j\kappa}(\bar{x}; \tau, i\xi)(i\lambda)^{\kappa-1} \equiv B_j(i\xi, i\lambda)(\operatorname{mod} M^+(\bar{x}; \tau, i\xi, i\lambda)),$$

$j = 1, \ldots, \mu$.

Пример. Рассмотрим псевдопараболический оператор (см., например, [2])

$$L(D_t, D_{\bar{x}}) = D_t L_1(D_{\bar{x}}) + L_0(D_{\bar{x}}),$$

где $L_1(D_{\bar{x}})$ - эллиптический оператор порядка $2m$; $L_0(D_{\bar{x}})$ - эллиптический оператор порядка 2ℓ, $m < \ell$, и коэффициенты этих операторов вещественны. Пусть $\alpha_\kappa = 1/2\ell$, $\kappa = 1, \ldots, n$, $\alpha_0 = 1 - m/\ell$, тогда очевидно условия 1) и 2) выполнены, причем $\mu = \ell$.

В качестве граничных операторов можно взять $B_j(D) = D_{x_n}^{j-1}$, $j = 1, \ldots, \mu$, т.е. $\beta_j = (j-1)/2\ell$. Ясно, что условия 1), 4) и 5) также выполнены.

Определим класс функций $W_{2,\gamma}^{p/\alpha}(E_{n+1}^{++})$, $\gamma > 0$.

функция

$$u(t,\bar{x}) \in W_{2,\gamma}^{p/\alpha}\left(E_{n+1}^{++}\right),$$

если

$$D_t^{k} u(0,\bar{x}) = 0, \quad k=0,\dots,p/\alpha_0 - 1$$

и

$$\sum_{0\leq \nu\alpha \leq p} \| D_t^{\nu_0} e^{-\gamma t} D_x^{\nu} D_{x_n}^{\nu_n} u(t,x,x_n), L_2(E_{n+1}^{++})\| < \infty.$$

Определим класс функций $\widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)$, $\gamma > 0$: функция

$$\sigma(\tau,\bar{x}) \in \widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+),$$

если при почти всех $(\xi,x_n) \in E_n^+$ функция $\hat{\upsilon}(\tau,\xi,x_n)$ голоморфна по τ, $Re\,\tau > \gamma$ и

$$\|\sigma(\tau,\bar{x}), \widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)\| =$$

$$= \sum_{\nu\alpha = p} \sup_{\delta \geq \gamma} \left(\int_{E_1} |\sigma + i\eta|^{2\nu_0} \| D_x^{\nu} D_{x_n}^{\nu_n} \sigma(\tau,\bar{x}), L_2(E_n^+)\|^2 d\eta \right)^{1/2} < \infty.$$

По обобщенной теореме Пэли-Винера [3], преобразование Лапласа взаимно-однозначно и с сохранением нормы отображает $W_{2,\gamma}^{p/\alpha}(E_{n+1}^{++})$ на $\widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)$.

Определим класс функций $\mathfrak{M}^p(C_\gamma \times E_n^+)$, $p \geq 1$:

функция $\hat{g}(\tau,\xi,x_n) \in \mathfrak{M}^p(C_\gamma \times E_n^+)$, если для почти всех $(\xi,x_n) \in E_n^+$ она голоморфна по τ, $Re\,\tau > \gamma$ и при $\frac{|\alpha|}{2} + \alpha_0 > 1$ имеет место

$$\|g(\tau,\bar{x}), \mathfrak{M}^p(C_\gamma \times E_n^+)\| = \|g(\tau,\bar{x}), \widetilde{W}_2^{p-1/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)\| +$$

$$+ \sup_{Re\,\tau \geq \gamma} \Big[\| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} g(\tau,\bar{x}), L_2(E_{n+1}^+)\| +$$

$$+ \| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} \| g(\tau,x,x_n), L_1(E_{n-1})\|, L_2(E_2^+)\| \Big] < \infty,$$

а при $\frac{|\alpha|}{2} + \alpha_0 + N\alpha_{min} > 1 \geq \frac{|\alpha|}{2} + \alpha_0 + (N-1)\alpha_{min}$, $N \geq 1$, выполняется

$$\|g(\tau,\bar{x}),\mathfrak{M}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})\| = \|g(\tau,\bar{x}),\widetilde{W}_{2}^{p-1/\alpha}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})\| +$$

$$+\sup_{Re\tau\geq\gamma}\Big[\| |\tau|^{p/\alpha_0^{-1}} g(\tau,x), L_2(E_{n+1}^{+})\| +$$

$$+\sum_{|q|\leq N}\| |\tau|^{p/\alpha_0^{-1}} \|g(\tau,x,x_n)x^{q}, L_1(E_{n-1})\|, L_2(E_2^{+})\|\Big] < \infty .$$

Определим подпространство $\mathcal{L}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})\subseteq\mathfrak{M}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})$: при $\frac{|\alpha|}{2}+\alpha_0>1$ положим $\mathcal{L}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})=\mathfrak{M}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})$, а при $\frac{|\alpha|}{2}+\alpha_0+N\alpha_{min}>$ $>1\geq\frac{|\alpha|}{2}+\alpha_0+(N-1)\alpha_{min}$, $N\geq1$, функция $g(\tau,\bar{x})\in$ $\in\mathcal{L}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})$, если $g(\tau,\bar{x})\in\mathfrak{M}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})$,

и

$$\int_{E_{n-1}} x^{s} g(\tau,x,x_n)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad 0\leq|s|\leq N-1.$$

Сформулируем вначале результат для уравнения с постоянными коэффициентами.

Теорема 1. *Пусть операторы* $L(\bar{x}^{0};D_t,D_{\bar{x}})$ *и* $B_j(D_{\bar{x}})$, $j=1,\dots,\mu$, *удовлетворяют условиям 1) – 5)* ($\bar{x}^{0}$ *- фиксированная точка*). *Если* $L_{t\to\tau}f(t,\bar{x})\in\mathcal{L}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})$, *то смешанная задача (1) для уравнения с постоянными коэффициентами* $L(\bar{x}^{0};D_t,D_{\bar{x}})u=f(t,\bar{x})$ *имеет единственное решение* $u(t,\bar{x})=Q(\bar{x}^{0})f(t,\bar{x})\in W_{2,\gamma}^{p/\alpha}(E_{n+1}^{++})$, *причем выполнена оценка*

$$\|u(t,\bar{x}),W_{2,\gamma}^{p/\alpha}(E_{n+1}^{++})\|\leq c\|L_{t\to\tau}f(t,\bar{x}),\mathfrak{M}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+})\|, \tag{3}$$

где $c>0$ *– константа, не зависящая от* $f(t,\bar{x})$.

Приведем теперь результат для уравнения с переменными коэффициентами.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) – 5) , причем коэффициенты оператора* $L(\bar{x};D_t,D_{\bar{x}})$ *достаточно мало отличаются от постоянных,*

$$L_{t\to\tau}f(t,\bar{x})\in\mathfrak{M}^{p}(C_{\gamma}\times E_{n}^{+}).$$

Если $|\alpha|/2+\alpha_0>1$ *, то смешанная задача (1) имеет единственное решение*

$$u(t,\bar{x}) \in W_{2,\gamma}^{p/\alpha}\ (E_{n+1}^{++}),$$

причем выполнена оценка (3) .

Если $|\alpha|/2+\alpha_0 \leq 1$, *то предположим, что выполнено условие*

$$\int\limits_{E_{n-1}} x^s \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \big(\Delta L(\bar{x};D_t,D_{\bar{x}}) \circ Q(\bar{x}^\circ)\big)^k \Big) f(t,\bar{x})dx = 0$$

при $0 \leq |S| \leq N-1,$

где

$$\frac{|\alpha|}{2}+\alpha_0+N\alpha_{min} > 1 \geq \frac{|\alpha|}{2}+\alpha_0+(N-1)\alpha_{min},$$

$$\Delta L(\bar{x};D_t,D_{\bar{x}}) = L(\bar{x}^\circ;D_t,D_{\bar{x}}) - L(\bar{x};D_t,D_{\bar{x}}),$$

$\bar{x}^\circ \notin K$, *а* $Q(\bar{x}^\circ)$ *определен в теореме* 1.

Тогда смешанная задача (1) *также корректно разрешима в классе* $W_{2,\gamma}^{p/\alpha}(E_{n+1}^{++})$.

Замечание. Аналогичные условия разрешимости в пространстве $W_{2,\gamma}^m$ для одного класса уравнений, содержащего, в частности, уравнение С.Л.Соболева [4] и уравнение внутренних волн [5] , получены в [6] (см. определение класса $\mathcal{L}_0$) .

§2. Решение краевой задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения с параметрами

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} &L(\tau,i\xi,D_{x_n})\sigma = g(x_n), \quad x_n>0,\\ &B_j(i\xi,D_{x_n})\sigma\big|_{x_n=0} = 0, \quad j=1,\dots,\mu, \end{aligned} \tag{4}$$

$\sigma(\tau,\xi,x_n)\to 0,\ x_n\to+\infty,$ при фиксированных $(\tau,\xi), Re\tau>0, \xi\in E_{n-1}\setminus\{0\}.$
Формально уравнение и граничные условия (4) получаются после преобразования Фурье-Лапласа краевой задачи (1) с замороженными коэффициентами.

В этом параграфе мы получим точные оценки контурных интегралов, через которые записывается решение краевой задачи (4) в зависимости от параметров $\tau, Re\tau>0$ и $\xi\in E_{n-1}\setminus\{0\}$.

Как уже отмечалось, при $Re\tau\geq 0$ и $\xi\neq 0$ уравнение $L(\tau,i\xi,i\lambda)=0$ (с замороженными коэффициентами) вещественных корней по λ не имеет, т.е. корни $\lambda_k^+(\tau,i\xi), 1\leq k\leq\mu$, лежат строго в верхней полуплоскости, а корни $\lambda_k^-(\tau,i\xi), 1\leq k\leq 1/\alpha_n-\mu$, - строго в нижней. (Слипаться они могут лишь при $\xi = 0$.) Следовательно, частное решение уравнения в (4) при $g(x_n) \in C_0^\infty$ можно взять в виде

$$v_1(\tau,\xi,x_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_{\Gamma^+}\frac{e^{i(x_n-y_n)\lambda}}{L(\tau,i\xi,i\lambda)}\,d\lambda\, g(y_n)\,dy_n +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_\infty^{x_n}\int\limits_{\Gamma^-}\frac{e^{i(x_n-y_n)\lambda}}{L(\tau,i\xi,i\lambda)}\,d\lambda\, g(y_n)\,dy_n =$$

$$= \int\limits_0^{x_n} \mathcal{J}_+(\tau,i\xi,x_n-y_n)g(y_n)\,dy_n + \int\limits_\infty^{x_n}\mathcal{J}_-(\tau,i\xi,x_n-y_n)g(y_n)\,dy_n,$$

где контур Γ^+ охватывает все корни λ_κ^+, а контур Γ^- - все корни λ_κ^-. Из подготовительной теоремы Вейерштрасса следует, что эти контурные интегралы голоморфны по τ при $Re\,\tau > 0$ и $\xi \neq 0$. А поскольку решение краевой задачи

$$L(\tau,i\xi,D_{x_n})v_2 = 0, \quad x_n > 0,$$

$$B_j(i\xi,D_{x_n})v_2\big|_{x=0} = \varphi_j, \quad j=1,\dots,\mu,$$

$$v_2(\tau,\xi,x_n)\to 0 \text{ при } x_n \to +\infty,$$

где $Re\,\tau>0,\ \xi\in E_{n-1}\setminus\{0\}$, можно записать в виде (см. [7])

$$v_2(\tau,\xi,x_n) = \sum_{j=1}^{\mu}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+}\frac{e^{ix_n\lambda}N_j(\tau,i\xi,i\lambda)}{M^+(\tau,i\xi,i\lambda)}\,d\lambda\,\varphi_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{\mu}\mathcal{J}_j(\tau,i\xi,x_n)\varphi_j,$$

где, по определению,

$$M^+(\tau,i\xi,i\lambda) = \prod_{\kappa=1}^{\mu}(\lambda-\lambda_\kappa^+(\tau,i\xi)) = \sum_{\kappa=0}^{\mu}a_\kappa(\tau,i\xi)\lambda^{\mu-\kappa},$$

$$M_\ell(\tau,i\xi,i\lambda) = \sum_{\kappa=0}^{\ell}a_\kappa(\tau,i\xi)\lambda^{\ell-\kappa}, \quad \ell=0,\dots,\mu-1,$$

$$N_j(\tau,i\xi,i\lambda) = \sum_{\kappa=1}^{\mu}b^{\kappa j}(\tau,i\xi)M_{\mu-\kappa}(\tau,i\xi,i\lambda),$$

$b^{\kappa j}(\tau,i\xi)$ - элементы обратной матрицы $(b_{pq}(\tau,i\xi))^{-1}$, то, взяв

$$\varphi_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{\Gamma^-} \frac{e^{-iy_n\lambda}}{L(\tau,i\xi,i\lambda)} B_j(i\xi,i\lambda)d\lambda g(y_n)dy_n,$$

получим решение краевой задачи (4) в следующем виде:

$$v(\tau,\xi,x_n) = v_1(\tau,\xi,x_n)+v_2(\tau,\xi,x_n) = \int_0^{x_n} \mathcal{J}_+(\tau,i\xi,x-y_n)g(y_n)dy_n +$$
$$+\int_{x_n}^{\infty} \mathcal{J}_-(\tau,i\xi,x_n-y_n)g(y_n)dy_n + \sum_{j=1}^{\mu} \mathcal{J}_j(\tau,i\xi,x_n)\times$$
$$\times\int_0^\infty B_j(i\xi,D_{z_n})\mathcal{J}_-(\tau,i\xi,z_n-y_n)\Big|_{z_n=0} g(y_n)dy_n.$$

Из условия 5) вытекает, что решение краевой задачи (4) будет единственным (см., например, [7-8]). Для того, чтобы получить точные оценки контурных интегралов

$$\mathcal{J}_+(\tau,i\xi,x_n),\ \mathcal{J}_-(\tau,i\xi,x_n),\ \mathcal{J}_j(\tau,i\xi,x_n),\ j=1,\dots,\mu,$$

нужно иметь точные оценки корней $\lambda^+_\kappa(\tau,i\xi)$ и $\lambda^-_q(\tau,i\xi)$ уравнения $L(\tau,i\xi,i\lambda)=0$ и коэффициентов полиномов $N_j(\tau,i\xi,i\lambda)$. Из вида оператора $L(D)$ и условий 1), 2) вытекает, что среди вещественных корней по λ уравнения $L(\tau,i\xi,i\lambda)=0$ при $Re\,\tau>0$, $\xi\in E_{n-1}$ могут быть только нулевые, причем это возможно лишь при $\xi=0$. А поскольку

$$L(\tau,0,i\lambda)\equiv a_1\tau\lambda^m + a_0\lambda^{1/\alpha_n} = 0,$$

или $a_i\neq 0$, $\alpha_n m+\alpha_0=1$, то кратность нулевого корня по λ равна m. Обозначим через $\lambda^+_1(\tau,i\xi),\dots,\lambda^+_p(\tau,i\xi)$ корни, лежащие в верхней полуплоскости при $\xi\neq 0$ и равные 0 при $\xi=0$, а через $\lambda^-_1(\tau,i\xi),\dots$ $\dots,\lambda^-_q(\tau,i\xi)$, $p+q=m$, - корни, лежащие в нижней полуплоскости при $\xi\neq 0$ и равные 0 при $\xi=0$. Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда для корней* $\lambda^+_\kappa(\tau,i\xi)$, $\lambda^-_q(\tau,i\xi)$ *при* $Re\,\tau>0$, $\xi\in E_{n-1}$ *справедливы оценки:*

$$c_1<\xi>^{\alpha_n} \geq |\lambda^+_\kappa(\tau,i\xi)| \geq |\mathcal{J}m\,\lambda^+_\kappa(\tau,i\xi)| \geq c_2<\xi>^{\alpha_n} \quad (5)$$

при $1\leq\kappa\leq p$;

$$c_1<\xi>^{\alpha_n} \geq |\lambda^-_\kappa(\tau,i\xi)| \geq |\mathcal{J}m\,\lambda^-_\kappa(\tau,i\xi)| \geq c_2<\xi>^{\alpha_n} \quad (6)$$

при $1\leq\kappa\leq q=m-p$;

$$c_1 < s >^{\alpha_n} \geqslant |\lambda^+_{p+k}(\tau, i\xi)| \geqslant |\operatorname{Im} \lambda^+_{p+k}(\tau, i\xi)| \geqslant c_2 < s >^{\alpha_n} \tag{7}$$

при $1 \leqslant k \leqslant \mu - p$;

$$c_1 < s >^{\alpha_n} \geqslant |\lambda^-_{q+k}(\tau, i\xi)| \geqslant |\operatorname{Im} \lambda^-_{q+k}(\tau, i\xi)| \geqslant c_2 < s >^{\alpha_n} \tag{8}$$

при $1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{\alpha_n} - \mu - q,$

где $s = (\tau, \xi)$ *и* $c_1, c_2 > 0$ *— константы, не зависящие от* s .

Доказательство. Из условия 1) следует, что для любого $c > 0$ имеет место

$$\lambda^+_k(c^{\alpha_0}\tau, c^{\alpha} i\xi) = c^{\alpha_n} \lambda^+_k(\tau, i\xi),$$

$$\lambda^-_q(c^{\alpha_0}\tau, c^{\alpha} i\xi) = c^{\alpha_n} \lambda^-_q(\tau, i\xi).$$

Отсюда получаем оценки (7) и (8) сверху. Оценки (7) и (8) снизу вытекают из того, что мнимые части корней $\lambda^+_k(\tau, i\xi)$ и $\lambda^-_q(\tau, i\xi)$ также однородны относительно вектора $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ с показателем однородности α_n , и в случае $p+1 \leqslant k \leqslant \mu$, $q+1 \leqslant q \leqslant \frac{1}{\alpha_n} - \mu$ корни вещественными быть не могут при $\operatorname{Re}\tau \geqslant 0$, $\xi \in E_{n-1}$, $|\tau| + |\xi| \neq 0$.

Получим теперь оценки (5), (6) . Вначале покажем, что имеет место оценка:

$$c_3 (|\lambda| + <\xi>^{\alpha_n})^m (|\lambda| + < s >^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_n} - m} \geqslant |L(\tau, i\xi, i\lambda)| \geqslant$$
$$\geqslant c_4 (|\lambda| + <\xi>^{\alpha_n})^m (|\lambda| + < s >^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_n} - m}. \tag{9}$$

Из условий 1) и 2) вытекает, что выполнены следующие неравенства:

$$c_1 (|\lambda|^{\frac{1}{\alpha_n}} + <\xi>) \geqslant L_0(i\xi, i\lambda) \geqslant c_2 (|\lambda|^{\frac{1}{\alpha_n}} + <\xi>),$$

$$c_1 (|\lambda|^{\frac{1}{\alpha_n}} + <\xi>)^{1-\alpha_0} \geqslant L_1(i\xi, i\lambda) \geqslant c_2 (|\lambda|^{\frac{1}{\alpha_n}} + <\xi>)^{1-\alpha_0},$$

а отсюда

$$|L(\tau, i\xi, i\lambda)|^2 = \rho^2 L_1^2(i\xi, i\lambda) + [\sigma L_1(i\xi, i\lambda) + L_0(i\xi, i\lambda)]^2 \geqslant$$
$$\geqslant c_2^2 (|\lambda|^{\frac{1}{\alpha_n}} + <\xi>)^{2(1-\alpha_0)} \left[|\tau|^2 + (|\lambda|^{\frac{1}{\alpha_n}} + <\xi>)^{2\alpha_0}\right].$$

Теперь, учитывая, что $\alpha_0 = 1 - \alpha_n m$, получаем оценку (9) снизу. Оценка (9) сверху доказывается аналогично.

Из оценок (7) и (8) имеем

$$d_1\left(|\lambda|+<s>^{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{\alpha_n}-m} \geq \prod_{k=1}^{\mu-p} |\lambda-\lambda^+_{p+k}(\tau,i\xi)| \times$$

$$\times \prod_{q=1}^{\frac{1}{\alpha_n}-\mu-\tau} |\lambda-\lambda^-_{\tau+q}(\tau,i\xi)| \geq d_2\left(|\lambda|+<s>^{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{\alpha_n}-m},$$

а поскольку

$$|L(\tau,i\xi,i\lambda)| = \prod_{k=1}^{\mu} |\lambda-\lambda^+_k(\tau,i\xi)| \prod_{q=1}^{1/\alpha_n-\mu} |\lambda-\lambda^-_q(\tau,i\xi)|,$$

то из (9) при $Re\,\tau \geq 0, (\xi,\lambda)\in E_n$ получаем оценку

$$c_1\left(|\lambda|+<\xi>^{\alpha_n}\right)^m \geq \prod_{k=1}^{p} |\lambda-\lambda^+_k(\tau,i\xi)| \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\tau} |\lambda-\lambda^-_j(\tau,i\xi)| \geq c_2\left(|\lambda|+<\xi>^{\alpha_n}\right)^m. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, вытекает

$$c_1<\xi>^{m\alpha_n} \geq \prod_{k=1}^{p} |\lambda^+_k(\tau,i\xi)| \prod_{j=1}^{\tau} |\lambda^-_j(\tau,i\xi)| \geq c_2<\xi>^{m\alpha_n},$$

что эквивалентно при $\xi\neq 0$ оценке

$$c_1 \geq \prod_{k=1}^{p} |\lambda^+_k(\tau',i\xi')| \prod_{j=1}^{\tau} |\lambda^-_j(\tau',i\xi')| \geq c_2, \tag{11}$$

где

$$\tau'=\tau<\xi>^{-\alpha_0}, \quad \xi'_k=\xi_k<\xi>^{-\alpha_k}, \quad k=1,\dots,n-1.$$

Докажем, что из оценок (10) и (11) следуют оценки (5) и (6), которые при $\xi\neq 0$ эквивалентны неравенствам:

$$c_k \geq |\lambda^+_k(\tau',i\xi')| \geq |Im\,\lambda^+_k(\tau',i\xi')| \geq c'_k \quad \text{при } 1\leq k\leq p; \tag{12}$$

$$c_j \geq |\lambda^-_j(\tau',i\xi')| \geq |Im\,\lambda^-_j(\tau',i\xi')| \geq c'_j \quad \text{при } 1\leq j\leq \tau. \tag{13}$$

Действительно, если $|\tau'|\leq R<\infty$, то получаем (12) и (13), ввиду $<\xi'>=1$, а также в силу непрерывности корней и того факта, что вещественными они могут быть лишь при $\xi=0$.

Покажем теперь справедливость этих оценок сверху при $|\tau'|\geqslant R$, где R - достаточно большое число. Допустим, что найдется корень $\lambda_q(\tau', i\xi')$, неограниченный по модулю при $|\tau'|\geqslant R$, т.е. существует последовательность $\{\tau'_K, \xi'_K\}$, $|\tau'_K|\longrightarrow\infty$, такая, что $|\lambda_q(\tau'_K, i\xi'_K)|\longrightarrow\infty$ при $K\longrightarrow\infty$. Тогда из (11) следует, что обязательно найдется по крайней мере один корень $\lambda_s(\tau', i\xi')$ такой, что $|\lambda_s(\tau'_K, i\xi'_K)|\longrightarrow 0$ при $K\longrightarrow\infty$. Но это невозможно, так как должно выполняться следующее тождество:

$$<\xi>^{\alpha_n} L(\tau'_K, i\xi'_K, i\lambda_s(\tau'_K, i\xi'_K)) \equiv <\xi>^{\alpha_n}\Big[\tau'_K\times L_1(i\xi'_K, i\lambda_s(\tau'_K, i\xi'_K))+$$

$$+ L_0(i\xi'_K, i\lambda_s(\tau'_K, i\xi'_K))\Big] = 0,$$

где $|\tau'_K|\to\infty$, $|L_j(i\xi'_K, i\lambda_s(\tau'_K, i\xi'_K))|\longrightarrow|L_j(i\xi'_0,0)|$, $j=0,1$, при $K\to\infty$ и $C_1\geqslant L_j(i\xi'_0,0)\geqslant C_2>0$ (так как $<\xi'_0>=1$). Полученное противоречие доказывает оценки (12) , (13) , а следовательно, (5) и (6) сверху.

Докажем теперь (5) и (6) снизу. Возьмем, к примеру, корень $\lambda_1^+(\tau, i\xi)$. Из (10) при $\lambda = Re\,\lambda_1^+(\tau, i\xi)$ имеем

$$|\mathcal{I}m\,\lambda_1^+(\tau, i\xi)|\prod_{K=2}^{p}|Re\,\lambda_1^+(\tau, i\xi)-\lambda_K^+(\tau, i\xi)|\prod_{j=1}^{q}|Re\,\lambda_1^+(\tau, i\xi)-$$

$$-\lambda_j^-(\tau, i\xi)|\geqslant C_2\left(|Re\,\lambda_1^+(\tau, i\xi)|+<\xi>^{\alpha_n}\right)^m\geqslant C_2<\xi>^{m\alpha_n}.$$

Отсюда, учитывая оценки (5) и (6) сверху, получаем

$$C_3<\xi>^{m\alpha_n}\geqslant C_1|\mathcal{I}m\,\lambda_1^+(\tau, i\xi)|<\xi>^{(m-1)\alpha_n}\geqslant C_2<\xi>^{m\alpha_n}.$$

Следовательно, оценка (5) снизу при $K=1$ доказана. Аналогично получаются и остальные.

Лемма доказана.

Сформулируем теперь оценки контурных интегралов $\mathcal{J}_+(\tau, i\xi, x_n)$ и $\mathcal{J}_-(\tau, i\xi, x_n)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия 1) , 2). Тогда имеет место оценка:*

$$|D^K_{x_n}\mathcal{J}_+(\tau, i\xi, x_n)|+|D^K_{x_n}\mathcal{J}_-(\tau, i\xi, -x_n)|\leqslant C_1<s>^{(K+1)\alpha_n-1}\times$$

$$\times e^{-dx_n<s>^{\alpha_n}}+C_2<\xi>^{(K+1-m)\alpha_n}<s>^{m\alpha_n-1}e^{-dx_n<\xi>^{\alpha_n}}, \tag{14}$$

где $C_i>0, d>0$ - константы, не зависящие от $s=(\tau,\xi)$.

Доказательство. Рассмотрим контурный интеграл $\mathcal{J}_+(\tau, i\xi, x_n)$. В силу однородности, имеем

$$D^{\kappa}_{x_n} \, \mathcal{J}_+(\tau, i\xi, x_n) = \frac{\langle s\rangle^{(\kappa+1)\alpha_n - 1}}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{e^{ix_n\lambda\langle s\rangle^{\alpha_n}}}{L(\tau', i\xi', i\lambda)} (i\lambda)^{\kappa} d\lambda,$$

где

$$\tau' = \tau\langle s\rangle^{-\alpha_0}, \quad \xi'_{\kappa} = \xi_{\kappa}\langle s\rangle^{-\alpha_{\kappa}}, \quad \kappa = 1, \ldots, n-1,$$

а контур Γ^+, который охватывает все корни $\lambda^+_{\kappa}(\tau', i\xi')$, в силу леммы 1 можно взять ограниченным.

Если $\langle\xi'\rangle \geqslant \delta > 0$, то, как следует из леммы 1, имеем

$$c_1 \geqslant |\lambda^+_{\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant |\mathcal{J}m\,\lambda^+_{\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant c_2\delta^{\alpha_n}$$

при $\kappa = 1, \ldots, \mu$,

$$c_1 \geqslant |\lambda^-_j(\tau', i\xi')| \geqslant |\mathcal{J}m\,\lambda^-_j(\tau', i\xi')| \geqslant c_2\delta^{\alpha_n}$$

при $j = 1, \ldots, \dfrac{1}{\alpha_n} - \mu$.

Поэтому, взяв в качестве контура Γ^+ границу области

$$\left\{\lambda : |Re\,\lambda| \leqslant 2c_1,\ d = \frac{c_2\delta^{\alpha_n}}{2} \leqslant \mathcal{J}m\,\lambda \leqslant 2c_1\right\}$$

получим при $\langle\xi'\rangle \geqslant \delta > 0$ оценку

$$|D^{\kappa}_{x_n} \mathcal{J}_+(\tau, i\xi, x_n)| \leqslant c\langle s\rangle^{(\kappa+1)\alpha_n - 1} e^{-dx_n\langle s\rangle^{\alpha_n}}.$$

Пусть теперь $\langle\xi'\rangle = \dfrac{\langle\xi\rangle}{\langle s\rangle} \leqslant \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Из леммы 1 имеем

$$c_1\delta^{\alpha_n} \geqslant |\lambda^+_{\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant |\mathcal{J}m\,\lambda^+_{\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant c_2\langle\xi'\rangle^{\alpha_n}$$

при $\kappa = 1, \ldots, p$;

$$c_1\delta^{\alpha_n} \geqslant |\lambda^-_{\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant |\mathcal{J}m\,\lambda^-_{\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant c_2\langle\xi'\rangle^{\alpha_n}$$

при $\kappa = 1, \ldots, r$;

$$c_1 \geqslant |\lambda^+_{p+\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant |\mathcal{J}m\,\lambda^+_{p+\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant c_2$$

при $\kappa = 1, \ldots, \mu - p$;

$$c_1 \geqslant |\lambda^-_{r+\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant |\mathcal{J}m\,\lambda^-_{r+\kappa}(\tau', i\xi')| \geqslant c_2$$

при $\kappa = 1, \ldots, \dfrac{1}{\alpha_n} - \mu - r$.

Поэтому в качестве контура Γ^+ можно взять $\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$, где Γ_1^+ – граница области $\{\lambda : |Re\lambda| \leq 2c_1, d = \frac{c_2}{2} \leq Im\lambda \leq 2c_1\}$, а Γ_2^+ - граница области $\{\lambda : |Re\lambda| \leq 2c_1 <\xi'>^{\alpha_n}, \frac{c_2}{2} <\xi'>^{\alpha_n} \leq Im\lambda \leq 2c_1 <\xi'>^{\alpha_n}\}$. Возьмем $\delta > 0$ такое, что $2c_1 \delta^{\alpha_n} < \frac{c_2}{3}$, т.е. Γ_1^+ и Γ_2^+ не пересекаются. Имеем

$$D_{x_n}^k \mathcal{J}_+(\tau, i\xi, x_n) = \frac{<s>^{(k+1)\alpha_n^{-1}}}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_1^+} \frac{e^{ix_n\lambda <s>^{\alpha_n}}}{L(\tau', i\xi', i\lambda)} (i\lambda)^k d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma_2^+} \frac{e^{ix_n\lambda <s>^{\alpha_n}}}{L(\tau', i\xi', i\lambda)} (i\lambda)^k d\lambda \right] = \mathcal{J}_+^1(\tau, i\xi, x_n) + \mathcal{J}_+^2(\tau, i\xi, x_n).$$

Отсюда, в силу выбора $\delta > 0$, получаем оценку

$$|\mathcal{J}_+^1(\tau, i\xi, x_n)| \leq c_1 <s>^{(k+1)\alpha_n^{-1}} e^{-dx_n <s>^{\alpha_n}}.$$

Рассмотрим теперь $\mathcal{J}_+^2(\tau, i\xi, x_n)$. При $\lambda \in \Gamma_2^+$ имеем

$$|L(\tau', i\xi', i\lambda)| = \prod_{k=1}^{\mu} |\lambda - \lambda_k^+(\tau', i\xi')| \prod_{j=1}^{\frac{1}{\alpha_n} - \mu} |\lambda - \lambda_j^-(\tau', i\xi')| \geq$$

$$\geq \prod_{k=1}^{\mu} \big||\lambda| - |\lambda_k^+(\tau', i\xi')|\big| \prod_{j=1}^{\frac{1}{\alpha_n} - \mu} \big||\lambda| - |\lambda_j^-(\tau', i\xi')|\big| \geq c(\delta) <\xi>^{m\alpha_n} <s>^{-m\alpha_n}.$$

Следовательно, учитывая это, получаем оценку

$$|\mathcal{J}_+^2(\tau', i\xi', x_n)| \leq c_2 e^{-dx_n <\xi>^{\alpha_n}} <s>^{(k+1)\alpha_n^{-1}} <\xi'>^{(k+1-m)\alpha_n} =$$

$$= c_2 e^{-dx_n <\xi>^{\alpha_n}} <\xi>^{(k+1-m)\alpha_n} <s>^{m\alpha_n^{-1}}.$$

Из вышесказанного следует оценка (14) для контурного интеграла $D_{x_n}^k \mathcal{J}_+(\tau, i\xi, x_n)$. Аналогичным образом эта оценка доказывается для интеграла $D_{x_n}^k \mathcal{J}_-(\tau, i\xi, -x_n)$.

Лемма доказана.

Введем обозначение

$$I_j(\tau, i\xi, x_n, y_n) = \mathcal{J}_j(\tau, i\xi, x_n) B_j(i\xi, D_{z_n}) \mathcal{J}_-(\tau, i\xi, z_n - y_n)\Big|_{z_n = 0},$$

$j = 1, \ldots, \mu$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия 1), 2), 4), 5). Тогда имеют место оценки:*

$$|D^{\kappa}_{x_n} I_j(\tau, i\xi, x_n, y_n)| \leq C \langle s\rangle^{\kappa\alpha_n - 1}\Big[\langle s\rangle^{\alpha_n} e^{-d(x_n+y_n)\langle s\rangle^{\alpha_n}} +$$
$$+ \langle \xi\rangle^{(1-m)\alpha_n}\langle s\rangle^{m\alpha_n} e^{-d(x_n+y_n)\langle\xi\rangle^{\alpha_n}} +$$
$$+ \langle \xi\rangle^{(1-m)\alpha_n}\langle s\rangle^{m\alpha_n} e^{-dx_n\langle s\rangle^{\alpha_n} - dy_n\langle\xi\rangle^{\alpha_n}} +$$
$$+ \langle \xi\rangle^{(1-m)\alpha_n}\langle s\rangle^{m\alpha_n} e^{-dx_n\langle \xi\rangle^{\alpha_n} - dy_n\langle s\rangle^{\alpha_n}}\Big], \tag{15}$$

$$j = 1, \ldots, \mu,$$

где $C > 0$ *- константа, не зависящая от* $s = (\tau, \xi)$.

Доказательство. Из равномерного условия Лопатинского 5) следует, что $\beta_p \neq \beta_q$. Будем считать, что $\{\beta_j\}$ упорядочены, т.е. $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_\mu < 1$. Изучим структуру матрицы $B(\tau, i\xi) = (b_{jk}(\tau, i\xi))$. Поскольку $M^+(\tau, 0, i\lambda) = \lambda^p \prod_{k=1}^{\mu-p}(\lambda - \lambda^+_{p+k}(\tau, 0))$, то i-е строки матрицы $B(\tau, 0)$, где $\beta_i \geq \mu\alpha_n$, имеют вид $(0, \ldots, 0, b_{ip+1}, \ldots, b_{i\mu})$, причем из однородности имеем

$$|b_{i\ell}(\tau, i\xi)| \leq C\langle\xi\rangle^{(p-\ell+1)\alpha_n}\langle s\rangle^{\beta_i - p\alpha_n}, \quad \ell = 1, \ldots, p,$$
$$|b_{ip+k}(\tau, i\xi)| \leq C\langle s\rangle^{\beta_i - (p+k-1)\alpha_n}, \quad k = 1, \ldots, \mu - p. \tag{16}$$

Отсюда, учитывая упорядоченность $\{\beta_j\}$ и условия 4), 5), получаем, что первые p строк у матрицы $B(\tau, 0)$ должны иметь вид $b_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте. Следовательно, $\beta_j = (j-1)\alpha_n$ при $j = 1, \ldots, p$.

Докажем вначале оценку (15) при $1 \leq j \leq p$. В силу однородности, имеем

$$D^{\kappa}_{x_n} I_j(\tau, i\xi, x_n, y_n) = \frac{\langle s\rangle^{(\kappa+1)\alpha_n - 1}}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{e^{ix_n\lambda\langle s\rangle^{\alpha_n}}}{M^+(\tau', i\xi', i\lambda)}(i\lambda)^{\kappa} N_j(\tau', i\xi', i\lambda)\,d\lambda \,\times$$
$$\times\ \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^-}\frac{e^{-iy_n\lambda'\langle s\rangle^{\alpha_n}}}{L(\tau', i\xi', i\lambda')} B_j(i\xi', i\lambda')\,d\lambda',$$

где $\tau' = \tau\langle s\rangle^{-\alpha_0}$, $\xi' = \xi\langle s\rangle^{-\alpha}$, контуры Γ^+ и Γ^- ограниченные и охватывают корни $\lambda^+_\kappa(\tau', i\xi')$ и $\lambda^-_\ell(\tau', i\xi')$ соответственно. Рассмотрим $j = 1$, т.е. $\beta_1 = 0$.

Если $\langle\xi'\rangle \geq \delta > 0$, то, очевидно, имеем

$$|D^{\kappa}_{x_n} I_1(\tau, i\xi, x_n, y_n)| \leq C\langle s\rangle^{(\kappa+1)\alpha_n - 1} e^{-d(x_n+y_n)\langle s\rangle^{\alpha_n}}.$$

Пусть $\langle\xi'\rangle \leq \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Представив Γ^+, как и при доказательстве леммы 2, в виде $\Gamma^+ = \Gamma^+_1 \cup \Gamma^+_2$, имеем

$$D^{\kappa}_{x_n} \mathcal{J}_1(\tau, i\xi, x_n) = \frac{\langle s\rangle^{\kappa\alpha_n}}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma^+_1} \frac{e^{ix_n\lambda\langle s\rangle^{\alpha_n}}}{M^+(\tau', i\xi', i\lambda)} (i\lambda)^{\kappa} \times\right.$$

$$\left.\times N_1(\tau', i\xi', i\lambda)d\lambda + \int_{\Gamma^+_2} \frac{e^{ix_n\lambda\langle s\rangle^{\alpha_n}}}{M^+(\tau', i\xi', i\lambda)}(i\lambda)^{\kappa} N_1(\tau', i\xi', i\lambda)d\lambda\right] =$$

$$= \mathcal{A}_1(\tau, i\xi, x_n) + \mathcal{A}_2(\tau, i\xi, x_n).$$

В силу определения контура Γ^+_1, выполнена оценка

$$|\mathcal{A}_1(\tau, i\xi, x_n)| \leq C\langle s\rangle^{\kappa\alpha_n} e^{-dx_n\langle s\rangle^{\alpha_n}}.$$

Рассмотрим интеграл $\mathcal{A}_2(\tau, i\xi, x_n)$. Оценим вначале $N_1(\tau', i\xi', i\lambda) = \sum_{\kappa=1}^{\mu} b^{\kappa 1}(\tau', i\xi') M_{\mu-\kappa}(\tau', i\xi', i\lambda)$ при $\lambda \in \Gamma^+_2$. Из оценок (16) и условий 1), 4) для элементов обратной матрицы $(b^{j\kappa}(\tau', i\xi'))$ вытекают оценки:

$$|b^{\kappa 1}(\tau', i\xi')| \leq C\langle\xi'\rangle^{(\kappa-1)\alpha_n}, \quad \kappa = 1, \dots, p,$$

$$|b^{\kappa 1}(\tau', i\xi')| \leq C\langle\xi'\rangle^{p\alpha_n}, \quad \kappa = p+1, \dots, \mu.$$

А поскольку из леммы 1, в силу определения полиномов $M_\ell(\tau, i\xi, i\lambda)$, при $\lambda \in \Gamma^+_2$ получаем неравенства

$$|M_{\mu-\kappa}(\tau', i\xi', i\lambda)| \leq C\langle\xi'\rangle^{(p-\kappa)\alpha_n} \quad \text{при } \kappa = 1, \dots, p,$$

$$|M_{\mu-\kappa}(\tau', i\xi', i\lambda)| \leq C \quad \text{при } \kappa = p+1, \dots, \mu,$$

то отсюда при $\lambda \in \Gamma^+_2$ имеем

$$|N_1(\tau', i\xi', i\lambda)| \leq \sum_{\kappa=1}^{p} |b^{\kappa 1}(\tau', i\xi')||M_{\mu-\kappa}(\tau', i\xi', i\lambda)| +$$

$$+\sum_{\kappa=p+1}^{\mu} |b^{\kappa 1}(\tau', i\xi')||M_{\mu-\kappa}(\tau', i\xi', i\lambda)| \leq C\langle\xi'\rangle^{(p-1)\alpha_n}.$$

Теперь, в силу того, что при $\lambda \in \Gamma^+_2$ выполняется неравенство

$$|M^+(\tau', i\xi', i\lambda)| \geq \prod_{k=1}^{p} \left| |\lambda| - |\lambda_k^{+}(\tau', i\xi')| \right| \times$$

$$\times \prod_{k=p+1}^{\mu} \left| |\lambda| - |\lambda_k^+(\tau', i\xi')| \right| \geq c(\delta) < \xi' >^{p\alpha_n},$$

из вышесказанного получаем оценку

$$|\mathcal{A}_2(\tau, i\xi, x_n)| \leq c <\xi>^{k\alpha_n} e^{-dx_n <\xi>^{\alpha_n}}.$$

Итак, при $<\xi'> \leq \delta$ имеем

$$|D_{x_n}^k \mathcal{I}_1(\tau, i\xi, x_n)| \leq c <s>^{k\alpha_n} e^{-dx_n <s>^{\alpha_n}} +$$

$$+ c <\xi>^{k\alpha_n} e^{-dx_n <\xi>^{\alpha_n}}.$$

Отсюда, учитывая лемму 2, получаем при $<\xi'> \leq \delta$ оценку

$$|D_{x_n}^k I_1(\tau, i\xi, x_n, y_n)| \leq c \Big[<s>^{k\alpha_n} e^{-dx_n <s>^{\alpha_n}} +$$

$$+ <\xi>^{k\alpha_n} e^{-dx_n <\xi>^{\alpha_n}} \Big] \Big[<s>^{\alpha_n - 1} e^{-dy_n <s>^{\alpha_n}} +$$

$$+ <\xi>^{(1-m)\alpha_n} <s>^{m\alpha_n - 1} e^{-dy_n <\xi>^{\alpha_n}} \Big].$$

Следовательно, при $j=1$ оценка (15) доказана. Вывод (15) при $1<j\leq p$ проводится аналогично.

Рассмотрим теперь случай $j \geq p+1$, т.е. $\beta_j \geq p\alpha_n$. Повторяя рассуждения из доказательства предыдущей леммы, получаем

$$|D_{x_n}^k I_j(\tau, i\xi, x_n, y_n)| \leq c <s>^{(k+1)\alpha_n - 1} \times$$

$$\times \Big[e^{-dx_n <s>^{\alpha_n}} + <\xi'>^{(1-p)\alpha_n} e^{-dx_n <\xi>^{\alpha_n}} \Big] \times$$

$$\times \Big[e^{-dy_n <s>^{\alpha_n}} + <\xi'>^{\beta_j + (1-m)\alpha_n} e^{-dy_n <\xi>^{\alpha_n}} \Big].$$

Отсюда, поскольку $m \geq p$, $<\xi'> \leq 1$ и $\beta_j \geq p\alpha_n$, следует (15).

Лемма доказана.

§3. Решение смешанной задачи (1) для уравнения с постоянными коэффициентами

Здесь будет доказана теорема 1.

Рассмотрим краевую задачу с параметром τ, $Re\tau > \gamma$ для уравнения с постоянными коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
&L(\tau, D_x, D_{x_n})v = g(\tau, x, x_n), \quad x_n > 0, \quad x \in E_{n-1}, \\
&B_j(D_x, D_{x_n})v\big|_{x_n=0} = 0, \quad j = 1, \ldots, \mu,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где оператор $L(\tau, D_x, D_{x_n})$ получен из оператора $L(D_t, D_x, D_{x_n})$ заменой производной D_t на параметр τ.

Имеет место следующая

Теорема 1°. *Пусть выполнены условия 1), 2), 4), 5). Если $g(\tau, x, x_n) \in \mathcal{L}^P(C_\gamma \times E_n^+)$, то краевая задача (17) имеет единственное решение $v(\tau, x, x_n) \in \widetilde{W}_2^{P/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)$, причем выполнена оценка*

$$
\|v(\tau, x, x_n), \widetilde{W}_2^{P/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)\| \leq c \|g(\tau, x, x_n), \mathfrak{M}^P(C_\gamma \times E_n^+)\|, \tag{18}
$$

где константа c не зависит от $g(\tau, x, x_n)$.

Следствие. *Отсюда и из обобщенной теоремы Пэли-Винера получаем утверждение теоремы 1.*

Итак, для доказательства корректной разрешимости смешанной задачи (1) в классе $W_{2,\gamma}^{P/\alpha}(E_{n+1}^{++})$ нужно доказать теорему 1°.

Решение краевой задачи (17) построим в явном виде, используя интегральное представление функций $f(x) \in L_p(E_{n-1})$ из работы С.В. Успенского [9]:

$$
f(x) = \lim_{h \to 0} (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \int_{E_{n-1}} \int_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\xi} G(\xi) f(y)\, d\xi\, dy\, dv, \tag{19}
$$

где $G(\xi) = c(R) < \xi >^R e^{-<\xi>^R}$, $R > 0$ - достаточно большое целое число. Равенство (19) понимается в смысле $L_p(E_{n-1})$.

Определим интегральный оператор

$$
(R_0^h + R_\infty^h) g(\tau, x, x_n) = (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \int_{E_{n-1}} \int_{E_{n-1}} \int_0^{x_n} e^{i\left(\frac{x-y}{v^\alpha}\right)\xi} G(\xi) \times
$$

$$
\times \mathcal{J}_+\left(\tau, \frac{i\xi}{v^\alpha}, x_n - y_n\right) g(\tau, y, y_n)\, dy_n\, dy\, d\xi\, dv + (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|-1} \times
$$

$$\times\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{\infty}^{x_n} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi)\mathcal{J}_-\left(\tau,\frac{i\xi}{\sigma^\alpha},x_n-y_n\right)g(\tau,y,y_n)\,dy_n\,dy\,d\xi\,d\sigma.$$

Имеет место следующая

Лемма 4. *Если* $g(\tau,x,x_n)\in\mathcal{L}^p(C_j\times E_n^+)$ *, то выполнена оценка*

$$\|(R_0^h+R_\infty^h)g(\tau,x,x_n),\widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_j\times E_n^+)\|\leq c\,\|g(\tau,x,x_n),\mathfrak{M}^p(C_j\times E_n^+)\|, \qquad (20)$$

причем

$$\|(R_0^{h_1}+R_\infty^{h_1})g(\tau,x,x_n)-(R_0^{h_2}+R_\infty^{h_2})g(\tau,x,x_n),\ \widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_j\times E_n^+)\|\to 0 \qquad (21)$$

при $h_1,h_2\to 0.$

Доказательство проведем по той же схеме, что и при доказательстве леммы 1.3 из [6], но подробности будем опускать. Оценим выражение

$$I_\nu=\int\limits_{E_1}\int\limits_{E_n^+}|\tau|^{2\nu_0}|D_x^{\nu}D_{x_n}^{\nu_n}(R_0^h+R_\infty^h)g(\tau,x,x_n)|^2\,d\bar{x}\,d\eta,\quad \tau=i\eta+\sigma$$

при $\vec{\nu}\vec{\alpha}=p$. Для этого достаточно рассмотреть три случая: 1) $\nu_n=p/\alpha_n$; 2) $\nu_k=p/\alpha_k$, $k=1,\dots,n-1$; 3) $\nu_0=p/\alpha_0$. Используя тождества

$$\mathcal{J}_s=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{(i\xi)^{s-1}}{L(\tau,i\xi,i\lambda)}d\lambda=0 \quad \text{при } s=1,\dots,1/\alpha_n-1 \text{ и } \mathcal{J}_{1/\alpha_n}=1$$

и рассуждая так же, как и в лемме 1.3 из [6], при $\nu_n=p/\alpha_n$ (интегралы по всему E_{n-1} записываем без указания области интегрирования) получим:

$$I_\nu\leq\Big\|\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)D_{x_n}^{p-1/\alpha_n}g(\tau,y,x_n)\,dy\,d\xi\,d\sigma,L_2(E_{n+1}^+)\Big\|+$$

$$+\Big\|\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1}\iiint\limits_0^{x_n}e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)\int\limits_{\Gamma^+}\frac{e^{i(x_n-y_n)\lambda}}{L\left(\tau,\frac{i\xi}{\sigma^\alpha},i\lambda\right)}(i\lambda)^{p/\alpha_n}d\lambda\times$$

$$\times g(\tau,y,y_n)\,d\bar{y}\,d\xi\,d\sigma,L_2(E_{n+1}^+)\Big\|+\Big\|\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1}\iiint\limits_\infty^{x_n}e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma^-}\frac{e^{i(x_n-y_n)\lambda}}{L\left(\tau,\frac{i\xi}{\sigma^\alpha},i\lambda\right)}(i\lambda)^{p/\alpha_n}d\lambda\, g(\tau,y,y_n)\,d\bar{y}\,d\xi\,d\sigma,L_2(E_{n+1}^+)\Big\|+$$

$$+\sum_{K=0}^{p-1/\alpha_n-1}\Big\|\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1}\iint e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi}G(\xi)\int_\Gamma\frac{(i\lambda)^{1/\alpha_n+K}}{L\left(\tau,\frac{i\xi}{\sigma^\alpha},i\lambda\right)}d\lambda\times$$

$$\times D_{x_n}^{p-1/\alpha_n-1-K}g(\tau,y,x_n)dyd\xi d\sigma,\ L_2(E_{n+1}^+)\Big\|=\sum_{i=1}^{3}\mathcal{A}_i+\sum_{K=0}^{p-1/\alpha_n-1}B_K\,.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Из интегрального представления (19) имеем

$$\mathcal{A}_1\leqslant\|D_{x_n}^{p-1/\alpha_n}g(\tau,x,x_n),L_2(E_n^+)\|\,.$$

Рассмотрим второе слагаемое. Сделав замену $S=\xi\sigma^{-\alpha}$, получим

$$\mathcal{A}_2=\Big\|\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}\iiint_0^{x^n}e^{i(x-y)s}G(s\sigma^\alpha)D_{x_n}^{p/\alpha_n}\mathcal{J}_+(\tau,is,x_n-y_n)\times$$

$$\times g(\tau,y,y_n)d\bar{y}dsd\sigma,\ L_2(E_{n+1}^+)\Big\|=$$ (используя теорему Планшереля и функцию $\theta(x_n)$ Хевисайда, имеем)

$$=\Big\|\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}G(s\sigma^\alpha)\theta(x_n-y_n)D_{x_n}^{p/\alpha_n}\mathcal{J}_+(\tau,is,x_n-y_n)\times$$

$$\times\theta(y_n)\hat{g}(\tau,s,y_n)dy_nd\sigma,\ L_2(E_{n+1})\Big\|\leqslant$$

(применяя неравенство Юнга в $L_2(E_1)$ и учитывая лемму 2, $\mathfrak{s}=(\tau,S)$, получаем)

$$\leqslant c\Big\|\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(s\sigma^\alpha)d\sigma\,\theta(y_n)\hat{g}(\tau,s,y_n)\Big[\int_0^{\infty}\Big(\langle\mathfrak{s}\rangle^{p-1+\alpha_n}e^{-dx_n\langle\mathfrak{s}\rangle^{\alpha_n}}+$$

$$+\langle s\rangle^{p-1+\alpha_n}e^{-dx_n\langle s\rangle^{\alpha_n}}\Big)dx_n\Big],\ L_2(E_{n+1})\Big\|\leqslant$$

(используя определение функции $G(S)$, имеем)

$$\leqslant c_1\|\langle\mathfrak{s}\rangle^{p-1}\hat{g}(\tau,s,y_n),L_2(E_{n+1}^+)\|+c_1\|\langle s\rangle^{p-1}\hat{g}(\tau,s,y_n),L_2(E_{n+1}^+)\|\leqslant$$

$$\leqslant c_2\|g(\tau,y,y_n),\widetilde{W}_2^{p-1/\alpha}(C_y\times E_n^+)\|\,.$$

Аналогичным образом (см. [6]) получим

$$\mathcal{A}_3 \leq c \| g(\tau, y, y_n), \widetilde{W}_2^{p-1/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)\| .$$

Рассмотрим теперь B_K . Сделав замену $s=\xi\sigma^{-\alpha}$, по теореме Планшереля, имеем

$$B_K = \Big\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha}) D_{y_n}^{1/\alpha_n + K} \mathcal{J}(\tau, is, y_n)\Big|_{y_n=0} \times$$

$$\times D_{x_n}^{p-1/\alpha_n - 1 - K} \hat{g}(\tau, s, x_n),\ L_2(E_{n+1}^+)\Big\| \leq$$

(учитывая определение функции $G(s)$ и лемму 2 , получаем)

$$\leq c \| \langle s\rangle^{(K+1)\alpha_n} D_{x_n}^{p-1/\alpha_n - 1 - K} \hat{g}(\tau, s, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\| +$$

$$+ c \| \langle s\rangle^{(K+1)\alpha_n} D_{x_n}^{p-1/\alpha_n - 1 - K} \hat{g}(\tau, s, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\| \leq$$

$$\leq c_1 \| g(\tau, x, x_n), \widetilde{W}_2^{p-1/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)\| .$$

Итак, при $\nu_n = p/\alpha_n$ имеем

$$I_\nu \leq c \| g(\tau, x, x_n), \widetilde{W}_2^{p-1/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)\| .$$

Эта оценка справедлива и при $\nu_K = p/\alpha_K$, $1 \leq K \leq n-1$, а поскольку рассуждения ничем существенным не отличаются от проведенных, то мы их опускаем.

Рассмотрим теперь случай, когда $\nu_0 = p/\alpha_0$. Имеем

$$I_\nu \leq \Big\| |\tau|^{p/\alpha_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1} \iint\int_0^{x_n} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi} G(\xi) \times$$

$$\times \mathcal{J}_+\left(\tau, \frac{i\xi}{\sigma^{\alpha}}, x_n - y_n\right) g(\tau, y, y_n)\, dy_n\, dy\, d\xi\, d\sigma,\ L_2(E_{n+1}^+)\Big\| +$$

$$+ \Big\| |\tau|^{p/\alpha_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1} \iint\int_\infty^{x_n} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^{\alpha}}\right)\xi} G(\xi) \mathcal{J}_-\left(\tau, \frac{i\xi}{\sigma^{\alpha}}, x_n - y_n\right) \times$$

$$\times g(\tau, y, y_n) dy_n dy d\xi d\sigma, L_2(E^+_{n+1})\| = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2.$$

Оценим первое слагаемое. По теореме Планшереля, как и ранее, имеем

$$\mathcal{A}_1 \leqslant \| |\tau|^{\nu_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G(s\sigma^{\alpha}) \theta(x_n - y_n) \mathcal{J}_+(\tau, is, x_n - y_n) \times$$

$$\times \theta(y_n) \hat{g}(\tau, s, y_n) dy_n d\sigma, L_2(E_{n+1})\| \leqslant$$

(применяя неравенство Юнга в $L_2(E_1)$ и учитывая лемму 2, получаем)

$$\leqslant C \| |\tau|^{\nu_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha}) d\sigma < \xi >^{-1} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1})\| +$$

$$+ c \| |\tau|^{\nu_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha}) d\sigma < s >^{-m\alpha_n} < \xi >^{m\alpha_n - 1} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1})\| \leqslant$$

(используя определение функции $G(s)$ и учитывая, что $\nu_0 = p/\alpha_0$ и $\alpha_0 = 1 - m\alpha_n$, имеем)

$$\leqslant c_1 \| |\tau|^{p - 1/\alpha_0} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1})\| + c_1 \| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} \int_h^1 \sigma^{-1} \times$$

$$\times G(s\sigma^{\alpha}) d\sigma < s >^{-m\alpha_n} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1})\| +$$

$$+ c_1 \| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} \int_1^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|/2 - \alpha_0} G(\xi) < \xi >^{-m\alpha_n} \times$$

$$\times \hat{g}\left(\tau, \frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}, y_n\right) d\sigma, L_2(E^+_{n+1})\| = \sum_{K=1}^{3} \mathcal{A}_{1K}.$$

Оценим каждое слагаемое. Имеем

$$\mathcal{A}_{11} \leqslant c \| g(\tau, y, y_n), \widetilde{W}_2^{p - 1/\alpha}(C_j \times E^+_n)\|.$$

В силу неравенства $G(s\sigma^{\alpha}) < s >^{-m\alpha_n} \leqslant c\sigma^{m\alpha_n}$, получаем

$$\mathcal{A}_{12} \leqslant c \| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} \int_h^1 \sigma^{-1 + m\alpha_n} d\sigma \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1})\| \leqslant$$

(так как $m\alpha_n > 0$, то)

$$\leq c_1 \| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} g(\tau, y, y_n), L_2(E^+_{n+1}) \|.$$

Рассмотрим теперь $\mathcal{A}_{13}$. Если $|\alpha|/2 + \alpha_0 > 1$, в силу определения функции $G(\xi)$, получаем

$$\mathcal{A}_{13} \leq c_2 \| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} \| g(\tau, y, y_n), L_1(E_{n-1}) \|, L_2(E_2^+) \|.$$

Если $\frac{|\alpha|}{2} + \alpha_0 + N\alpha_{min} > 1 \geq \frac{|\alpha|}{2} + \alpha_0 + (N-1)\alpha_{min}$

и $\int\limits_{E_{n-1}} x^s g(\tau, x, x_n)\, dx = 0$ при $0 \leq |s| \leq N-1$,

тогда, в силу того, что $G(\xi) = c(R) <\xi>^R e^{-<\xi>^R}$, где $R > 0$ можно взять достаточно большим, то, как и в работе [6], имеем

$$\mathcal{A}_{13} \leq c \int\limits_1^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|/2 - \alpha_0} \| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} G(\xi) <\xi>^{-m\alpha_n} \times$$

$$\times \int\limits_{E_{n-1}} \prod_{k=1}^{N} |\xi_{i_k} \sigma^{-\alpha_{i_k}} y_{i_k} \| g(\tau, y, y_n) | dy, L_2(E^+_{n+1}) \| d\sigma \leq$$

$$\leq c_1 \int\limits_1^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|/2 - \alpha_0 - N\alpha_{min}} d\sigma \Big[\sum_{|q| \leq N} \| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} \times$$

$$\times \| g(\tau, y, y_n) y^q, L_1(E_{n-1}) \|, L_2(E_2^+) \| \Big].$$

Из приведенных выкладок получаем оценку

$$\mathcal{A}_1 \leq c \| g(\tau, x, x_n), \mathfrak{M}^p(C_1 \times E_n^+) \|.$$

Такая же оценка справедлива и для $\mathcal{A}_2$ и доказывается аналогично.

Итак, все три случая рассмотрены. Отсюда вытекает оценка (20). (Доказательство (21) проводится по этой же схеме.)

Лемма доказана.

Определим интегральные операторы

$$R_j^h g(\tau, x, x_n) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1} \int\limits_{E_{n-1}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{i\left(\frac{x-y}{\sigma^\alpha}\right)\xi} G(\xi) \mathcal{J}_j\left(\tau, \frac{i\xi}{\sigma^\alpha}, x_n\right) \times$$

$$\times \int_0^\infty \left[B_j \left(\frac{i\xi}{\sigma^\alpha}, D_{z_n} \right) \mathcal{J}_- \left(\tau, \frac{i\xi}{\sigma^\alpha}, z_n - y_n \right) \Big|_{z=0} \right] \times$$

$$\times g(\tau, y, y_n) dy_n \, dy \, d\xi \, d\sigma, \quad j = 1, \ldots, \mu.$$

Имеет место следующая

Лемма 5. *Если* $g(\tau, x, x_n) \in \mathcal{L}^p(C_j \times E_n^+)$ *, то выполнены оценки*

$$\| R_j^h g(\tau, x, x_n), \widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_j \times E_n^+) \| \leq c \| g(\tau, x, x_n), \mathcal{M}^p(C_j \times E_n^+) \|, \tag{22}$$

причем

$$\| R_j^{h_1} g(\tau, x, x_n) - R_j^{h_2} g(\tau, x, x_n), \widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_j \times E_n^+) \| \longrightarrow 0 \tag{23}$$

при $h_1, h_2 \longrightarrow 0, \ j = 1, \ldots, \mu.$

Доказательство. Как и в лемме 4, для получения (22) достаточно оценить выражение

$$I_{\nu_j} = \int_{E_1} \int_{E_n^+} |\tau|^{2\nu_0} \left| D_x^\nu D_{x_n}^{\nu_n} R_j^h g(\tau, x, x_n) \right|^2 d\bar{x} d\eta, \quad \tau = i\eta + \sigma,$$

рассмотрев три случая: 1) $\nu_n = p/\alpha_n$; 2) $\nu_k = p/\alpha_k$, $1 \leq k \leq n-1$; 3) $\nu_0 = p/\alpha_0$.

В 1-м случае, сделав замену $s = \xi \sigma^{-\alpha}$, по теореме Планшереля имеем

$$I_{\nu_j} = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \left\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^\alpha) d\sigma \, D_{x_n}^{p/\alpha_n} \mathcal{J}_j(\tau, is, x_n) \times \right.$$

$$\times \int_0^\infty \left[B_j(is, D_{z_n}) \mathcal{J}_-(\tau, is, z_n - y_n) \Big|_{z_n=0} \right] \times$$

$$\left. \times \hat{g}(\tau, s, y_n) dy_n, \ L_2(E_{n+1}^+) \right\| \leq$$

(используя оценку (15) при $K = p/\alpha_n$, получаем)

$$\leq c \left\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^\alpha) d\sigma \langle\xi\rangle^{p-1+\alpha_n} e^{-dx_n\langle\xi\rangle^{\alpha_n}} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^\infty e^{-dy_n\langle s\rangle^{\alpha_n}} \hat{g}(\tau, s, y_n) dy_n, L_2(E_{n+1}^+) \right\| +$$

$$+c\left\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha})\,d\sigma \langle \xi \rangle^{p-1+m\alpha_n} \langle s \rangle^{(1-m)\alpha_n} e^{-dx_n \langle s \rangle^{\alpha_n}} \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^{\infty} e^{-dy_n \langle s \rangle^{\alpha_n}} \hat{g}(\tau, s, y_n)\,dy_n,\ L_2(E^+_{n+1})\right\| +$$

$$+c\left\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha})\,d\sigma \langle \xi \rangle^{p-1+m\alpha_n} \langle s \rangle^{(1-m)\alpha_n} e^{-dx_n \langle \xi \rangle^{\alpha_n}} \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^{\infty} e^{-dy_n \langle s \rangle^{\alpha_n}} \hat{g}(\tau, s, y_n)\,dy_n,\ L_2(E^+_{n+1})\right\| +$$

$$+c\left\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha})\,d\sigma \langle \xi \rangle^{p-1+m\alpha_n} \langle s \rangle^{(1-m)\alpha_n} e^{-dx_n \langle s \rangle^{\alpha_n}} \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^{\infty} e^{-dy_n \langle \xi \rangle^{\alpha_n}} \hat{g}(\tau, s, y_n)\,dy_n,\ L_2(E^+_{n+1})\right\| = \sum_{k=1}^{4} \mathcal{A}_k .$$

Для первого слагаемого, используя неравенство Гёльдера и учитывая определение функции $G(s)$, получаем

$$\mathcal{A}_1 \leq c\,\| g(\tau, y, y_n),\ \widetilde{W}_2^{p-1/\alpha}(C_y \times E^+_n)\| .$$

Рассмотрим 2-е слагаемое. Используя неравенство Гёльдера, имеем

$$\mathcal{A}_2 \leq c\left\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha})\,d\sigma \langle \xi \rangle^{p-1+m\alpha_n} \langle s \rangle^{-m\alpha_n} \times\right.$$

$$\left.\times\, \hat{g}(\tau, s, y_n),\ L_2(E^+_{n+1})\right\| \leq \text{(так как} \quad m\alpha_n = 1-\alpha_0, \text{ то)}$$

$$= c_1 \left\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha})\, d\sigma \langle s\rangle^{p-1} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E_{n+1}^+) \right\| +$$

$$+ c_1 \left\| |\tau|^{p/\alpha_0 - 1} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha})\, d\sigma \langle s\rangle^{-m\alpha_n} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E_{n+1}^+) \right\| .$$

А поскольку такие слагаемые уже оценивались при доказательстве леммы 4, то получаем оценку

$$\mathcal{A}_2 \leq c \| g(\tau, y, y_n), \mathfrak{M}^p(C_j \times E_n^+) \| .$$

(Аналогично доказывается эта оценка и для слагаемых $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$.) Следовательно, в первом случае $(\nu_n = p/\alpha_n)$ имеем

$$I_{\nu_j} \leq c \| g(\tau, y, y_n), \mathfrak{M}^p(C_j \times E_n^+) \| .$$

Поскольку получение оценок во 2-м и 3-м случаях ничем существенным не отличается от проведенных рассуждений, то приведем лишь окончательный результат:

$$I_{\nu_j} \leq c \| g(\tau, y, y_n), \widetilde{W}_2^{p-1/\alpha}(C_j \times E_n^+) \| \quad \text{при } \nu_k = p/\alpha_k ,$$

$$I_{\nu_j} \leq c \| g(\tau, y, y_n), \mathfrak{M}^p(C_j \times E_n^+) \| \quad \text{при } \nu_0 = p/\alpha_0 .$$

Отсюда следует оценка (22) ; оценка (23) получается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $g(\tau, \bar{x}) \in \mathcal{L}^p(C_j \times E_n^+)$. *Тогда при* $h \to 0$ *выполнено*

$$\| L(\tau, D_{\bar{x}})(R_0^h + R_\infty^h + \sum_{j=1}^{\mu} R_j^h) g(\tau, \bar{x}) - g(\tau, \bar{x}), L_2(C_j \times E_n^+) \| \to 0,$$

$$\| B_k(D_{\bar{x}})(R_0^h + R_\infty^h + \sum_{j=1}^{\mu} R_j^h) g(\tau, \bar{x}) \Big|_{x_n = 0}, L_2(C_j \times E_{n-1}) \| \to 0,$$

$k = 1, \ldots, \mu .$

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 1.7 из [6] .

Из лемм 4 и 5 следует, что можно определить линейный непрерывный оператор

$$Rg(\tau,\bar{x}) = \lim_{h\to 0}\left(R_0^h + R_\infty^h + \sum_{j=1}^{\mu} R_j^h\right) g(\tau,\bar{x}), \tag{24}$$

действующий из $\mathcal{L}^p(C_\gamma \times E_n^+)$ в $\widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)$.

Из леммы 6 получаем, что функция

$$v(\tau,\bar{x}) = Rg(\tau,\bar{x}) \in \widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)$$

будет решением краевой задачи (17). Доказательство единственности решения проводится по обычной схеме (см., например, [7,8])

Теорема 1° доказана. Отсюда, как уже отмечалось, получаем утверждение теоремы 1.

§4. Решение смешанной задачи (1) для уравнения с переменными коэффициентами

Как и в предыдущем параграфе, решение смешанной задачи (1) сведем к решению краевой задачи с параметром τ, $Re\,\tau > \gamma$:

$$\begin{gathered} L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})v = G(\tau,\bar{x}), \quad x_n > 0, \ x \in E_{n-1}, \\ B_j(D_{\bar{x}})v\big|_{x_n=0} = 0, \quad j=1,\ldots,\mu . \end{gathered} \tag{25}$$

Имеет место следующая

Теорема 2°. *Пусть выполнены условия 1) – 5), причем коэффициенты оператора $L(\bar{x};D_t,D_{\bar{x}})$ достаточно мало отличаются от постоянных, $G(\tau,\bar{x}) \in \mathfrak{M}^p(C_\gamma \times E_n^+)$. Если $|\alpha|/2 + \alpha_0 > 1$, то краевая задача (25) имеет единственное решение $v(\tau,\bar{x}) \in \widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)$, причем выполнена оценка*

$$\|v(\tau,\bar{x}), \widetilde{W}_2^{p/\alpha}(C_\gamma \times E_n^+)\| \le c(K)\, \|G(\tau,\bar{x}), \mathfrak{M}^p(C_\gamma \times E_n^+)\|, \tag{26}$$

где константа $c(K)$ зависит от $diam\,K$.

Если $|\alpha|/2 + \alpha_0 \le 1$, то предположим, что выполнено условие

$$\int_{E_{n-1}} x^s \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}}) \circ R\right)^k\right) G(\tau,x,x_n)\,dx = 0 \tag{27}$$

при $0 \le |s| \le N-1$,

где

$$\frac{|\alpha|}{2} + \alpha_0 + N\alpha_{min} > 1 \ge \frac{|\alpha|}{2} + \alpha_0 + (N-1)\alpha_{min};$$

$$\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}}) = L(\bar{x}^{\circ};\tau,D_{\bar{x}}) - L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}});$$

$\bar{x}^{\circ}\notin K$, $R = R(\bar{x}^{\circ})$ *– оператор, определенный равенством* (24)

Тогда краевая задача (25) *также имеет единственное решение* $U(\tau,\bar{x})\in$ $\in\widetilde{W}_2^{P/\alpha}(C_\gamma\times E_n^+)$ *, и для него выполнена оценка* (26).

Следствие. *Отсюда, в силу теоремы Пэли-Винера, получаем утверждение теоремы 2.*

Доказательство теоремы 2° проводится по обычной схеме (см., например, [3]): используя оператор $R=R(\bar{x}^{\circ})$, построенный в §3, сведем решение краевой задачи (25) к решению операторного уравнения $(I+T)g = G$, где оператор T мал по норме. Действительно, решение краевой задачи (25) будем искать в виде $U(\tau,\bar{x}) = Rg(\tau,\bar{x})$. Подставляя в уравнение и граничные условия, имеем

$$L(\bar{x},\tau,D_{\bar{x}})Rg(\tau,\bar{x}) = g(\tau,\bar{x}) - \Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})Rg(\tau,\bar{x}) = G(\tau,\bar{x})$$

и $B_j(D_{\bar{x}})Rg(\tau,\bar{x})\big|_{x_n=0} = 0, \quad j=1,\dots,\mu.$

Следовательно, чтобы получить решение задачи (25), нужно найти функцию $g(\tau,\bar{x})$ из уравнения

$$g(\tau,\bar{x}) - Tg(\tau,\bar{x}) = G(\tau,\bar{x}), \tag{28}$$

где $T = \Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})\circ R.$

Покажем, что если коэффициенты оператора $L(\bar{x};D_t,D_{\bar{x}})$ достаточно малы, то

$$\|Tg(\tau,\bar{x}), \mathfrak{M}^P(C_\gamma\times E_n^+)\| \le q\|g(\tau,\bar{x}),\mathfrak{M}^P(C_\gamma\times E_n^+)\|, \quad \text{где} \quad q<1.$$

По условию 3), имеем

$$\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}}) = \tau\sum_{\beta\alpha=1-\alpha_0}(a_\beta(\bar{x}^{\circ}) - a_\beta(\bar{x}))D_x^\beta +$$

$$+\sum_{\substack{\beta\alpha+K\alpha_n=1\\ K\alpha_n\le\alpha_0}}(a_{\beta K}(\bar{x}^{\circ}) - a_{\beta K}(\bar{x}))D_x^\beta D_{x_n}^K.$$

Введем обозначения $d_1 = \sum\limits_{\beta\alpha=1-\alpha_0}\|(a_\beta(\bar{x}^{\circ}) - a_\beta(\bar{x})), C^{P-1/\alpha}\|,$

$$d_2 = \sum_{\substack{\beta\alpha+K\alpha_n=1\\ K\alpha_n\le\alpha_0}}\|(a_{\beta K}(\bar{x}^{\circ}) - a_{\beta K}(\bar{x})), C^{P-1/\alpha}\|.$$

Имеет место следующая

Лемма 7. *Пусть выполнены условия 1) – 5). Тогда справедлива оценка:*

$$\|Tg(\tau,\bar{x}),\ \mathfrak{M}^p(C_j\times E_n^+)\|\leq c(K)(d_1+d_2)\times$$
$$\times\|g(\tau,\bar{x}),\ \mathfrak{M}^p(C_j\times E_n^+)\|, \tag{29}$$

где константа $c(K)$ *зависит от* $\operatorname{diam} K$.

Доказательство. Поскольку

$$\operatorname{supp}(a_\beta(\bar{x}^0)-a_\beta(\bar{x}))\subset K,\quad \operatorname{supp}(a_{\beta\kappa}(\bar{x}^0)-a_{\beta\kappa}(\bar{x}))\subset K,$$

то оценки в норме $\mathfrak{M}^p(C_j\times E_n^+)$ сводятся к оценкам выражения

$$\sup_{Re\tau\geq\gamma}\Big[\||\tau|^{p/\alpha_0^{-1}}\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})(R_0^h+R_\infty^h)g(\tau,\bar{x}),L_2(E_{n+1}^+)\|+$$
$$+\|\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})(R_0^h+R_\infty^h)g(\tau,\bar{x}),\ \widetilde{W}_2^{p-1/\alpha}(C_j\times E_n^+)\|+$$
$$+\sum_j\||\tau|^{p/\alpha_0^{-1}}\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})R_j^h g(\tau,\bar{x}),L_2(E_{n+1}^+)\|+$$
$$+\sum_j\|\Delta L(\bar{x};\tau,D_{\bar{x}})R_j^h g(\tau,\bar{x}),\ \widetilde{W}_2^{p-1/\alpha}(C_j\times E_n^+)\|\Big]=$$
$$=I_1+I_2+\sum_j I_{3j}+\sum_j I_{4j}$$

при $h\to 0$.

Оценки первых двух слагаемых проводятся точно так же, как (20) (причем условие 3) здесь не существенно), поэтому приведем лишь ответ

$$I_1+I_2\leq c(d_1+d_2)\|g(\tau,\bar{x}),\ \mathfrak{M}^p(C_j\times E_n^+)\|.$$

Рассмотрим теперь I_{3j} . Из условия 3) имеем

$$I_{3j}\leq d_1\sum_{\beta\alpha=1-\alpha_0}\ \sup_{Re\tau\geq\gamma}\||\tau|^{p/\alpha_0}D_x^\beta R_j^h g(\tau,\bar{x}),L_2(E_{n+1}^+)\|+$$
$$+d_2\sum_{\substack{\beta\alpha+\kappa\alpha_n=1\\ \kappa\alpha_n\leq\alpha_0}}\ \sup_{Re\tau\geq\gamma}\||\tau|^{p/\alpha_0^{-1}}D_x^\beta D_{x_n}^\kappa R_j^h g(\tau,\bar{x}),L_2(E_{n+1}^+)\|=$$
$$=d_1\sum_\beta\sup_{Re\tau\geq\gamma}\mathcal{A}_\beta+d_2\sum_{\beta,\kappa}\sup_{Re\tau\geq\gamma}\mathcal{A}_{\beta\kappa}.$$

Оценим вначале $\mathcal{A}_\beta$. Используя определение $R_j^h g(\tau,\bar{x})$, по теореме

Планшереля, имеем

$$\mathcal{A}_\beta \leq c \Big\| |\tau|^{p/\alpha_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^\alpha)\,d\sigma \langle s\rangle^{1-\alpha_0} \mathcal{J}_j(\tau, is, x_n) \times$$

$$\times \int_0^\infty \Big[B_j(is, D_{z_n})\, \mathcal{J}_-(\tau, is, z_n - y_n)\Big|_{z_n=0}\Big] \times$$

$$\times \hat{g}(\tau, s, y_n)\,dy_n,\ L_2(E_{n+1}^+)\Big\| \leq$$

(учитывая лемму 3, получаем)

$$\leq c_1 \Big\| |\tau|^{p/\alpha_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^\alpha)\,d\sigma \langle s\rangle^{1-\alpha_0} \Big[\langle \zeta\rangle^{\alpha_n - 1} e^{-dx_n\langle\zeta\rangle^{\alpha_n}} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-dy_n\langle\zeta\rangle^{\alpha_n}} \hat{g}(\tau, s, y_n)\,dy_n + \langle\zeta\rangle^{m\alpha_n - 1}\langle s\rangle^{(1-m)\alpha_n} \times$$

$$\times e^{-dx_n\langle s\rangle^{\alpha_n}} \int_0^\infty e^{-dy_n\langle s\rangle^{\alpha_n}} \hat{g}(\tau, s, y_n)\,dy_n +$$

$$+ \langle\zeta\rangle^{m\alpha_n - 1}\langle s\rangle^{(1-m)\alpha_n} e^{-dx_n\langle\zeta\rangle^{\alpha_n}} \int_0^\infty e^{-dy_n\langle s\rangle^{\alpha_n}} \times$$

$$\times \hat{g}(\tau, s, y_n)\,dy_n + \langle s\rangle^{m\alpha_n - 1}\langle s\rangle^{(1-m)\alpha_n} e^{-dx_n\langle s\rangle^{\alpha_n}} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-dy_n\langle s\rangle^{\alpha_n}} \hat{g}(\tau, s, y_n)\,dy_n\Big],\ L_2(E_{n+1}^+)\Big\| \leq c_1 \sum_{k=1}^4 B_k .$$

Рассмотрим вначале B_1. Так как $\langle s\rangle^{1-\alpha_0} \leq \langle\zeta\rangle^{1-\alpha_0}$, то

$$B_1 \leq c \Big\| |\tau|^{p/\alpha_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^\alpha)\,d\sigma \langle\zeta\rangle^{-\alpha_0 + \alpha_n} e^{-dx_n\langle\zeta\rangle^{\alpha_n}} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-dy_n\langle\zeta\rangle^{\alpha_n}} \hat{g}(\tau, s, y_n)\,dy_n,\ L_2(E_{n+1}^+)\Big\| \leq$$

(используя неравенство Гёльдера, имеем)

$$\leq c_1 \Big\| |\tau|^{p/\alpha_0} \langle\zeta\rangle^{-\alpha_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^\alpha)\,d\sigma\, \hat{g}(\tau, s, y_n),\ L_2(E_{n+1}^+)\Big\| \leq$$

(используя определение функции $G(s)$, получаем)

$$\leq C_2 \| |\tau|^{P/\alpha_0 -1} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1}) \|.$$

Рассмотрим теперь B_2 , Так как $\alpha_0 = 1 - m\alpha_n$, то

$$B_2 \leq c \| |\tau|^{P/\alpha_0} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha}) d\sigma <s>^{\alpha_n} <\xi>^{-\alpha_0} e^{-dx_n <s>^{\alpha_n}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-dy_n <s>^{\alpha_n}} \hat{g}(\tau, s, y_n) dy_n, \ L_2(E^+_{n+1}) \| \leq$$

(используя неравенство Гёльдера, имеем)

$$\leq C_1 \| |\tau|^{P/\alpha_0^{-1}} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(s\sigma^{\alpha}) d\sigma \, \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1}) \| \leq$$

(учитывая определение функции $G(s)$, получаем)

$$\leq C_2 \| |\tau|^{P/\alpha_0 -1} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1}) \|.$$

Рассуждая аналогичным образом, приходим к

$$B_3 + B_4 \leq c \| |\tau|^{P/\alpha_0 -1} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1}) \|.$$

Следовательно, получили оценку

$$\sum_{\beta} \mathcal{A}_{\beta} \leq c \| |\tau|^{P/\alpha_0 -1} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1}) \|.$$

Поскольку $K\alpha_n \leq \alpha_0 = 1 - m\alpha_n$, то такая же оценка справедлива и для $\sum_{\beta K} \mathcal{A}_{\beta K}$.
Отсюда

$$\sum_j I_{3j} \leq c(d_1 + d_2) \sup_{Re\tau > \gamma} \| |\tau|^{P/\alpha_0 -1} \hat{g}(\tau, s, y_n), L_2(E^+_{n+1}) \|.$$

(Слагаемые I_{4j} оцениваются точно так же, поэтому вывод этих оценок опускаем.) Из вышесказанного получаем оценку (29) .

Лемма доказана.

Из леммы 7 следует, что если d_1 и d_2 достаточно малы, то оператор $I - T$ обратим в пространстве $\mathfrak{M}^P(C_\gamma \times E^+_n)$. Поэтому если $G(\tau, \bar{x}) \in \mathfrak{M}^P(C_\gamma \times E^+_n)$, то из уравнения (28) находим $g(\tau, \bar{x}) = (I - T)^{-1} \times G(\tau, \bar{x}) \in \mathfrak{M}^P(C_\gamma \times E^+_n)$. Отсюда, в силу совпадения при $|\alpha|/2 + \alpha_0 > 1$ области определения оператора $R(\bar{x}^0)$ с $\mathfrak{M}^P(C_\gamma \times E^+_n)$, получаем решение краевой задачи (25) в виде

$$v(\tau, \bar{x}) = R(\bar{x}^0)(I - T)^{-1} G(\tau, \bar{x}) \in \widetilde{W}_2^{P/\alpha}(C_\gamma \times E^+_n).$$

Пусть теперь $|\alpha|/2+\alpha_0 \leq 1$. Если $G(\tau,\bar{x}) \in \mathcal{M}^p(C_\gamma \times E_n^+)$, то, как уже отмечалось, $g(\tau,\bar{x}) = (I-T)^{-1} G(\tau,\bar{x}) \in \mathcal{M}^p(C_\gamma \times E_n^+)$, но поскольку область определения оператора $R(\bar{x}^\circ)$ есть $\mathcal{L}^p(C_\gamma \times E_n^+) \subset \mathcal{M}^p(C_\gamma \times E_n^+)$, то функция $v(\tau,\bar{x}) = R(\bar{x}^\circ)(I-T)^{-1} G(\tau,\bar{x})$ будет решением краевой задачи (25) из класса $\widetilde{W}_2^{p,\mu}(C_\gamma \times E_n^+)$, если дополнительно предположить, что выполнено условие (27).

Итак, решение краевой задачи (25) из класса $\widetilde{W}_2^{p,\mu}(C_\gamma \times E_n^+)$ при условиях теоремы 2° получено, причем для него выполнена оценка (26). Единственность доказывается так же, как в [6, с.89-90].

Теорема 2° доказана. Отсюда следует утверждение теоремы 2.

В заключение автор выражает благодарность профессору С.В.Успенскому за полезные обсуждения.

Литература

1. Гальперн С.А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными.- Тр. Моск. мат. общ-ва, 1960, т. 9, с.401-423.
2. Showalter R.E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type. - Pacific J.Math., 1969, v.31, № 3, p. 787-793.
3. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.- Успехи мат.наук. 1964, т.19, вып. 3, с. 53-161.
4. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики.-Изв. АН СССР. Серия мат., 1954, т.18, № 1, с. 3-50.
5. Lighthill M.J. On waves generated in dispersive systems by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids. - J.Fluid Mech., 1967, v. 27, № 4, p. 725-752.
6. Демиденко Г.В. О смешанных краевых задачах для уравнений типа С.Л. Соболева с переменными коэффициентами.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара академика С.Л. Соболева), 1979, т. 2, с. 52-91.
7. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.- М.: ИЛ, 1963.- 205 с.
8. Солонников В.А. О краевых задачах для систем линейных параболических дифференциальных уравнений общего вида.- Труды Мат.ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1965, т.83, с. 3-162.
9. Успенский С.В. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов.- Труды Мат.ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР, 1972, т.117, с. 292-299.