

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ
ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ

Р.Д. Алаев, А.М. Блохин (Новосибирск)

Введение

При использовании разностных схем для нахождения численного решения смешанных задач возникает вопрос об устойчивости применяемых разностных схем. Для исследования устойчивости широко применяется спектральный анализ краевой разностной задачи. Этот прием исследования устойчивости подробно изложен в монографии [1].

На практике вычислители обычно ограничиваются спектральным анализом разностной задачи Коши. Получаемые при этом ограничения на шаги разностной сетки переносятся и на случай краевой разностной задачи. Однако такой анализ не может учитывать ни одной ошибки, возникающей из граничных точек. Много раз устанавливали, что численная неустойчивость может возникнуть даже тогда, когда условие Неймана удовлетворено. Очень интересной в этом смысле является работа [2], в которой для системы уравнений акустики с одним граничным условием показано, как влияют коэффициенты граничного условия на устойчивость разностной схемы С.К. Годунова.

В настоящей работе изучается влияние коэффициентов граничных условий на устойчивость одной явной разностной схемы для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне. В работе также прослеживается соотношение между корректностью дифференциальной постановки задачи и устойчивостью ее разностного аналога.

§1. Предварительные сведения

Следуя работам [3,4], сформулируем смешанную задачу для системы уравнений акустики в области $t > 0, x > 0, |y| < \infty$:

$$A\vec{U}_t + B\vec{U}_x + C\vec{U}_y = 0, \quad (1.1)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} M^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} M^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \vec{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ s \end{bmatrix},$$

с граничными условиями при $x=0$:

$$u + d \cdot p = 0; \quad v_t - \lambda \cdot p_y = 0; \quad s + p = 0 \quad (1.2)$$

и с начальными данными при $t=0$:

$$\vec{U}(t, x, y) \Big|_{t=0} = \vec{U}_0(x, y). \quad (1.3)$$

Система (1.1) получается после линеаризации уравнений газовой динамики относительно постоянного основного решения, а граничные условия (1.2) - после линеаризации условий Ранкина-Гюгонио на ударной волне. Здесь $M (0 < M < 1)$, d, λ - некоторые константы [3].

В работе [4] показано, что плоскость коэффициентов d, λ можно разбить на следующие области:

1. Область 1 (рис.1):

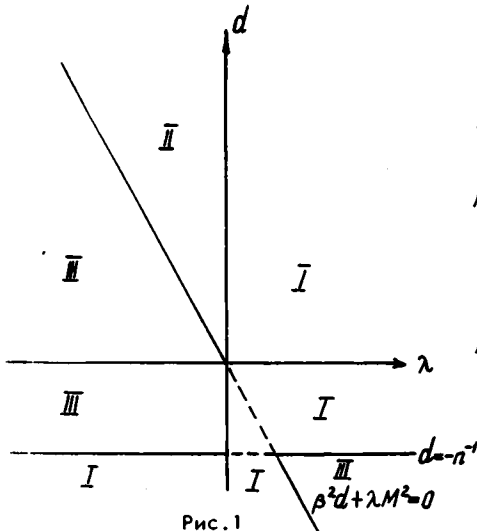


Рис. 1

а) $\lambda > 0;$

$$\beta^2 d + \lambda \cdot M^2 < 0;$$

$$\beta^2 = 1 - M^2;$$

б) $\lambda > 0;$

$$\beta^2 d + \lambda \cdot M^2 > 0;$$

$$d > -M^{-1};$$

в) $\lambda < 0; d < -M^{-1}.$

В области 1 смешанная задача (1.1), (1.2), (1.3) имеет частное решение ви-

да [4] :

$$\vec{U} = \vec{U}^0 \exp\{i[\omega(x-t) + ky]\} + \vec{U}^{(1)} \exp\{i(\ell x - \omega t + ky)\}, \quad (1.4)$$

где $\vec{U}^0, \vec{U}^{(1)}$ - постоянные вектора; ω, k, ℓ - константы; $i = \sqrt{-1}$;
 с $\text{Im } \omega > 0, \text{Im } \ell > 0, \text{Im } k = 0$. Последнее означает, что в области I смешанная задача (1.1), (1.2), (1.3) поставлена некорректно, т.е. можно построить пример некорректности типа примера Адамара [5]. В самом деле, последовательность функций

$$\vec{U}_k = \vec{U}^0 \exp(-\sqrt{|k|}) \cdot \exp\{i[\omega(x-t) + ky]\} + \\ + \vec{U}^{(1)} \exp(-\sqrt{|k|}) \cdot \exp\{i(-\omega t + \ell x + ky)\}, \quad |k| = 1, 2, \dots, \quad (1.4')$$

стремится к нулю при $t = 0$ и $|k| \rightarrow \infty$. В то же время для любого $t > 0$ компоненты вектора \vec{U}_k (по модулю) стремятся к ∞ при $|k| \rightarrow \infty$ (см. [4]). Таким образом, какую бы норму мы не выбрали для оценки величины начальных данных, мы не сможем утверждать, что из малости этой нормы вытекает малость решения.

2. Область II (рис.1):

$$\lambda < 0, \quad \beta^2 d + \lambda \cdot M^2 > 0.$$

В области II смешанная задача (1.1), (1.2), (1.3) имеет частное решение вида (1.4) с $\text{Im } \omega < 0, \text{Im } \ell > 0, \text{Im } k = 0$. В области II выполнено условие Лопатинского, т.е. выполнено необходимое условие корректности смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.3). Это означает, что смешанная задача (1.1), (1.2), (1.3) не допускает построения примера Адамара вида (1.4') (см. [5]). Более того, в области II выполнено равномерное условие Лопатинского, т.е. условие Лопатинского выполнено как для данной смешанной задачи (1.1), (1.2), (1.3), так и для всех задач с достаточно близкими коэффициентами граничных условий. В работах [3, 4] показано, что смешанная задача (1.1), (1.2), (1.3) в области II поставлена корректно в пространстве W_2^2 , т.е. при каждом $t, 0 \leq t \leq T$, выполняется $\vec{U}(t, x, y) \in W_2^2$, если начальные данные $\vec{U}_0(x, y) \in W_2^2$.

3. Область III (рис.1):

$$a) \quad \lambda < 0; \quad d > -M^{-1}; \quad \beta^2 d + \lambda M^2 < 0;$$

$$б) \lambda > 0; d < -M^{-1}; \beta^2 d + \lambda M^2 > 0.$$

В области Ш смешанная задача (1.1), (1.2), (1.3) имеет частное решение вида (1.4) с $Im \omega = Im \ell = Im k = 0$. Область Ш в работе [6] получила название области спонтанного излучения звука разрывом. Можно показать, что в области Ш нарушается равномерное условие Лопатинского.

Отметим, что параметры d, λ , вычисленные для идеального газа, удовлетворяют неравенствам $\lambda < 0, \beta^2 d + \lambda M^2 > 0$, т.е. точка (λ, d) в этом случае принадлежит области П (см. [3]).

Система (1.1) и граничные условия (1.2) после замены зависимых и независимых переменных

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} M^{-1/2} & 0 & -M^{-1/2} & 0 \\ 0 & M^{-1/2} & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{V}; \vec{V} = \begin{bmatrix} R \\ L \\ Q \\ S \end{bmatrix}; t' = t, x' = x, y' = \sqrt{2}(My + t);$$

могут быть переписаны следующим образом (штрихи у независимых переменных опускаем):

$$\vec{V}_t + \hat{B} \vec{V}_x + \hat{C} \vec{V}_y = 0, \quad (1.1')$$

$$R + \hat{d} Q = 0, \quad L_t + \sqrt{2} \cdot L_y = \hat{\lambda} \cdot Q_y, \quad s + \hat{v} Q = 0, \quad (1.2')$$

где

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \hat{C} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \hat{d} = \frac{Md-1}{Md+1};$$

$$\hat{\lambda} = \frac{2M^2 \lambda}{dM+1}; \hat{v} = \frac{1}{dM+1}; k_1 = 1 + M^{-1}; k_2 = M^{-1} - 1.$$

Заметим, что матрица \hat{C} имеет неотрицательные собственные числа.

Для смешанной задачи (1.1), (1.2) рассмотрим следующую разностную схему:

$$\begin{aligned}
 R(t+\tau, x, y) &= \{E - r_1 \Delta_x - r_3 \Delta_y\} R(t, x, y) - r \Delta_y L(t, x, y); \\
 Q(t+\tau, x, y) &= \{E + r_2 \Delta_x - r_3 \Delta_y\} Q(t, x, y) - r \Delta_y L(t, x, y); \\
 L(t+\tau, x, y) &= \{E - r \Delta_x - r_3 \Delta_y\} L(t, x, y) - r \Delta_y \{R(t, x, y) + Q(t, x, y)\}; \\
 s(t+\tau, x, y) &= \{E - r \Delta_x - r_3 \Delta_y\} s(t, x, y),
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\Delta_{\pm x} = E - T_{\pm x}, \quad \Delta_{\pm y} = E - T_{\pm y};$$

$$T_{\pm x, y} \text{ - операторы сдвига: } T_{\pm x} u(t, x, y) = u(t, x \pm h, y),$$

$$T_{\pm y} u(t, x, y) = u(t, x, y \pm h);$$

E - тождественный оператор;

τ - шаг по t ;

h - шаг по x, y ;

$$r = \tau/h, \quad r_1 = r \cdot k_1, \quad r_2 = r \cdot k_2, \quad r_3 = \sqrt{2} \cdot r.$$

При $x = 0$ получаем:

$$\begin{aligned}
 R(t+\tau, 0, y) + \hat{a} Q(t+\tau, 0, y) &= 0; \\
 s(t+\tau, 0, y) + \hat{b} Q(t+\tau, 0, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Граничное условие

$$L_t + \sqrt{2} \cdot L_y = \hat{\lambda} Q_y$$

будем аппроксимировать двумя способами:

$$L(t+\tau, 0, y) = \{E - r_3 \Delta_y\} L(t, 0, y) + r_4 \Delta_y Q(t, 0, y); \tag{1.6'}$$

$$L(t+\tau, 0, y) = \{E - r_3 \Delta_y\} L(t, 0, y) + r_4 \Delta_y Q(t+\tau, 0, y). \tag{1.6''}$$

где $r_4 = \hat{\lambda} r$.

Разностная схема (1.5) была использована, например, в монографии [5] при доказательстве теоремы существования смешанной задачи для симметрической системы.

В связи с дискретизацией смешанной задачи (1.1'), (1.2') встает вопрос

об устойчивости применяемой разностной схемы. Интересным является также вопрос о соотношении между корректностью дифференциальной постановки смешанной задачи (1.1'), (1.2') и устойчивостью ее разностного аналога (1.5), (1.6), (1.6') (или (1.6'')).

Будем искать у разностной схемы (1.5) частные решения следующего вида [1]:

$$\vec{V}(t, x, y) = q^{\frac{t}{\tau}} e^{i \frac{y}{h} \cdot \varphi} \cdot \begin{bmatrix} \hat{R}(x) \\ \hat{L}(x) \\ \hat{Q}(x) \\ \hat{S}(x) \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

где q - комплексное число, φ - вещественный параметр. Подставляя (1.7) в (1.5), получаем:

$$\begin{aligned} a_1 \hat{R}(x) - r_1 \hat{R}(x-h) + rz \hat{L}(x) &= 0; \\ a_2 \hat{Q}(x) - r_2 \hat{Q}(x+h) + rz \hat{L}(x) &= 0; \\ a \hat{L}(x) - r \hat{L}(x-h) + rz [\hat{R}(x) + \hat{Q}(x)] &= 0; \\ a \hat{S}(x) - r \hat{S}(x-h) &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $a = a_3 + r$; $a_1 = a_3 + r_1$; $a_2 = a_3 + r_2$;

$$a_3 = q - 1 + r_3 z; \quad z = 1 - e^{-i\varphi}.$$

Решение системы (1.8) ищем в виде:

$$\begin{bmatrix} \hat{R}(x) \\ \hat{L}(x) \\ \hat{Q}(x) \\ \hat{S}(x) \end{bmatrix} = x^{\frac{x}{h}} \cdot \begin{bmatrix} \hat{R}_0 \\ \hat{L}_0 \\ \hat{Q}_0 \\ \hat{S}_0 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

где χ - комплексное число такое, что $|\chi| \leq 1$, причем в случае разностной задачи Коши $|\chi| = 1$, т.е. $\chi = e^{i\psi}$, ψ - вещественный параметр;

$\hat{R}_0, \hat{L}_0, \hat{Q}_0, \hat{S}_0$ - постоянные.

Из (1.8) получаем:

$$\begin{aligned} (a_1 - \frac{r_1}{\chi}) \hat{R}_0 + rz \hat{L}_0 &= 0; \\ (a_2 - r_2 \chi) \hat{Q}_0 + rz \hat{L}_0 &= 0; \\ (a - \frac{r}{\chi}) \hat{L}_0 + rz (\hat{R}_0 + \hat{Q}_0) &= 0; \\ (a - \frac{r}{\chi}) \hat{S}_0 &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Множество значений q образует так называемый спектр семейства операторов перехода с одного временного слоя на другой. Если разностная схема (1.5) имеет частные решения вида (1.7), (1.9), для которых $|q| > 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, в то время как $\varepsilon, h \rightarrow 0$, то это будет означать неустойчивость разностной схемы (1.5) в любой норме (см. [1]).

§2. Спектральный анализ разностной задачи Коши

Система (1.10) имеет нетривиальное решение $\hat{R}_0, \hat{L}_0, \hat{Q}_0, \hat{S}_0$ лишь при тех $q = q(\varphi, \psi)$, у которых определитель системы (1.10) обращается в нуль

$$\begin{aligned} \Delta = (a - r e^{-i\psi}) \{ (a_1 - r_1 e^{-i\psi}) (a_2 - r_2 e^{i\psi}) (a - r e^{-i\psi}) - \\ - r^2 z^2 [a_1 + a_2 - r_1 e^{-i\psi} - r_2 e^{i\psi}] \} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Необходимое условие устойчивости схемы (1.5) заключается в том, чтобы при любых φ, ψ выполнялось неравенство

$$|q(\varphi, \psi)| \leq 1, \tag{2.2}$$

т.е. чтобы спектр разностной задачи Коши лежал в единичном круге (см. [1]).

Проверим выполнение неравенства (2.2) при $\varphi = \psi$. Из (2.1) следует,

что либо

$$a - r e^{-i\varphi} = q - 1 + (r + r_3)z. \quad (2.1')$$

либо равняется нулю выражение в фигурных скобках, которое при условии, что $\varphi = \psi$, переписывается так:

$$(q - 1 + [r_1 + r_3]z)(q - 1 + r_2\bar{z} + r_3z)(q - 1 + [r + r_3]z) - r^2 z^2 [2(q - 1) + [2r_3 + r_1]z + r_2\bar{z}] = 0. \quad (2.1'')$$

Из (2.1') легко получается, что неравенство (2.2) выполняется при любом φ , если

$$r \leq 1/(1 + \sqrt{2}). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.1'') исследуем на "длинных волнах", т.е. на частных решениях схемы (1.5), длина волны которых много больше шага сетки h (см. [2]). Это значит, что $\varphi = O(1)$. При $\varphi = 0$ из (2.1'') следует, что

$$q_{1,2,3}^0 = 1.$$

Положим $\varphi = \varepsilon\gamma$, $q - 1 = \varepsilon\xi$, ε - малый параметр. С точностью до членов первого порядка малости по ε имеем

$$z = i\gamma\varepsilon.$$

Тогда из (2.1'') получаем:

$$\xi_1 = -i\gamma r(1 + \sqrt{2}); \quad \xi_2 = \xi_1 + i\gamma r\sqrt{2 - M^{-2}}; \quad \xi_3 = \xi_1 - i\gamma r\sqrt{2 + M^{-2}},$$

т.е. $\xi_{1,2,3}$ - чисто мнимые величины.

Последнее означает, что требуется дальнейшее уточнение корней уравнения

$$(2.1''). \text{ Для этого положим } \xi = \xi_{1,2,3} + \varepsilon\sigma_{1,2,3}; \quad z = i\gamma\varepsilon + \varepsilon^2\gamma^2/2.$$

В таком случае из (2.1'') получаем:

$$\sigma_1 = -\frac{\gamma^2 r}{2} \left\{ 1 + \sqrt{2} + \frac{2k_2}{2 + M^{-2}} \right\}; \quad \sigma_2 = \sigma_1 + \frac{\gamma^2 r}{2} \left\{ \frac{2 + M^{-1}}{\sqrt{2 + M^{-2}}} - \frac{M^{-2} - 1}{2 + M^{-2}} k_2 \right\};$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\gamma^2 r}{2} \left\{ \frac{2 + M^{-1}}{\sqrt{2 + M^{-2}}} + \frac{M^{-2} - 1}{2 + M^{-2}} k_2 \right\}.$$

Условие $|q_{1,2,3}| \leq 1$ приводит нас к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
 r &\leq \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{2k_2}{(1+\sqrt{2})^2(2+M^{-2})}; \\
 r &\leq \frac{1+\sqrt{2}+k_2 \frac{1+M^{-2}}{2+M^{-2}} + \frac{2+M^{-1}}{\sqrt{2+M^{-2}}}}{[1+\sqrt{2}+\sqrt{2+M^{-2}}]^2} = f_1(M); \\
 r &\leq \frac{1+\sqrt{2}+k_2 \frac{1+M^{-2}}{2+M^{-2}} - \frac{2+M^{-1}}{\sqrt{2+M^{-2}}}}{[1+\sqrt{2}-\sqrt{2+M^{-2}}]^2} = f_2(M).
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

К соотношениям (2.3), (2.4) добавим еще условия Куранта, Фридрихса и Леви [7]:

$$r \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad r \leq \frac{1}{k_1}. \tag{2.5}$$

График функции $r = r_{\min}(M) = \min \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{k_1}; f_1(M); f_2(M) \right\}$ имеет вид (см. рис. 2):

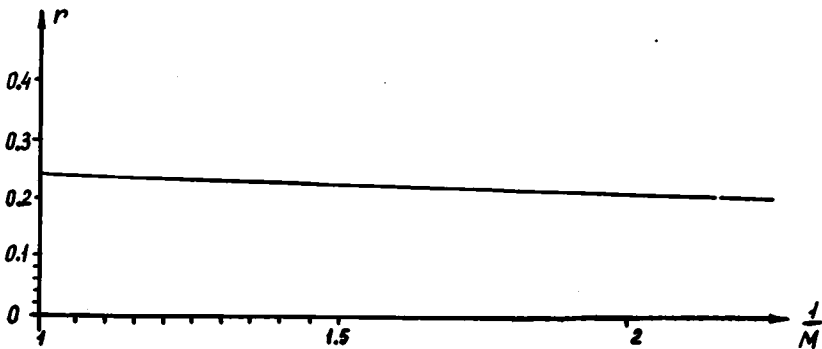


Рис. 2

§3. Спектральный анализ краевой разностной задачи (1.5), (1.6), (1.6') ((1.6''))

Из (1.10) следует, что возможны два типа решений (1.9) системы (1.8):

$$\begin{aligned}
 1) \quad \hat{S}_0 \neq 0; \quad a - \frac{r}{\chi} = 0 \quad , \text{ т.е. } \chi_0 = \frac{r}{a}; \\
 -M^{-1} a_3 \hat{R}_0 + rz \hat{L}_0 = 0; \\
 \frac{a_3(a_3 + rM^{-1})}{a} \hat{Q}_0 + rz \hat{L}_0 = 0; \\
 rz(\hat{R}_0 + \hat{Q}_0) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.10'}$$

Для наших целей ограничимся случаем $a_3 \neq 0$. В этом случае определитель системы (1.10') отличен от нуля и, следовательно, $\hat{R}_0, \hat{Q}_0, \hat{L}_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
 2) \quad \hat{S}_{1,2} = 0, \quad \chi_{1,2} \neq \frac{r}{a}; \\
 \left(a_1 - \frac{r_1}{\chi_{1,2}}\right) \hat{R}_{1,2} + rz \hat{L}_{1,2} = 0; \\
 (a_2 - r_2 \chi_{1,2}) \hat{Q}_{1,2} + rz \hat{L}_{1,2} = 0; \\
 \left(a - \frac{r}{\chi_{1,2}}\right) \hat{L}_{1,2} + rz(\hat{R}_{1,2} + \hat{Q}_{1,2}) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.10''}$$

Здесь $\chi_{1,2,3} = \chi_{1,2,3}(\varrho, \varphi)$ — корни уравнения

$$\left(a - \frac{r}{\chi}\right) \left(a_1 - \frac{r_1}{\chi}\right) (a_2 - r_2 \chi) - r^2 z^2 \left[a_2 + a_1 - r_2 \chi - \frac{r_1}{\chi} \right] = 0, \tag{3.1}$$

полученного из условия, что определитель системы (1.10'') должен равняться нулю. Будем предполагать, что корни χ_1, χ_2, χ_3 простые и $|\chi_{1,2}| < 1$, $|\chi_3| > 1$. В таком случае решение системы (1.5) ищем в виде:

$$\vec{V}(t, x, y) = \varrho^{\frac{t}{\tau}} \cdot e^{i \frac{y}{h} \varphi} \left\{ \chi_0^{\frac{x}{h}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{S}_0 \end{bmatrix} + \chi_1^{\frac{x}{h}} \begin{bmatrix} \hat{R}_1 \\ \hat{L}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \chi_2^{\frac{x}{h}} \begin{bmatrix} \hat{R}_2 \\ \hat{L}_2 \\ \hat{Q}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Уравнение (3.1) исследуем на "длинных волнах". Полагая

$$q-1 = \varepsilon \xi + \varepsilon^2 \sigma, \quad \chi-1 = \varepsilon \rho + \varepsilon^2 \rho, \quad X = (\xi + iy r_3)/r,$$

$\Omega = (\sigma + r_3 y^2/2)/r$, из (3.1) получаем:

$$(X+\eta) \left[(X+\kappa_1 \eta)(X-\kappa_2 \eta) + 2y^2 \right] = 0; \quad (3.2)$$

$$(X+\eta) \left[(X+\kappa_1 \eta)(\Omega - \kappa_2 \rho) + (X-\kappa_2 \eta)(\Omega + \kappa_1 \rho - \kappa_1 \eta^2) - 2iy^3 \right] + \\ + (X+\kappa_1 \eta)(X-\kappa_2 \eta)(\Omega + \rho - \eta^2) + y^2(2\Omega + 2\rho - \kappa_1 \eta^2) = 0. \quad (3.3)$$

Подставляя решение системы (1.5) в граничные условия (1.6), (1.6') (или (1.6'')), имеем

$$\hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \hat{d}(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2) = 0;$$

$$a_3(\hat{L}_1 + \hat{L}_2) - r_4 z(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2) = 0 \quad (a_3(\hat{L}_1 + \hat{L}_2) - r_4 z q(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2) = 0); \quad (3.4)$$

$$\hat{S}_0 + \hat{v}(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2) = 0.$$

Для получения так называемого дисперсионного соотношения надо составить систему, образованную из первых двух уравнений системы (3.4) и из уравнений системы (1.10')

$$\hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \hat{d}(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2) = 0;$$

$$a_3(\hat{L}_1 + \hat{L}_2) - r_4 z(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2) = 0 \quad (a_3(\hat{L}_1 + \hat{L}_2) - r_4 z q(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2) = 0);$$

$$(a_1 - \frac{r_1}{\chi_1}) \hat{R}_1 + r z \hat{L}_1 = 0; \quad (a_2 - r_2 \chi_1) \hat{Q}_1 + r z \hat{L}_1 = 0;$$

$$(a_1 - \frac{r_1}{\chi_2}) \hat{R}_2 + r z \hat{L}_2 = 0; \quad (a_2 - r_2 \chi_2) \hat{Q}_2 + r z \hat{L}_2 = 0.$$

Эта система должна иметь нетривиальное решение, т.е. определитель этой системы равен нулю:

$$a_3 \left[\kappa_1 (a_2 - r_2 \chi_1)(a_2 - r_2 \chi_2) - \hat{d} \kappa_1 \chi_1 \chi_2 (a_1 - \frac{r_1}{\chi_1})(a_1 - \frac{r_1}{\chi_2}) \right] + \\ + r r_4 z^2 (q)^v \left[\kappa_1 (a_2 - r_2 \chi_1) + \kappa_2 \chi_1 \chi_2 (a_1 - \frac{r_1}{\chi_1}) \right] = 0, \quad v=0,1. \quad (3.5)$$

Вновь полагая $q-1 = \varepsilon\xi + \varepsilon^2\sigma$; $\chi_{1,2}-1 = \varepsilon\varrho_{1,2} + \varepsilon^2\rho_{1,2}$;

$X = (\xi + iy\varrho_3)/r$, $\Omega = (\sigma + r_3y^2/2)/r$, из (3.5) получаем:

$$X\{\kappa_1(X - \kappa_2\varrho_1)(X - \kappa_2\varrho_2) - \hat{d}\kappa_2(X + \kappa_1\varrho_1)(X + \kappa_1\varrho_2) - \hat{\lambda}y^2 2M^{-1}\} = 0, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & X\{\kappa_1((\Omega - \kappa_2\rho_1)(X - \kappa_2\varrho_2) + (\Omega - \kappa_2\rho_2)(X - \kappa_2\varrho_1)) - \hat{d}\kappa_2((X + \kappa_1\varrho_1) \times \\ & \times (\Omega + X\varrho_2 + \kappa_1\rho_2) + (X + \kappa_1\varrho_2)(\Omega + X\varrho_1 + \kappa_1\rho_1))\} + \Omega\{\kappa_1(X - \kappa_2\varrho_1) \times \\ & \times (X - \kappa_2\varrho_2) - \hat{d}\kappa_2(X + \kappa_1\varrho_1)(X + \kappa_1\varrho_2) - \hat{\lambda}y^2 2M^{-1}\} - \hat{\lambda}y^2 \times \\ & \times [\kappa_2\varrho_1 X + \kappa_2\varrho_2(X + \kappa_1\varrho_1)] + \hat{\lambda}y^2 [i - (rX - r_3yi)^y] X \cdot 2 \cdot M^{-1} = 0. \quad (3.7) \end{aligned}$$

При $\varphi=0$ из (3.5) получаем:

а) $a_3 = 0$, т.е. $q=1$;

б) $\kappa_1(a_2 - r_2x_1)(a_2 - r_2x_2) = \hat{d}\kappa_2x_1x_2(a_1 - \frac{r_1}{x_1})(a_1 - \frac{r_1}{x_2}) = 0$.

Рассмотрим случай а). Из (3.2), (3.6) получаем:

$$\varrho_1 = -X; \quad \hat{\varrho}_{2,3} = \frac{\hat{X} + \delta\sqrt{2\ell + M^{-2}\hat{X}^2}}{\ell}; \quad \delta = \pm 1; \quad \ell = \kappa_1 \cdot \kappa_2;$$

$$\hat{X} = X/y; \quad \hat{\varrho} = \varrho/y; \quad y > 0; \quad (3.8)$$

$$\hat{X}\{\hat{X}M^{-1}(\hat{X} - \delta\sqrt{2\beta^2 + \hat{X}^2}) + \hat{d}\hat{X}M^{-1}(\hat{X} + \delta\sqrt{2\beta^2 + \hat{X}^2}) - 2\hat{\lambda}\} = 0.$$

Пусть $\hat{X} = 0$. Тогда из (3.8) следует, что

$$\varrho_1 = 0; \quad \hat{\varrho}_2 = -\sqrt{\frac{2}{\ell}}; \quad \hat{\varrho}_3 = \sqrt{\frac{2}{\ell}}.$$

Из (3.3), (3.7) в таком случае получаем:

$$\rho_1 = 0; \quad \hat{\rho}_2 = \frac{1}{2\ell}(4 - \kappa_1) + \frac{i}{\sqrt{2\ell}}; \quad \Omega = 0; \quad \hat{\rho} = \rho/y^2.$$

Таким образом, имеем ($\varepsilon > 0$) :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= 1; \quad \chi_2 = 1 + \varepsilon \hat{\rho}_2 + \varepsilon^2 \hat{\rho}_2^2 \quad (|\chi_2| < 1); \\ q &= 1 + \varepsilon \xi + \varepsilon^2 \sigma = 1 - r_3 \varepsilon i - \varepsilon^2 \frac{r_3 \hat{\rho}_2^2}{2}; \quad \chi_0 = 1, \end{aligned}$$

причем $|q| < 1$, если $r < \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. по сравнению с разностной задачей Коши мы новых ограничений на r не получили. Справедливости ради надо заметить, что в этом случае требуется дальнейшее уточнение значений $\chi_{0,1}$.

Приравняем теперь нулю выражение в фигурных скобках в (3.8), которое можно привести к следующему виду:

$$\tilde{a} x^2 - \delta x \cdot \sqrt{x^2 + 2\beta^2} = b, \quad (3.9)$$

где $\tilde{a} = Md$; $b = 2M^3\lambda$; $x = \hat{\chi}$.

Прежде чем перейти к анализу решений уравнения (3.9), следует сказать, что, рассматривая случай б), мы, по сравнению с разностной задачей Коши, либо получаем новых ограничений на r , либо приходим вновь к случаю а).

§4. Анализ решений уравнения (3.9)

Уравнение (3.9) легко сводится к биквадратному уравнению

$$(\tilde{a}^2 - 1)x^4 - 2(\tilde{a}b + \beta^2)x^2 + b^2 = 0, \quad (4.1)$$

решая которое, получаем:

$$\begin{aligned} x^2 = A_{\pm} &= \frac{\tilde{a}b + \beta^2 \pm \sqrt{(\tilde{a}b + \beta^2)^2 - b^2(\tilde{a}^2 - 1)}}{\tilde{a}^2 - 1}; \\ x &= \pm \sqrt{A_{\pm}} = \tilde{y} \sqrt{A_{\pm}}, \quad \tilde{y} = \pm 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Выясним, какие из корней уравнения (4.1) являются решением уравнения (3.9).

Пусть $A_{\pm} > 0$. Тогда из (4.1) следует, что $x^2 + 2\beta^2 = (\tilde{a}x^2 - b)^2 / x^2$.

Подставляя это выражение в (3.9), получаем

$$(\tilde{a}x^2 - b) - \delta \cdot \tilde{y} \cdot \sqrt{A_{\pm}} \cdot \sqrt{\frac{(\tilde{a}x^2 - b)^2}{A_{\pm}}} = 0.$$

Следовательно, если $B_{\pm} = \tilde{a}x^2 - b > 0$, то $\tilde{y} = \delta$; если $B_{\pm} < 0$, то

$\tilde{y} = -\delta$. Пусть $A_{\pm} < 0$. Тогда

$$(\tilde{a}x^2 - b) + \delta \cdot \tilde{y} \cdot \sqrt{|A_{\pm}|} \cdot \sqrt{\frac{(\tilde{a}x^2 - b)^2}{|A_{\pm}|}} = 0.$$

Поэтому если $B_{\pm} > 0$, то $\tilde{y} = -\delta$; если $B_{\pm} < 0$, то $\tilde{y} = \delta$. Заметим, что

$$B_{\pm} = \tilde{a}x^2 - b = \frac{\tilde{a}\rho^2 + b}{\tilde{a}^2 - 1} \pm \frac{\tilde{a}}{\tilde{a}^2 - 1} \sqrt{(\tilde{a}b + \rho^2)^2 - b^2(\tilde{a}^2 - 1)};$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\tilde{a}b + \rho^2)^2 - b^2(\tilde{a}^2 - 1)} &= \sqrt{b^2 + 2\tilde{a}b\rho^2 + \rho^4} = \\ &= \sqrt{\frac{\rho^2}{M^4} - 4\pi\ell \cdot M^2\rho}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$n = -\frac{b}{2M^3\rho}; \quad m = \frac{1}{M\rho} \cdot \left(\tilde{a}\rho^2 + \frac{b}{2}\right).$$

Если $A_{\pm} < 0$ и $B_{\pm} > 0$, то из (3.8), (4.2) получаем:

$$x = -\delta i \sqrt{|A_{\pm}|}; \quad \hat{\varrho}_1 = i\delta \sqrt{|A_{\pm}|}; \quad \hat{\varrho}_{2,3} = i\delta \frac{B_{\pm} \cdot M^{-1} - |A_{\pm}|}{\ell \sqrt{|A_{\pm}|}}; \quad (4.4)$$

если $A_{\pm} < 0$ и $B_{\pm} < 0$, то

$$x = i\delta \sqrt{|A_{\pm}|}, \quad \hat{\varrho}_1 = -i\delta \sqrt{|A_{\pm}|}, \quad \hat{\varrho}_{2,3} = i\delta \frac{|A_{\pm}| + M^{-1}|B_{\pm}|}{\ell \sqrt{|A_{\pm}|}}. \quad (4.4')$$

Наконец, рассмотрим случай, когда $A_{\pm} = \hat{\alpha} \pm i\hat{\beta}$, где

$$\hat{\alpha} = \frac{\tilde{a}b + \rho^2}{\tilde{a}^2 - 1}; \quad \hat{\beta} = \sqrt{\frac{b^2}{\tilde{a}^2 - 1} - \hat{\alpha}^2}; \quad \tilde{a}^2 > 1; \quad \tilde{\rho} > 0.$$

Поскольку $\sqrt{\hat{\alpha} \pm i\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{|A_{\pm}| + \hat{\alpha}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|A_{\pm}| - \hat{\alpha}}{2}}$;

$$\sqrt{\hat{\alpha} + 2\beta^2 \pm i\hat{\beta}} = \sqrt{\frac{|A_{\pm} + 2\beta^2| + \hat{\alpha} + 2\beta^2}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|A_{\pm} + 2\beta^2| - \hat{\alpha} - 2\beta^2}{2}},$$

то из (3.9) получим:

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}\hat{\alpha} - \hat{\beta} \pm i\tilde{\alpha}\hat{\beta} - \delta\tilde{\gamma} \left\{ \sqrt{(|A_{\pm}| + \hat{\alpha})(|A_{\pm} + 2\beta^2| + \hat{\alpha} + 2\beta^2)} - \sqrt{(|A_{\pm}| - \hat{\alpha}) \times} \right. \\ & \times \left. \sqrt{(|A_{\pm} + 2\beta^2| - \hat{\alpha} - 2\beta^2)} \pm i \left(\sqrt{(|A_{\pm}| + \hat{\alpha})(|A_{\pm} + 2\beta^2| - \hat{\alpha} - 2\beta^2)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{(|A_{\pm}| - \hat{\alpha})(|A_{\pm} + 2\beta^2| + \hat{\alpha} + 2\beta^2)} \right) \right\} / 2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $\tilde{\alpha} > 1$ выполняется $\gamma = \delta$; при $\tilde{\alpha} < -1$ имеет место $\tilde{\gamma} = -\delta$. Проанализируем решения уравнения (3.9) при конкретных значениях параметров $\tilde{\alpha}, \hat{\beta}$.

1) Пусть $\tilde{\alpha} > 1$. Из формулы (4.2) следует, что $A_{\pm} > 0$ при $\frac{\beta^2}{M^4} - 4m\ell > 0$ и $\tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2 > 0$. Кривые $\frac{\beta^2}{M^4} - 4m\ell = 0$ и $\tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2 = 0$ при $\tilde{\alpha} > 0$ изображены на рис.3. При $\hat{\beta} = 0$ имеем

$$A_{+} = \frac{2\beta^2}{\tilde{\alpha}^2 - 1} > 0, A_{-} = 0. \text{ При } \frac{\beta^2}{M^4} - 4m\ell = 0 \text{ выполняется } A_{\pm} = \frac{\tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2}{\tilde{\alpha}^2 - 1} = A > 0, \text{ если } \tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2 > 0. \text{ Если } \tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2 > 0 \text{ и } \frac{\beta^2}{M^4} - 4m\ell < 0, \text{ то } A_{\pm} = \hat{\alpha} \pm i\hat{\beta}; \hat{\alpha} > 0. \text{ При } \tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2 = 0 \text{ получаем } A_{\pm} = \pm i\hat{\beta}.$$

При $\tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2 < 0$ и $\frac{\beta^2}{M^4} - 4m\ell < 0$ имеем $A_{\pm} = \hat{\alpha} \pm i\hat{\beta}, \hat{\alpha} < 0$.

Если $\tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2 < 0$ и $\frac{\beta^2}{M^4} - 4m\ell = 0$, то $A_{\pm} = \frac{\tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2}{\tilde{\alpha}^2 - 1} = A < 0$.

Если $\tilde{\alpha}\hat{\beta} + \beta^2 < 0$ и $\frac{\beta^2}{M^4} - 4m\ell > 0$, то $A_{\pm} < 0$. Чтобы выяснить знак числа B_{\pm} , перепишем выражение для B_{\pm} так:

$$B_{\pm} = \frac{\tilde{\alpha}\beta^2 + \hat{\beta}}{\tilde{\alpha}^2 - 1} \pm \frac{1}{\tilde{\alpha}^2 - 1} \cdot \sqrt{(\tilde{\alpha}\beta^2 + \hat{\beta})^2 + \hat{\beta}(\tilde{\alpha}^2 - 1)(\hat{\beta} + 2\tilde{\alpha}\beta^2)}.$$

Из этой формулы следует, что если $\hat{\beta} > 0$, то $B_{+} > 0$, $B_{-} < 0$. При

$\hat{\beta} = 0$ получаем $B_{+} = \frac{2\tilde{\alpha}\beta^2}{\tilde{\alpha}^2 - 1}, B_{-} = 0$. При $\hat{\beta} < 0$, $\frac{\beta^2}{M^4} - 4m\ell > 0$

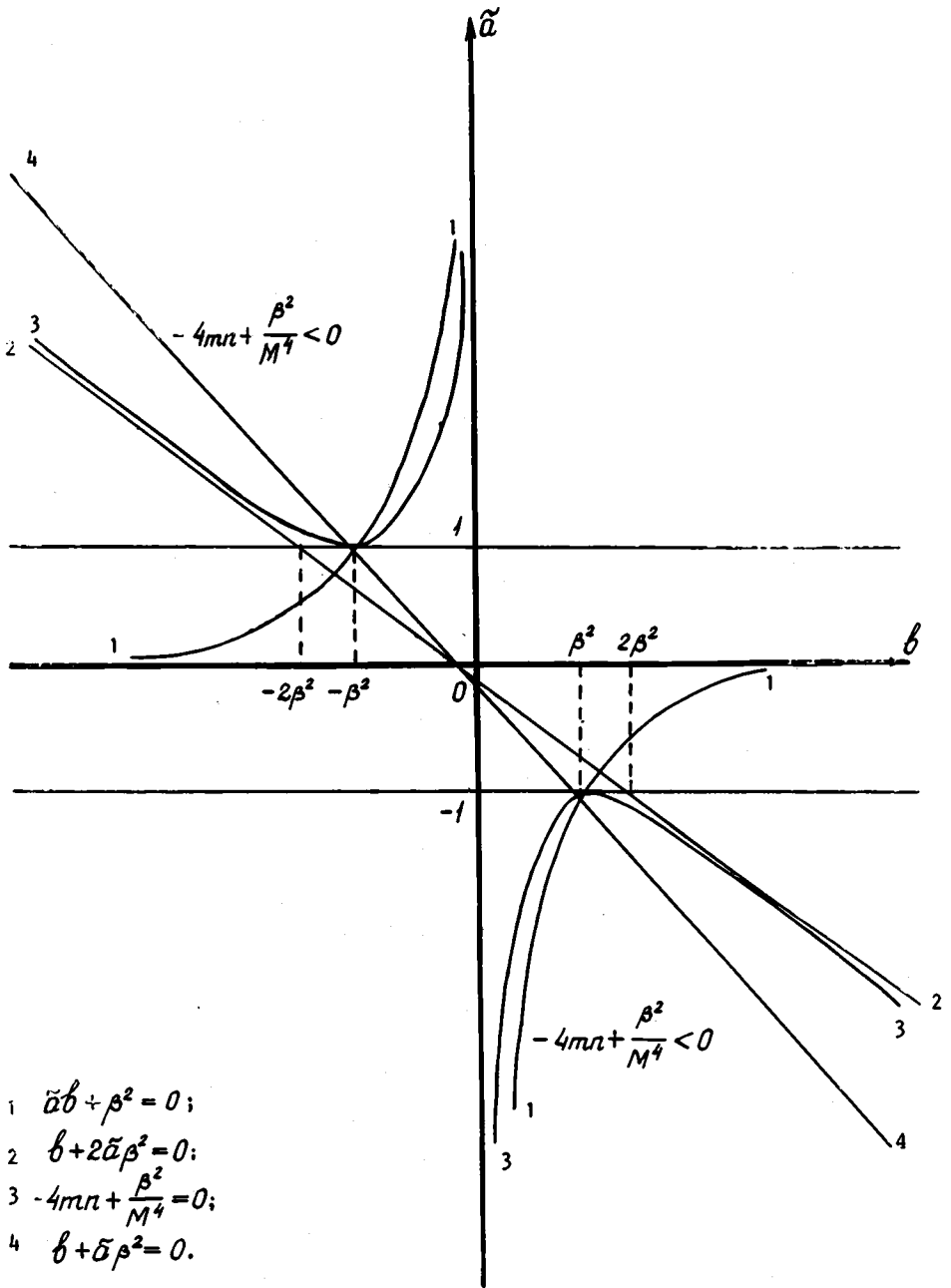


Рис. 3

имеем $B_{\pm} > 0$. При $b < 0$ и $\frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi l = 0$ выполняется $B_{\pm} = B =$

$$= \frac{\tilde{\alpha}\beta^2 + b}{\tilde{\alpha}^2 - 1} > 0, \text{ если } \tilde{\alpha}\beta^2 + b > 0. \text{ Если } b < 0, \tilde{\alpha}\beta^2 + b > 0, \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi l < 0, \text{ то } B_{\pm} = (\tilde{\alpha}\hat{\alpha} - b) \pm i\tilde{\alpha}\hat{\beta}, \tilde{\alpha}\hat{\alpha} - b > 0. \text{ При}$$

$$\tilde{\alpha}\beta^2 + b = 0 \text{ получаем } B_{\pm} = \pm i\tilde{\alpha}\hat{\beta}. \text{ При } \tilde{\alpha}\beta^2 + b < 0, \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi l < 0$$

имеем $B_{\pm} = \tilde{\alpha}\hat{\alpha} - b \pm i\tilde{\alpha}\hat{\beta}, \tilde{\alpha}\hat{\alpha} - b < 0$. Если $\frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi l = 0,$

$\tilde{\alpha}\beta^2 + b < 0$, то $B_{\pm} = B < 0$. При $\frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi l > 0, b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 > 0$

получаем $B_{\pm} < 0$. При $b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 = 0, b < 0$ выполняется $B_{+} = 0,$

$B_{-} < 0$. При $b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 < 0, b < 0$, имеем $B_{+} > 0, B_{-} < 0$

Пусть $b > 0$. Поскольку $B_{-} < 0, A_{-} > 0$, то $\tilde{y} = -\delta$. При $\delta = -1$

имеем:

$$x = \sqrt{A_{-}} > 0; \hat{\varrho}_1 = -x < 0; \chi_0 = \frac{1}{1 + \varepsilon y x} < 1;$$

$$\hat{\varrho}_2 = \frac{x - \sqrt{2l - M^2 x^2}}{l} < 0; \hat{\varrho}_3 = \frac{x + \sqrt{2l + M^2 x^2}}{l} > 0 \quad (\varepsilon y > 0).$$

Таким образом, при $b > 0, \tilde{\alpha} > 1$ мы построили разностный аналог примера некорректности типа примера Адамара. В самом деле

$$\chi_1 = 1 + \varepsilon y \hat{\varrho}_1; \chi_2 = 1 + \varepsilon y \hat{\varrho}_2; \chi_3 = 1 + \varepsilon y \hat{\varrho}_3;$$

$$\chi_0 = 1/(1 + \varepsilon y x), \quad \text{т.е. } |\chi_{0,1,2}| < 1 \quad \text{и } |\chi_3| > 1;$$

$$q = 1 + \varepsilon y l x - r_3 \varepsilon y i, \quad \text{т.е. } |q| > 1.$$

При

$$b < 0, \tilde{\alpha} > 1, \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi l < 0; \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi l \geq 0, \tilde{\alpha}b + \beta^2 > 0, b \leq 0, \tilde{\alpha} > 1$$

построить разностный аналог примера некорректности не удастся. По сравнению с разностной задачей Коши новых ограничений на Γ в этой области не получено.

$$\text{При } \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi l \geq 0; \tilde{\alpha}\beta^2 + b < 0; b < 0; \tilde{\alpha} > 1 \quad \text{имеем } A_{\pm} < 0,$$

т.е. x - чисто мнимое число, и, следовательно, требуется дальнейшее уточнение.

При $\frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\lambda = 0; \tilde{\alpha}\beta^2 + b < 0; b < 0; \tilde{\alpha} > 1$ имеем

$$A = \frac{\tilde{\alpha}b + \beta^2}{\tilde{\alpha}^2 - 1}; B = \frac{\tilde{\alpha}\beta^2 + b}{\tilde{\alpha}^2 - 1}, \tilde{y} = \delta.$$

При $\frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\lambda > 0; b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 > 0; b < 0; \tilde{\alpha} > 1; \tilde{\alpha}\beta^2 + b < 0$
 получаем $M^4 B_{\pm} < 0$ ($\tilde{y} = \delta$). Если $b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 = 0; b < 0; \tilde{\alpha} > 1$,

то $B_+ = 0; B_- < 0; A_{\pm} < 0$. При $b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 < 0; b < 0; \tilde{\alpha} > 1$ выполняется $B_+ > 0$ ($\tilde{y} = -\delta$); $B_- < 0$ ($\tilde{y} = \delta$). Параметры $x, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_{2,3}$ вычисляются с помощью формул (4.4), (4.4'). Заметим, что параметры d, λ , вычисленные для идеального газа, удовлетворяют неравенствам:

$$b < -\beta^2; 2\tilde{\alpha}\beta^2 + b > 0; \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\lambda > 0.$$

п) Пусть $\tilde{\alpha} = 1$. В этом случае $A = \frac{b^2}{2(b + \beta^2)}; B = -b \frac{b + 2\beta^2}{2(b + \beta^2)}$.

При $b > 0$ можно построить разностный аналог примера некорректности. При $-\beta^2 < b \leq 0$ по сравнению с разностной задачей Коши новых ограничений на n не получено. При остальных значениях b требуется дальнейшее уточнение. Если $-2\beta^2 < b < -\beta^2$, то $B < 0; A < 0$ ($\tilde{y} = \delta$). При $b + 2\beta^2 = 0$ имеем $B = 0, A < 0$. Наконец, при $b < -2\beta^2$ получаем $B > 0, A < 0$ ($\tilde{y} = -\delta$).

ш) Пусть $0 < \tilde{\alpha} < 1$. При $b > 0$ можно построить разностный аналог примера некорректности. При $b \leq 0$ требуется дальнейшее уточнение. Если $b = 0$; то

$$A_+ = \frac{2\beta^2}{\tilde{\alpha}^2 - 1} < 0; B_+ = \frac{2\tilde{\alpha}\beta^2}{\tilde{\alpha}^2 - 1} < 0 \quad (\tilde{y} = \delta).$$

При $b < 0; b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 > 0$ имеем $A_+ < 0, B_+ < 0$ ($\tilde{y} = \delta$). При

$b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 = 0$ получаем $B_+ = 0$. Наконец, при $b < -2\tilde{\alpha}\beta^2$ имеем $B_+ > 0$ ($\tilde{y} = -\delta$).

1у) Пусть $\tilde{\alpha} = 0$. В этом случае $B = -b; A_{\pm} = -(\beta^2 \pm \sqrt{\beta^4 + b^2})$.

При $b > 0$ можно построить разностный аналог примера некорректности. При $b \leq 0$ требуется дальнейшее уточнение. Если $b < 0$, то $A_+ < 0; B > 0$ ($\tilde{y} = -\delta$).

При $b = 0$ имеем $A_+ = -2\beta^2 < 0; B = 0$.

у) Пусть $-1 < \tilde{\alpha} < 0$. В этом случае $A_+ < 0; A_- > 0$. При $b > 0$ можно построить разностный аналог примера некорректности. Если $b \leq 0$, то требуется дальнейшее уточнение. При $b \leq 0$ имеем $A_+ < 0; B_+ > 0$ ($\tilde{y} = -\delta$).

1л) Пусть $\tilde{\alpha} = -1$. В этом случае $A = \frac{b^2}{2(\beta^2 - b)}, B = -b$. При $0 < b < \beta^2$ мож-

но построить разностный аналог примера некорректности. При $b \leq 0$ по сравнению с разностной задачей Коши новых ограничений на n не получено. Если $\beta^2 < b <$

$< 2\beta^2$, то $A < 0, B > 0$ ($\tilde{y} = -\delta$). При $b = 2\beta^2$ имеем $A < 0; B = 0$.
 При $b > 2\beta^2$ получаем $A, B < 0$ ($\tilde{y} = \delta$).

уп) Пусть $\tilde{\alpha} < -1$. При $b \leq 0; b > 0, \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\mu \geq 0, \tilde{\alpha}\beta^2 + b < 0; b > 0, \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\mu < 0$ можно построить разностный аналог примера некорректности. При $\frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\mu = 0; b + \tilde{\alpha}\beta^2 > 0$ имеем $A = \frac{\tilde{\alpha}b + \beta^2}{\tilde{\alpha}^2 - 1} < 0;$
 $B = \frac{b + \tilde{\alpha}\beta^2}{\tilde{\alpha}^2 - 1} > 0$ ($\tilde{y} = \delta$). При $\frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\mu > 0; b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 < 0; b + \tilde{\alpha}\beta^2 > 0$ получаем $A_{\pm} < 0, B_{\pm} > 0$ ($\tilde{y} = -\delta$). При $b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 = 0, b > 0$ имеем $A_{\pm} < 0, B_{-} > 0, B_{+} = 0$ ($\tilde{y} = -\delta$). При $b + 2\tilde{\alpha}\beta^2 > 0; b > 0$ получаем $A_{\pm} < 0; B_{+} < 0$ ($\tilde{y} = \delta$); $B_{-} > 0$ ($\tilde{y} = -\delta$).

Таким образом, при

$b > 0, \tilde{\alpha} > -1; b \leq 0, \tilde{\alpha} < -1; 0 < b < \beta^2, \tilde{\alpha} = -1; b > 0, \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\mu \geq 0, \tilde{\alpha}\beta^2 + b < 0; \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\mu < 0, b > 0, \tilde{\alpha} < -1$ разностная схема (1.5) с граничными условиями (1.6), (1.6') (или (1.6'')) неустойчива. При

$\tilde{\alpha} \geq 1, b < -\beta^2, \frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\mu \geq 0; -1 < \tilde{\alpha} < 1, b \leq 0; \tilde{\alpha} \leq 1, b > \beta^2,$

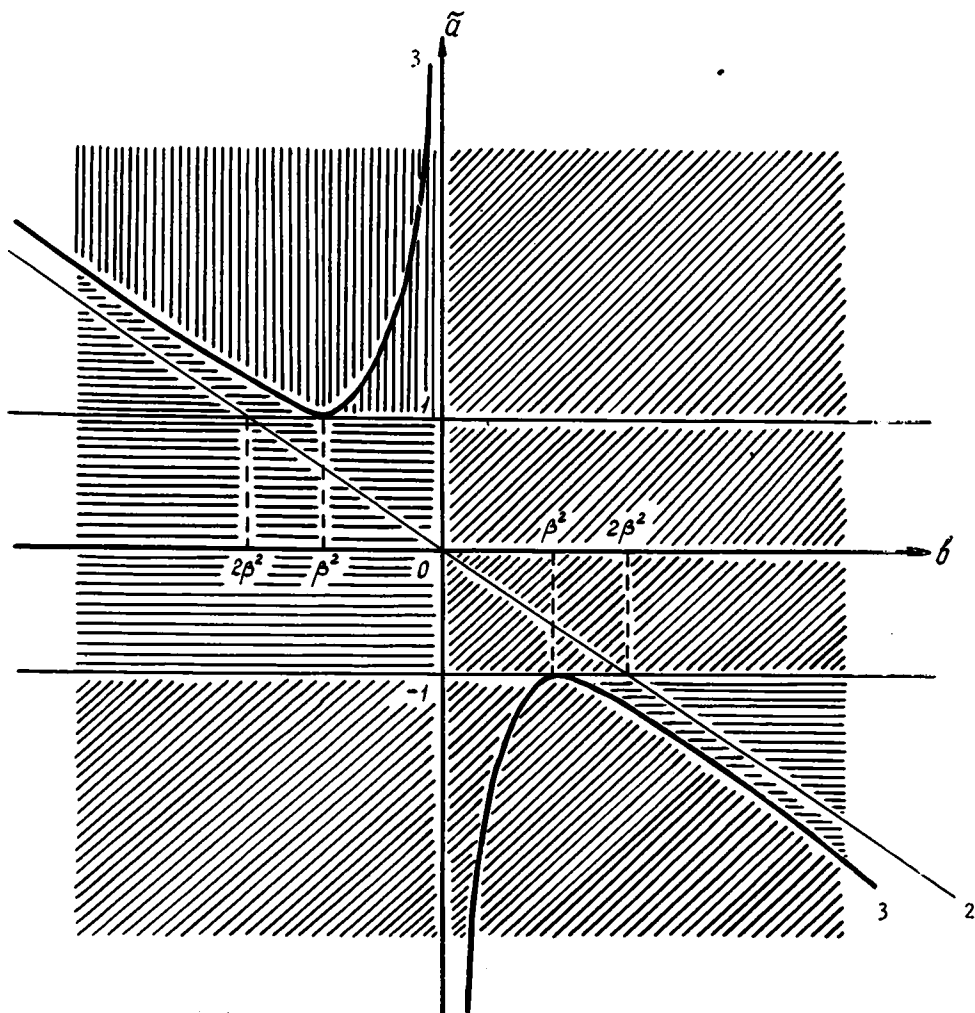
$\frac{\beta^2}{M^4} - 4\pi\mu \geq 0$ требуется дальнейшее уточнение. При остальных значениях параметров $\tilde{\alpha}, b$ по сравнению с разностной задачей Коши новых ограничений на r не получено (рис. 4).

§5. Дальнейшее уточнение значений $q, \gamma_{1,2}$

Из (3.3) получаем:

$$\hat{p}_1 = \frac{\kappa_1 x^2 - M^{-2}}{2 - M^{-2} x^2} x^2 - \hat{\Omega},$$

$$\hat{p}_{2,3} = -\hat{\Omega} \frac{x + \hat{\varrho}_{2,3}}{x - \ell \hat{\varrho}_{2,3}} + \frac{\kappa_2 \hat{\varrho}_{2,3}^2}{2(x + \hat{\varrho}_{2,3})(x - \ell \hat{\varrho}_{2,3})} +$$



$$3 \quad -4mz + z^2/M^4 = 0;$$

$$2 \quad b + 2\tilde{\alpha}z^2 = 0.$$

/// - область, в которой можно построить разностный аналог примера Адамара (п. А);

≡ - область, в которой требуется дальнейшее уточнение;

||| - область, в которой не построен п.А.

Рис. 4

$$+ \frac{i}{x - \ell \hat{\rho}_{2,3}} + \kappa_1 \hat{\rho}_{2,3}^2 \frac{x - \kappa_2 \hat{\rho}_{2,3}}{2(x - \ell \hat{\rho}_{2,3})}. \quad (5.1)$$

В соотношениях (5.1) $x, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2$ определяются по формулам (4.4), (4.4'). Учи-

тывая соотношение (5.1), из (3.7) получаем:

$$\hat{\rho}_v = \frac{A_1}{B_1} + v \frac{2 \hat{\lambda} M^{-1} \left(\frac{x}{i} - \sqrt{2} \right) \cdot r}{B_1}, \quad v=0,1; \quad (5.2)$$

$$\text{где } A_1 = M^{-1} \frac{\kappa A_{\pm} - M^{-2} A_{\pm}^2}{2 - M^{-2} A_{\pm}^2} \cdot \left[\kappa_2 \left(\frac{x}{i} - \delta \frac{|B_{\pm}|}{\sqrt{|A_{\pm}|}} \right) + \hat{d} \kappa_1 \left(\frac{x}{i} + \delta \frac{|B_{\pm}|}{\sqrt{|A_{\pm}|}} \right) \right] +$$

$$+ \delta \cdot \ell \cdot \frac{\sqrt{|A_{\pm}|}}{|B_{\pm}|} \cdot \frac{x}{i} (\hat{d} - 1) \left[\frac{\left(\frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} + \delta M^{-1} |B_{\pm}| \right)^2}{2 \kappa_1 M^{-1} \sqrt{|A_{\pm}|} (M^{-1} \cdot \frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} + \delta |B_{\pm}|)} + 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{M^{-1}}{2 \ell^2 \sqrt{|A_{\pm}|}} \left(\frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} - \delta |B_{\pm}| \right) \left(\frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} + \delta M^{-1} |B_{\pm}| \right)^2 \right] +$$

$$+ \frac{\hat{d} M^{-1} \sqrt{|A_{\pm}|}}{\kappa_1} \left(\frac{x}{i} (M^{-1} + 2) \sqrt{|A_{\pm}|} + \delta (M^{-1} + \kappa_1) |B_{\pm}| \right) + \frac{\hat{\lambda}}{\kappa_1 \sqrt{|A_{\pm}|}} \times$$

$$\times \left(\frac{x}{i} (\ell + M^{-1}) \sqrt{|A_{\pm}|} - \delta M^{-2} |B_{\pm}| \right) - 2 \hat{\lambda} M^{-1}, \quad B_1 = - \frac{\delta M^{-2}}{|B_{\pm}| \sqrt{|A_{\pm}|}} \times$$

$$\times \left\{ \left(\frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} - \delta |B_{\pm}| \right)^2 - \hat{d} \left(\frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} + \delta |B_{\pm}| \right)^2 \right\}.$$

$$\text{Поскольку } q = 1 + \varepsilon \xi + \varepsilon^2 \sigma; \quad \xi = \left(\frac{x}{i} - \sqrt{2} \right) i r y; \quad \sigma = r y^2 \left(\hat{\rho}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

то из условия $|q| < 1$ получаем:

$$r \left[\left(\frac{x}{i} - \sqrt{2} \right)^2 + v \frac{4 \hat{\lambda} M^{-1} \left(\frac{x}{i} - \sqrt{2} \right)}{B_1} \right] - \sqrt{2} \left(1 - \sqrt{2} \frac{A_1}{B_1} \right) < 0. \quad (5.3)$$

Из условий $|\chi_{1,2}| < 1$ следует:

$$r \nu \frac{4 \hat{\lambda} M^{-1} (\sqrt{2} - \frac{x}{i})}{B_1} - \left[2 \frac{A_1}{B_1} - 2C_1 - |A_{\pm}| \right] < 0;$$

$$r \nu \frac{4 \hat{\lambda} M^{-1} (\sqrt{2} - \frac{x}{i})}{B_1} - \left[2 D_1 \frac{A_1}{B_1} - 2F_1 - \frac{1}{e^2} \left(\frac{x}{i} + \delta M^{-1} \frac{|B_{\pm}|}{\sqrt{|A_{\pm}|}} \right)^2 \right] < 0, \quad (5.3')$$

где $C_1 = \frac{\kappa_1 - M^{-2} A_{\pm}}{2 - M^{-2} A_{\pm}} A_{\pm} < 0;$

$$D_1 = - \frac{\delta}{e |B_{\pm}|} \left(M^{-2} \frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} + \delta |B_{\pm}| \right);$$

$$F_1 = - \frac{\delta}{M^{-1} |B_{\pm}|} \left[\frac{\left(\frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} + \delta M^{-1} |B_{\pm}| \right)^2}{2 \kappa_1 M^{-1} \left(M^{-1} \frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} + \delta |B_{\pm}| \right)} ; \sqrt{|A_{\pm}|} - \right. \\ \left. - \frac{M^{-1}}{2 e^2 |A_{\pm}|} \left(\frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} - \delta |B_{\pm}| \right) \left(\frac{x}{i} \sqrt{|A_{\pm}|} + \delta M^{-1} |B_{\pm}| \right)^2 \right].$$

Условие $|\chi_0| < 1$ приводит к неравенству

$$2 \hat{\lambda} + |A_{\pm}| > 0. \quad (5.3'')$$

При этом должно также выполняться неравенство $|\chi_3| > 1$.

Для анализа формул (5.3), (5.3'), (5.3'') при конкретных значениях параметров $\tilde{\alpha}, \tilde{b}$ была составлена программа на ЭВМ. Из численных расчетов можно сделать следующие выводы.

Пусть $\nu = 0$. При $\tilde{\alpha} = 0, \tilde{b} < 0$, начиная с некоторого $\tilde{b} = \tilde{b}_0(M)$ можно построить разностный аналог примера Адамара (разностная схема неустой-

чива). При $\tilde{b}_0(M) < \tilde{b} < 0$ не получено существенного ограничения на r по сравнению с разностной задачей Коши. При $\tilde{\alpha} = 1, \tilde{\alpha} = 0.5 (\tilde{b} < 0)$ параметрах $\tilde{\alpha}, \tilde{b}$, соответствующих идеальному газу, ограничений на r (по сравнению с разностной задачей Коши) не получено и разностного аналога примера Адамара

не построено. При $\tilde{\alpha} = -0.5 (\tilde{b} < 0)$, начиная с некоторого $\tilde{b} = \tilde{b}_-(M)$ (при $\tilde{b} < \tilde{b}_-(M)$), получено существенное ограничение на r по сравнению с

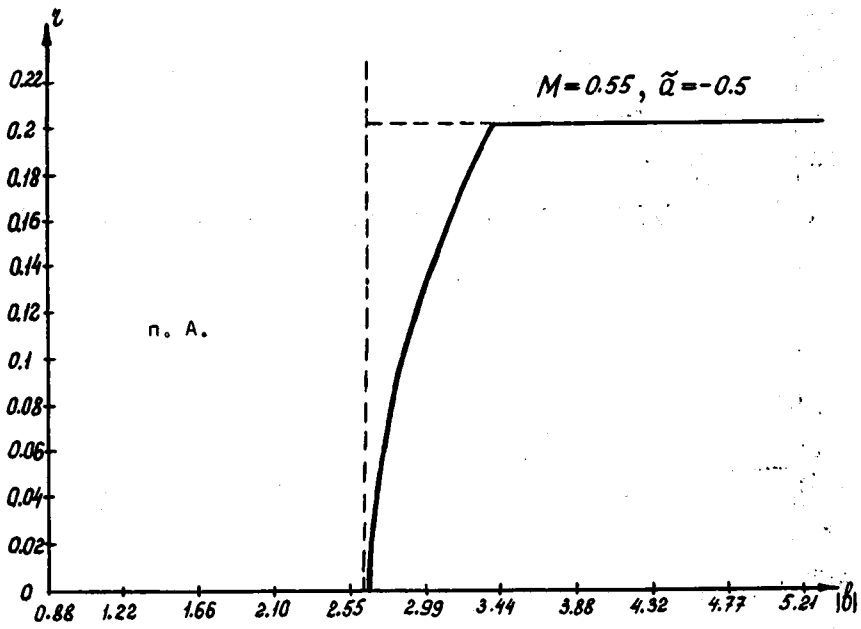


Рис. 5

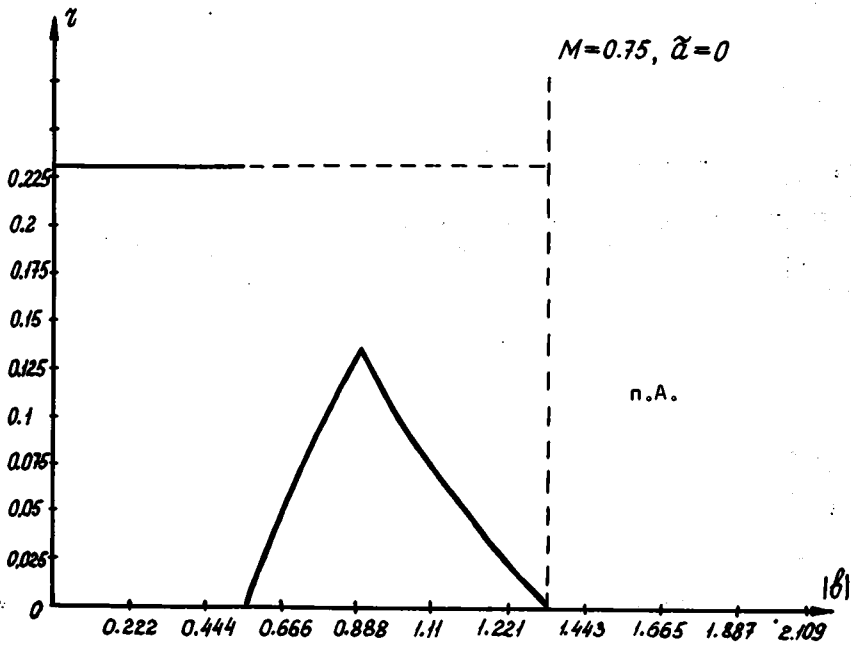


Рис. 6

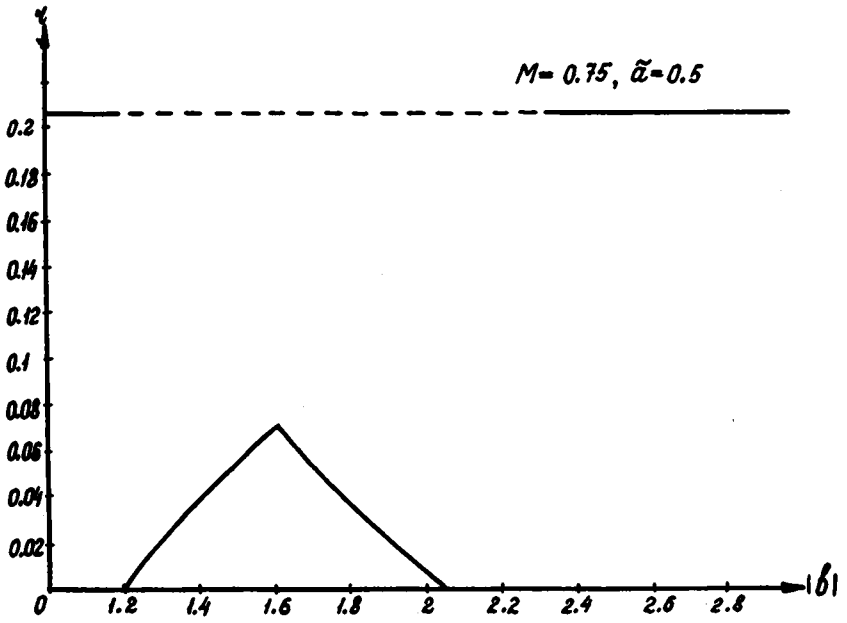


Рис. 7

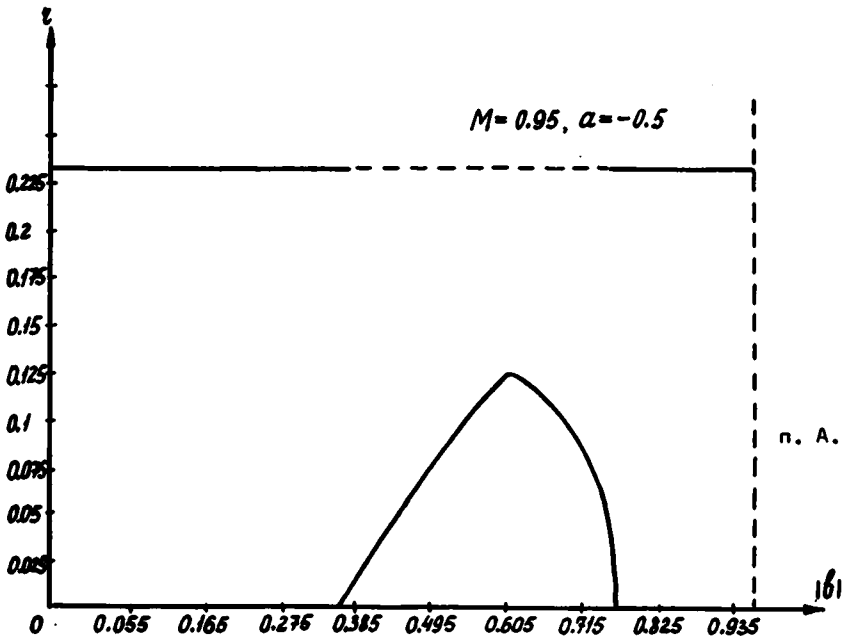


Рис. 8

разностной задачей Коши (рис.5). При $\tilde{v} > \tilde{v}_-(M)$ можно построить разностный аналог примера Адамара.

Пусть $\nu = 1$. При $\tilde{\alpha} = 1$ не получено ограничений на r (по сравнению с разностной задачей Коши) и не построен разностный аналог примера Адамара. При $\tilde{\alpha} = 0$, $\tilde{v} < 0$, начиная с некоторого $\tilde{v} = \tilde{v}_{20}(M)$ ($\tilde{v} < \tilde{v}_{20}(M)$), можно построить разностный аналог примера Адамара. При $\tilde{v}_{20}(M) < \tilde{v} < \tilde{v}_{10}(M)$ получается существенное ограничение на r по сравнению с разностной задачей Коши (рис.6).

При $\tilde{v} > \tilde{v}_{10}(M)$ не получено ограничений на r и не построен разностный аналог примера Адамара. При $\tilde{\alpha} = 0.5$, $\tilde{v} < 0$ получено ограничение на r , если $\tilde{v}_{22}(M) < \tilde{v} < \tilde{v}_{11}(M)$ (рис.7).

При остальных значениях \tilde{v} не получено ограничений на r и не построен разностный аналог примера Адамара. Если $\tilde{\alpha} = -0.5$, $\tilde{v} < 0$, то получено ограничение на r при $\tilde{v}_{23}(M) < \tilde{v} < \tilde{v}_{12}(M)$ (рис.8).

При $\tilde{v} < \tilde{v}_3(M)$ ($\tilde{v}_3(M) < \tilde{v}_{23}(M)$) можно построить разностный аналог примера Адамара. При остальных значениях \tilde{v} не получено ограничений на r и не построен разностный аналог примера Адамара. При параметрах $\tilde{\alpha}, \tilde{v}$, соответствующих идеальному газу, ограничений на r не получено и разностного аналога примера Адамара не построено.

Заключение

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. В работе исследуется влияние граничных условий на устойчивость явной разностной схемы для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне. Сравнивая рис.1 и 4, можно утверждать, что области параметров $\tilde{\alpha}, \tilde{v}$, для которых не выполняется условие Лопатинского и для которых можно построить разностный аналог примера Адамара, практически совпадают.

2. В области параметров $\tilde{\alpha}, \tilde{v}$, для которых не выполнено равномерное условие Лопатинского (область Ш на рис.1) либо получаются существенные ограничения на r по сравнению с разностной задачей Коши, либо удается построить разностный аналог примера Адамара.

Литература

1. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. - М.: Наука, 1977. - 440 с.
2. Костин В.И. Об устойчивости разностной схемы С.К. Годунова для смешанных задач математической физики. - Сиб.мат.журн., 1978, т.19, № 6, с.1300-1307.
3. Влохин А.М. Смешанная задача для системы уравнений акустики с граничными

- условиями на ударной волне. Изв. СО АН СССР. Серия техн. наук, 1979, № 13, вып.3, с.25-33.
4. Влохин А.М. О корректности смешанной задачи для системы уравнений акустики с краевыми условиями на ударной волне.- Новосибирск. Б.и., 1979.-21 с. (Препринт/ВЦ СО АН СССР; 141).
 5. Годунов С.К. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1979.- 392 с.
 6. Дьяков С.П. Об устойчивости ударных волн.- Журн. эксперим. и теор. физ., 1954, т.27, № 3(9), с.288-296.
 7. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики.- Успехи мат. наук, 1940, вып.8, с.125-160.