УДК 517.947

О ПОСТАНОВКЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕ ТИПА КОШИ-КОВАЛЕВСКОЙ

С.И. Янов (Новосибирск)

Рассматриваются смешанные задачи для класса систем, определитель матриц которых не разрешен относительно старшей производной:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(x,x_n,\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{u}=\vec{f}, \quad x_0>0, x_n>0, x\in E_{n-1}, \\ &\mathcal{B}(\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{u}\Big|_{x_n=0}=\vec{\varphi}, \quad x_0>0, \\ &u=0 \quad \text{при} \quad x_0<0. \end{aligned} \tag{1}$$

Вначале исследуются постановки задач для систем с постоянными коэффициентами. Этот класс систем содержит, в частности, линеаризованную систему гидродинамики идеальной вращающейся жидкости - систему С.Л.Соболева. Далее, при более жестких ограничениях, результаты обобщаются на системы с переменными коэффициентами. Как для систем с постоянными, так и систем с переменными коэффициентами доказана корректная разрешимость задачи (1) в весовых классах функций $W^{\ell}_{2,\gamma}$ типа С.Л.Соболева, если $\vec{f}$ и $\vec{\varphi}$ удовлетворяют конечному числу условий ортогональности, а задача подчиняется условию типа условия Лопатинского. Близкие вопросы изучались в работах [1-7].

§1. Определения, предположения, формулировка основного результата и некоторые примеры

Обозначим:

$$E_n^+=\left\{\bar{x}=(x,x_n):\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\in E_{n-1},\ x_n>0\right\};$$

$$E_{n+1}^{++}=\left\{(x_0,x,x_n):\bar{x}=(x,x_n)\in E_n^+,\ \ x_0>0\right\};$$

$$x^s=x_1^{s_1}\ldots x_{n-1}^{s_{n-1}},\quad |\alpha|=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\ ,\quad \nu\alpha=\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i\alpha_i\ ;$$

$$|\xi|^2=\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^{2/\alpha_i},\quad \tau=i\eta+\sigma,\quad Re\,\tau=\sigma\geqslant\gamma>0;$$

$$G(\xi)=N|\xi|^N\cdot e^{-|\xi|^N},\quad \mathcal{D}_{x_k}^{\beta_k}=\frac{\partial^{\beta_k}}{\partial x_k^{\beta_k}};$$

$$\mathcal{D}_x^{\beta}=\mathcal{D}_{x_1}^{\beta_1}\ldots\mathcal{D}_{x_{n-1}}^{\beta_{n-1}},\quad \alpha_{min}=\min_{k=1\ldots n-1}\alpha_k;$$

$$F_{x\to\xi}\,\omega(\cdot,x,\cdot)=\hat{\omega}(\cdot,\xi,\cdot)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_{E_{n-1}}e^{i\xi x}\omega(\cdot,x,\cdot)dx;$$

$$L_{x_0\to\tau}\,\omega(x_0,\cdot,\cdot)=\int_0^{\infty}e^{-\tau x_0}\omega(x_0,\cdot,\cdot)dx_0,\ Re\,\tau=\sigma>\gamma.$$

Через $deg_\tau\, b(\tau,\xi)$ обозначим степень полинома $b(\tau,\xi)$ по τ, а через Z - множество целых чисел.

Определим условия, которым удовлетворяют операторы $\mathcal{L}(x,x_n,\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})$ и $B(\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})$.

1) Оператор $\mathcal{L}(\bar{x},\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})$ обладает свойством

$$\det\mathcal{L}(\bar{x},\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\equiv A_\ell(\bar{x},\mathcal{D}_{\bar{x}})\mathcal{D}_{x_0}^{\ell}+\sum_{k=0}^{\ell-1}A_k(\bar{x},\mathcal{D}_{\bar{x}})\mathcal{D}_{x_0}^{k}\equiv$$

$$\equiv P_m(\bar{x},\mathcal{D}_{x_0})\mathcal{D}_{x_n}^{m}+\sum_{k=0}^{m-1}L_k(\bar{x},\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_x)\mathcal{D}_{x_n}^{k},$$

причем $P_m(\bar{x},\tau)\neq 0$, $Re\,\tau\geq\gamma>0$, $A_\ell(\bar{x}^0,i\xi,i\lambda)=0\Longleftrightarrow|\xi|+|\lambda|=0$ в любой фиксированной точке $\bar{x}^0$.

2) Элементы ℓ_{kj} матрицы $\mathcal{L}$ обладают свойством: $\exists$ целые s_k и t_j и вектор $(0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i>0$, $i=1,\ldots,n$, такие, что $\forall_{k,j}$ и $c>0$ имеет место

$$\ell_{kj}(x,x_n,\tau,c^{\alpha}i\xi,c^{\alpha_n}i\lambda)=c^{s_k+t_j}\ell_{kj}(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)\quad\text{при } s_k+t_j\geqslant$$

$\geqslant 0$ и

$$\ell_{kj}(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)=0\quad\text{при } s_k+t_j<0.$$

Будем фиксировать s_k и t_j, предполагая

$$\max_{1\leq k\leq\theta}s_k=0,\quad t_j\geqslant 0,\quad j=1\ldots\theta.$$

Далее рассмотрим $\gamma_j=\max_{1\leq k\leq\theta}deg_\tau\,\ell_{kj}(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)$, $j=1\ldots\theta$,

$$n_k=\min\{p:p\in Z,\ p\leq 0\ \text{и}\ \forall j=1\ldots\theta,\ deg_\tau\,\tau^{-\gamma_j-p}\ell_{kj}(x,x_n,i\xi,i\lambda)\leq 0\},\ k=1\ldots\theta.$$

Используя эти вспомогательные определения, матрицу $\mathcal{L}$ можно представить в виде:

$$\mathcal{L}(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)=N(\tau)\cdot\mathcal{L}_0(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)\cdot\gamma(\tau),$$

где $\quad N(\tau)=\left\{\delta_{\kappa j}\tau^{n_\kappa}\right\}_{\substack{\kappa=1\dots\theta\\ j=1\dots\theta}},\quad \mathcal{L}_0(x,x_n,i\xi,i\lambda)=$

$$=\left\{\tau^{-\nu_j-n_\kappa}\ell_{\kappa j}(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)\right\}_{\substack{\kappa=1\dots\theta\\ j=1\dots\theta}},\quad \nu(\tau)=\left\{\delta_{\kappa j}\tau^{\nu_j}\right\}_{\substack{\kappa=1\dots\theta\\ j=1\dots\theta}},$$

$\delta_{\kappa j}$ - символ Кронекера.

Элементы матрицы $\mathcal{L}_0(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)$ имеют по τ степень либо меньше, либо равную нулю.

3) Предположим, что $\det\mathcal{L}(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)\equiv$

$$\equiv\det N(\tau)\cdot\det\nu(\tau)\cdot\det\mathcal{L}_0(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)=\tau^\ell\det\mathcal{L}_0(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda),$$

где ℓ определяется условием 1). Из условия 1) следует, что $\det\mathcal{L}_0(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)\neq 0$ при $(\xi,\lambda)\in E_n\setminus 0,\ \operatorname{Re}\tau\geqslant\gamma\gg 0.$

Пусть $\lambda_1^+(x,x_n,\tau,\frac{i\xi}{|\xi|^\alpha}),\dots,\lambda_\mu^+(x,x_n,\tau,\frac{i\xi}{|\xi|^\alpha})$ - корни с положительной мнимой частью уравнения $\det\mathcal{L}_0(x,x_n,\tau,\frac{i\xi}{|\xi|^\alpha},i\lambda)=0$ относительно λ.

Определим

$$M^+\left(x,x_n,\tau,\frac{i\xi}{|\xi|^\alpha},i\lambda\right)=\prod_{\kappa=1}^{\mu}\left(\lambda-\lambda_\kappa^+(x,x_n,\tau,\frac{i\xi}{|\xi|^\alpha})\right)=\sum_{j=0}^{\mu}b_j\left(x,x_n,\tau,\frac{i\xi}{|\xi|^\alpha}\right)\lambda^{\mu-j}.$$

4) Матрица граничных операторов $B(\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_{\bar{x}})$ имеет порядок $\mu\times\theta$, где μ - число корней с положительной мнимой частью уравнения $\det\mathcal{L}_0(x,x_n,\tau,\frac{i\xi}{|\xi|},i\lambda)$ относительно λ.

5) Если $b_{\kappa j}(\tau,i\xi,i\lambda)$ - многочлены, соответствующие элементам матрицы $B(\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_{\bar{x}})$, то существуют рациональные $\delta_\kappa<0$ такие, что

$$b_{\kappa j}(\tau,c^\alpha i\xi,c^{\alpha_n}i\lambda)=c^{\delta_\kappa+t_j}b_{\kappa j}(\tau,i\xi,i\lambda),$$

если $\delta_\kappa+t_j\geqslant 0$; и $b_{\kappa j}=0$, если $\delta_\kappa+t_j<0$.

Предположим также, что $\deg_\tau b_{\kappa j}(\tau,i\xi,i\lambda)\leqslant\nu_j\quad\forall\kappa=1\dots\mu.$

Определим $p_\kappa=\min\{p:\ p\in Z,\ p\leqslant 0$ и $\forall j=1\dots\theta$,

$\deg_\tau\tau^{-\nu_j-p}b_{\kappa j}(\tau,i\xi,i\lambda)\leqslant 0\}$, $\kappa=1\dots\mu$;

$b^0_{\kappa j}(\tau,i\xi,i\lambda)=\tau^{-\nu_j-p_\kappa}b_{\kappa j}(\tau,i\xi,i\lambda)$ и $B_0(\tau,i\xi,i\lambda)=\{b^0_{\kappa j}(\tau,i\xi,i\lambda)\}_{\substack{j=1\dots\theta\\ \kappa=1\dots\mu}}$.

6) Пусть $\tilde{\mathcal{L}}_0(x,x_n,\tau,i\xi,i\lambda)$ - матрица, взаимная матрице

$\mathcal{L}_0(x, x_n, \tau, i\xi, i\lambda)$ (т.е. составленная из алгебраических дополнений $\mathcal{L}_0(x, x_n, \tau, i\xi, i\lambda)$ и транспонированная). Полагаем, что выполнено условие типа Лопатинского: строки матрицы

$$A_0(x, x_n, \tau, i\xi, i\lambda) = B_0(\tau, i\xi, i\lambda)\tilde{\mathcal{L}}_0(x, x_n, \tau, i\xi, i\lambda)$$

линейно-независимы по $\operatorname{mod} M^+(x, x_n, \tau, i\xi, i\lambda)$ при $|\xi|=1, \forall\tau, Re\,\tau \geq \gamma$.

7) Предположим также, что выполнено условие

$$\deg_\lambda \sum_{j=1}^{\theta} b_{qj}(\tau, i\xi, i\lambda)\tilde{\ell}_{jk}(x, x_n, \tau, i\xi, i\lambda) < m, \; q=1\dots\mu, \; k=1\dots\theta,$$

где $\tilde{\ell}_{jk}$ - элементы матрицы, взаимной матрице $\mathcal{L}$, а m определяется условием 1).

Определим класс функций $W_{2,\gamma}^{p/\alpha,\ell}(E_{n+1}^{++})$, $\gamma > 0$.

Для этого рассмотрим два случая.

1. Пусть $\ell > 0$. Функция $u \in W_{2,\gamma}^{p/\alpha,\ell}(E_{n+1}^{++})$, если $\mathcal{D}_{x_0}^k u(0, x, x_n) = 0$ при $k = 0, \dots, p\ell - 1$, где ℓ - порядок старшей производной по x_0 и

$$\sum_{\beta_0\ell^{-1} + \alpha\beta + \alpha_n\beta_n \leq p} \| \mathcal{D}_{x_0}^{\beta_0} e^{-\gamma x_0} \mathcal{D}_x^{\beta} \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n} u, L_2(E_{n+1}^{++}) \| < \infty .$$

2. Пусть $\ell = 0$. Функция $u \in W_{2,\gamma}^{p/\alpha,\ell}(E_{n+1}^{++})$, если $u(x_0, x, x_n) = 0$ при $x_0 < 0$ и

$$\sum_{\alpha\beta + \alpha_n\beta_n \leq p-1} \| e^{-\gamma x_0} \mathcal{D}_x^{\beta} \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n} u, L_2(E_{n+1}^{++}) \| < \infty .$$

Определим класс функций $\tilde{W}_{2,\gamma}^{p/\alpha,\ell}(E_{n+1}^{+})$, $\gamma > 0$.

Для этого рассмотрим два случая.

1. Пусть $\ell > 0$. Функция $v \in \tilde{W}_{2,\gamma}^{p/\alpha,\ell}(E_{n+1}^{+})$, если при почти всех $(x, x_n) \in E_n^+$ функция $v(\tau, x, x_n)$ голоморфна по τ, $Re\,\tau > \gamma$ и

$$\sum_{\beta_0\ell^{-1} + \beta\alpha + \beta_n\alpha_n \leq p} \sup_{\sigma > \gamma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\sigma + i\eta|^{2\beta_0} \| \mathcal{D}_x^{\beta} \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n} v(\tau, x, x_n), L_2(E_n^+) \|^2 d\eta \right)^{1/2} < \infty .$$

2. Пусть $\ell = 0$. Функция $v \in \tilde{W}_{2,\gamma}^{p/\alpha,\ell}(E_{n+1}^{+})$, если при почти всех $(x, x_n) \in E_n^+$ функция $v(\tau, x, x_n)$ голоморфна по τ, $Re\,\tau > \gamma$ и

$$\sum_{\beta\alpha+\beta_n\alpha_n\le p-1}\sup_{\sigma>\gamma}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\mathcal{D}_x^{\beta}\mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n}\sigma(\sigma+i\eta,x,x_n)L_2(E_n^+)\|^2 d\eta\right)^{1/2}<\infty.$$

По обобщенной теореме Пэли-Винера [8], преобразование Лапласа взаимно-однозначно и с сохранением нормы отображает пространство $W_{2,\gamma}^{p/\alpha,\ell}(E_{n+1}^{++})$ на $\widetilde{W}_{2,\gamma}^{p/\alpha,\ell}(E_{n+1}^{+})$.

Определим также пространства:

$$H^{t,\nu}(E_{n+1}^{++})=W_{2,\gamma}^{(t_1+1)/\alpha,\nu_1}(E_{n+1}^{++})\times\ldots\times W_{2,\gamma}^{(t_\theta+1)/\alpha,\nu_\theta}(E_{n+1}^{++}),$$

$$\widetilde{H}^{t,\nu}(E_{n+1}^{+})=\widetilde{W}_{2,\gamma}^{(t_1+1)/\alpha,\nu_1}(E_{n+1}^{+})\times\ldots\times\widetilde{W}_{2,\gamma}^{(t_\theta+1)/\alpha,\nu_\theta}(E_{n+1}^{+})$$

и введем в них обычную норму прямого произведения.

Определим класс функций $\mathfrak{M}_q^{\kappa}(E_n)$, $\kappa=1,2$. Функция $\varphi_q(\tau,x)\in\mathfrak{M}_q^{\kappa}(E_n)$, если при почти всех $x\in E_{n-1}$ функция $\varphi_q(\tau,x)$ голоморфна по τ, $Re\,\tau>\gamma$ и для $\frac{|\alpha|}{2}>\max\limits_{1\le j\le\theta}t_j+\delta_q+\frac{\alpha_n}{2}$ имеет место

$$\|\varphi_q,\mathfrak{M}_q^{\kappa}(E_n)\|=\|\varphi_q,\widetilde{W}_{2,\gamma}^{\tau_{q\kappa}}(E_n)\|+$$

$$+\sup_{\sigma>\gamma}\|\,|\tau|^{\ell_0-p_q}\|\varphi_q(\tau,x),L_1(E_{n-1})\|,\ L_2(E_1)\|<\infty,$$

где $\|\varphi_q,\widetilde{W}_{2,\gamma}^{\tau_{q\kappa}}(E_n)\|=\sup\limits_{\sigma>\gamma}\Big[\sum\limits_{1}^{n-1}\|\xi_i^{\tau_{q\kappa}^i}\hat{\varphi}_q(\tau,\xi),\ L_2(E_n)\|+$

$$+\|\,|\tau|^{\tau_{q\kappa}^0}\hat{\varphi}_q(\tau,\xi),L_2(E_n)\|\Big],\quad \tau_{q\kappa}=(\tau_{q\kappa}^0,\tau_{q\kappa}^1\ldots\tau_{q\kappa}^{n-1}),$$

$$\tau_{q\kappa}^0=\ell_0-p_q,\ \kappa=1,2,\ \ell_0=\max_{1\le i\le\theta}t_i\cdot\nu_0,\quad \nu^0=\max_{1\le i\le\theta}\nu_i,$$

$$\tau_{q1}^i\alpha_i=\begin{cases}1-\delta_q-\frac{\alpha_n}{2} & \text{при } p_q=0,\\ -p_q-\delta_q-\frac{\alpha_n}{2} & \text{при } p_q\ne0,\end{cases}\qquad i=1\ldots n-1,$$

$$\tau_{q2}^i\alpha_i=1-p_q-\delta_q-\frac{\alpha_n}{2},$$

а при $\frac{|\alpha|}{2}+N_q\alpha_{min}>\max\limits_{1\le j\le\theta}t_j+\delta_q+\frac{\alpha_n}{2}\ge\frac{|\alpha|}{2}+(N_q-1)\alpha_{min}$, $N_q\ge1$, имеет место

$$\|\varphi_q, \mathfrak{M}_q^{\kappa}(E_n)\| = \|\varphi_q, \widetilde{W}_{2,\gamma}^{\,\eta_{q\kappa}}(E_n)\| +$$

$$+ \sup_{\sigma>\gamma} \sum_{|\ell|\leq N_q} \|\,|\tau|^{\ell_0-p_q} \|\varphi_q(\tau,x) \times x'^{\ell}, L_1(E_{n-1})\|, L_2(E_1)\| < \infty;$$

$$\mathfrak{M}^{\kappa}(E_n) = \mathfrak{M}_1^{\kappa}(E_n) \times \mathfrak{M}_2^{\kappa}(E_n) \times \ldots \times \mathfrak{M}_{\mu}^{\kappa}(E_n), \quad \kappa=1,2.$$

Определим пространства $\mathcal{L}_q^{\kappa}(E_n) \subseteq \mathfrak{M}_q^{\kappa}(E_n), \quad \kappa=1,2$. При $\frac{|\alpha|}{2} > \max\limits_{1\leq j\leq\theta} t_j + \delta_q + \frac{\alpha_n}{2}$ положим $\mathcal{L}_q^{\kappa}(E_n) = \mathfrak{M}_q^{\kappa}(E_n)$, при $\frac{|\alpha|}{2} + N_q \alpha_{min} > \max\limits_{1\leq j\leq\theta} t_j + \delta_q + \frac{\alpha_n}{2} \geq \frac{|\alpha|}{2} + (N_q - 1)\alpha_{min}$ функция $\varphi_q(\tau,x) \in \mathcal{L}_q^{\kappa}(E_n)$, если $\varphi_q \in \mathfrak{M}_q^{\kappa}(E_n)$, и $\int\limits_{E_{n-1}} x'^{\ell} \varphi_q(\tau,x) dx' = 0$ для $0 \leq |\ell| \leq N_q - 1$.

Определим прямое произведение θ пространств $L_{2,\gamma}(E_{n+1}^+)$, обозначив его $H(E_{n+1}^+)$:

$$H(E_{n+1}^+) = L_{2,\gamma}(E_{n+1}^+) \times \ldots \times L_{2,\gamma}(E_{n+1}^+).$$

Определим класс функций $\mathfrak{M}_{\kappa}^{o}(E_{n+1}^+)$. Функция $f_{\kappa}(\tau,x,x_n) \in \mathfrak{M}_{\kappa}^{o}(E_{n+1}^+)$, если для почти всех $(x,x_n) \in E_n^+$ функция $f(\tau,x,x_n)$ голоморфна по τ и при $\frac{|\alpha|}{2} > \max\limits_{1\leq j\leq\theta} t_j + s_{\kappa}$ справедливо

$$\|f_{\kappa}, \mathfrak{M}_{\kappa}^{o}(E_{n+1}^+)\| = \sup_{\sigma>\gamma} \Big[\|f_{\kappa}, \widetilde{W}_{2,\gamma}^{(c_{\kappa}-s_{\kappa})/\alpha, \nu^o}(E_{n+1}^+)\| +$$

$$+ \|\,|\tau|^{\ell_0-n_{\kappa}} \hat{f}_{\kappa}(\tau,\xi,x_n), L_2(E_{n+1}^+)\| + \|\,|\tau|^{\ell_0-n_{\kappa}} \|f_{\kappa}, L_1(E_{n-1})\|, L_2(E_2^+)\| \Big] < \infty,$$

$$c_{\kappa} = \begin{cases} 1 & \text{при } n_{\kappa} = 0, \\ -n_{\kappa} & \text{при } n_{\kappa} \neq 0, \end{cases}$$

а при

$$\frac{|\alpha|}{2} + N_{\kappa}^{*} \alpha_{min} > \max_{1\leq j\leq\theta} t_j + s_{\kappa} \geq \frac{|\alpha|}{2} + (N_{\kappa}^{*} - 1)\alpha_{min}, \quad N_{\kappa}^{*} \geq 1,$$

имеет место

$$\|f_\kappa, \mathfrak{M}_\kappa^o(E_{n+1}^+)\| = \sup_{\sigma > \gamma}\Big[\|f_\kappa, \tilde{W}_{2,\gamma}^{(c_\kappa - s_\kappa)/\alpha, \nu^o}(E_{n+1}^+)\| + \||\tau|^{\ell_o - n_\kappa}\hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n),$$

$$L_2(E_{n+1}^+)\| + \sum_{|\ell| \le N_\kappa^*}\|\|f_\kappa(\tau, x, x_n)x^\ell, L_1(E_{n-1})\||\tau|^{\ell_o - n_\kappa}, L_2(E_2^+)\|\Big] < \infty;$$

$$\mathfrak{M}^o(E_{n+1}^+) = \mathfrak{M}_1^o(E_{n+1}^+) \times \mathfrak{M}_2^o(E_{n+1}^+) \times \ldots \times \mathfrak{M}_\theta^o(E_{n+1}^+)$$

с нормой прямого произведения.

Определим пространства $\mathcal{L}_\kappa^o(E_{n+1}^+) \subseteq \mathfrak{M}_\kappa^o(E_{n+1}^+)$. При $\frac{|\alpha|}{2} > \max\limits_{1 \le j \le \theta} t_j + s_\kappa$ положим $\mathcal{L}_\kappa^o(E_{n+1}^+) = \mathfrak{M}_\kappa^o(E_{n+1}^+)$, при $\frac{|\alpha|}{2} + N_\kappa^* \alpha_{min} > \max\limits_{1 \le j \le \theta} t_j + s_\kappa > \frac{|\alpha|}{2} + (N_\kappa^* - 1)\alpha_{min}$ функция $f_\kappa(\tau, x, x_n) \in \mathcal{L}_\kappa^o(E_{n+1}^+)$, если $f_\kappa \in \mathfrak{M}_\kappa^o(E_{n+1}^+)$, и

$$\int_{E_{n-1}} x^\ell f_\kappa(\tau, x, x_n)dx = 0 \quad \text{для} \quad 0 \le |\ell| \le N_\kappa^* - 1.$$

Обозначим

$$\mathcal{L}^o(E_{n+1}^+) = \mathcal{L}_1^o(E_{n+1}^+) \times \mathcal{L}_2^o(E_{n+1}^+) \times \ldots \times \mathcal{L}_\theta^o(E_{n+1}^+),$$

а

$$\mathcal{L}^\kappa(E_n) = \mathcal{L}_1^\kappa(E_n) \times \mathcal{L}_2^\kappa(E_n) \times \ldots \times \mathcal{L}_\mu^\kappa(E_n), \quad \kappa = 1, 2.$$

Теорема 1. *Пусть операторы* $\mathcal{L}(\overline{x}^o, \mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_{\overline{x}})$, $B(\mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_x)$ *удовлетворяют условиям 1)-7) (* $\overline{x}^o$ *- фиксированная точка). Если* $L_{x_0 \to \tau}\vec{g}(x_0, x, x_n) \in \mathcal{L}^o(E_{n+1}^+)$, $L_{x_0 \to \tau}\vec{\psi}(x_0, x) \in \mathcal{L}'(E_n)$, *то смешанная задача*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(\overline{x}^o, \mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_{\overline{x}})\vec{u} = \vec{g}, \quad x_0 > 0, \quad x_n > 0, \quad x \in E_{n-1}, \\ &B(\mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_{\overline{x}})\vec{u}\big|_{x_n = 0} = \vec{\psi}, \quad x_0 > 0, \\ &\qquad\qquad \vec{u} = 0, \quad \text{если} \quad x_0 < 0, \end{aligned} \tag{1}$$

при постоянном $\overline{x}^o$ *имеет единственное решение* $\vec{u} = \vec{R}^1(x_0)\vec{g} + \vec{\vec{R}}(x_0)\vec{\psi}$, *причем выполнена оценка*

$$\|\vec{u}, H^{t,\nu}(E_{n+1}^{++})\| \le c(\gamma)\Big[\|L_{x_0 \to \tau} g, \mathfrak{M}^o(E_{n+1}^+)\| + \|L_{x_0 \to \tau}\vec{\psi}, \mathfrak{M}'(E_n)\|\Big],$$

где константа $c(\gamma)$ *зависит от* γ.

Теорема 2. *Пусть операторы* $\mathcal{L}(\overline{x}, \mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_{\overline{x}})$, $B(\mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_{\overline{x}})$ *удовлетворяют условиям 1) - 7),* $s_\kappa = n_\kappa = 0$, $\max\limits_{1 \le j \le \theta} t_j = 1$, *коэффициенты* *оператора* $\mathcal{L}(\bar{x},\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_{\bar{x}})$ *- гладкие, мало отличаются от постоянных и стабилизируются вне компакта* $K \subset E_n^+$ *, их производные достаточно высокого порядка мало отличаются от нуля.*

Если $\frac{|\alpha|}{2} > 1$ *и* $L_{x_0\to\tau}\vec{f}(x_0,x,x_n) \in \mathfrak{M}^0(E_{n+1}^+)$, $L_{x_0\to\tau}\varphi(x_0,x) \in \mathcal{L}^2(E_n)$ *, то смешанная задача (1) имеет единственное решение* $\vec{u} \in H^{t,\nu}(E_{n+1}^{++})$ *, причем выполнена оценка*

$$\|\vec{u}, H^{t,\nu}(E_{n+1}^{++})\| \le c(\gamma,K)\left[\|L_{x_0\to\tau}\vec{f},\ \mathfrak{M}^0(E_{n+1}^+)\| + \|L_{x_0\to\tau}\vec{\varphi},\ \mathfrak{M}^2(E_n)\|\right];$$

если же $\frac{|\alpha|}{2} \le 1$, $L_{x_0\to\tau}\vec{f}(x_0,x,x_n) \in \mathfrak{M}^0(E_{n+1}^+)$, $L_{x_0\to\tau}\vec{\varphi}(x_0,x) \in \mathcal{L}^2(E_n)$

и при $\frac{|\alpha|}{2} + N^*\alpha_{min} > 1 \ge \frac{|\alpha|}{2} + (N^*-1)\alpha_{min}$ *выполнено условие*

$$\int_{E_{n-1}} x^\ell\left[(\vec{f} - \Delta\overrightarrow{\mathcal{L}\tilde{R}(\bar{x}^0)\vec{\varphi}}) + \sum_{i=1}^{\infty}\left[-\Delta\mathcal{L}R'(\bar{x}^0)\right]^i(\vec{f} - \Delta\overrightarrow{\mathcal{L}\tilde{R}(\bar{x}^0)\vec{\varphi}})\right]dx = 0,$$

$$|\ell| \le N^*-1,\quad \Delta = \mathcal{L}(\bar{x},\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_{\bar{x}}) - \mathcal{L}(\bar{x}^0,\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_{\bar{x}}),\quad \bar{x}^0 \notin K,$$

то смешанная задача (1) имеет единственное решение $u \in H^{t,\nu}(E_{n+1}^{++})$, *причем выполнена аналогичная оценка. Константа* $c(\gamma,K)$ *зависит от* γ *и* $\mathrm{diam}\,K$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Исследуем постановки задач для линеаризованной системы гидродинамики идеальной вращающейся жидкости - системы С.Л.Соболева [1]:

$$\mathcal{L}(\mathcal{D})\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -\omega & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \omega & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ P \end{pmatrix} = \vec{f}\ .$$

Проверим выполнение условий 1) - 7).

1) $\det\mathcal{L}(\mathcal{D}_t,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_z) = -[\mathcal{D}_x^2+\mathcal{D}_y^2+\mathcal{D}_z^2]\mathcal{D}_t^2 - \omega^2\mathcal{D}_z^2 = (-\mathcal{D}_t^2-\omega^2)\mathcal{D}_z^2 - \mathcal{D}_t^2(\mathcal{D}_x^2+\mathcal{D}_y^2).$

2) $t_1 = 1,\ t_2 = 1,\ t_3 = 1,\ t_4 = 2,$

$s_1 = -1,\ s_2 = -1,\ s_3 = -1,\ s_4 = 0,\qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,$

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = 1, \quad \nu_3 = 1, \quad \nu_4 = 0,$$
$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0, \quad n_4 = -1.$$

3) $$\det \mathcal{L}(\tau, i\xi_1, i\xi_2, i\lambda) = \tau^2 \left[\xi_1^2 + \xi_2^2 + \lambda^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 \lambda^2\right] = \tau^2 \det \mathcal{L}_0(\tau, i\xi, i\xi_2, i\lambda),$$

$$\lambda^2 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right) + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0,$$

$$\lambda^2 = - \frac{[\xi_1^2 + \xi_2^2]}{\left[1 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right]}, \qquad \lambda_1^+ = i \frac{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2\right)^{1/2}}.$$

4) Так как корень с положительной мнимой частью только один, то в матрице граничных операторов будет только одна строка. Эту строку нужно выбрать так, чтобы удовлетворялись условия 6), 7).

Найдем

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \begin{pmatrix} (\xi_2^2 + \xi_3^2) & -\xi_1\xi_2 + \frac{\omega}{\tau}\xi_3^2 & -\xi_1\xi_3 - \frac{\omega}{\tau}\xi_2\xi_3 & -i\frac{\omega}{\tau}\xi_2 - i\xi_1 \\ -\xi_1\xi_2 - \frac{\omega}{\tau}\xi_3^2 & (\xi_1^2 + \xi_3^2) & -\xi_2\xi_3 + \frac{\omega}{\tau}\xi_1\xi_3 & i\xi_1\frac{\omega}{\tau} - i\xi_2 \\ -\xi_1\xi_3 + \frac{\omega}{\tau}\xi_2\xi_3 & -\xi_2\xi_3 - \frac{\omega}{\tau}\xi_1\xi_3 & (\xi_2^2 + \xi_1^2) & -i\xi_3 - i\frac{\omega^2}{\tau^2}\xi_3 \\ i\frac{\omega}{\tau}\xi_2 - i\xi_1 & -i\frac{\omega}{\tau}\xi_1 - i\xi_2 & -i\xi_3 - \frac{i\omega^2}{\tau^2}\xi_3 & 1 + \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Теперь, как легко видеть, в качестве B можно взять, например:

$B_1 = (0\ 0\ 1\ 0), \delta_1 = -1, \rho_1 = -1$ - в случае 2-й краевой задачи

или

$B_2 = (0\ 0\ 0\ 1), \delta_1 = -2, \rho_1 = 0$ - в случае 1-й краевой задачи.

Условия 6), 7) будут выполнены.

Так как $\frac{|\alpha|}{2} > t_j + s_k$ не для всех j и k, то $\vec{f}$ должна удовлетворять условию ортогональности. Если в качестве матрицы граничных условий выбрана матрица $B_2 = (0001)$, то условие $\frac{|\alpha|}{2} > t_j + \delta_1 + \frac{1}{2}$ выполнено и условий ортогональности на $\vec{\varphi}$ требовать не следует. Если же в качестве граничных условий выбрана матрица $B_1 = (0010)$, то условие $\frac{|\alpha|}{2} > t_j + \delta_1 + \frac{1}{2}$ выполняется не для всех j. Поэтому нужно требовать выполнение условий ортогональности на $\vec{\varphi}$.

§2. Решение смешанной задачи с постоянными коэффициентами

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathcal{L}(\bar{x}^0, \tau, \mathcal{D}_{\bar{x}})\vec{v} = \vec{f}(\tau, x, x_n), \quad x_n > 0,$$
$$B(\tau, \mathcal{D}_{\bar{x}})\vec{v}\Big|_{x_n = 0} = \vec{\varphi}(\tau, x), \tag{2}$$

где операторы $\mathcal{L}(\bar{x}^0, \tau, \mathcal{D}_{\bar{x}})$ и $B(\tau, \mathcal{D}_{\bar{x}})$ получены из операторов $\mathcal{L}(\bar{x}^0, \mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_{\bar{x}})$ и $B(\mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_{\bar{x}})$ формальной заменой производной $\mathcal{D}_{x_0}$ на параметр τ.

Тогда имеет место

Теорема 3. *Пусть операторы $\mathcal{L}(\mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_{\bar{x}})$ и $B(\mathcal{D}_{x_0}, \mathcal{D}_{\bar{x}})$ удовлетворяют условиям 1) - 7). Если $\vec{f} \in \mathcal{L}^0(E^+_{n+1})$ и $\vec{\varphi} \in \mathcal{L}^1(E_n)$, то краевая задача (2) имеет единственное решение $\vec{v} \in \tilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})$, причем выполнена оценка:*

$$\|\vec{v}, \tilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})\| \le C(\gamma)\left[\|\vec{f}, \mathfrak{M}^0(E^+_{n+1})\| + \|\vec{\varphi}, \mathfrak{M}^1(E_n)\|\right],$$

где константа $C(\gamma)$ зависит от γ.

Из теоремы 3 и обобщенной теоремы Пэли-Винера следует теорема 1.

Решение краевой задачи (2) строим в виде потенциалов, используя представление функций $f \in L_p(E_{n-1})$ из [12], методику решения смешанных задач для уравнений из [7], а также методику построения решений для уравнений и систем уравнений из [9-11,14].

Обозначим $\xi = (\xi'_1, \ldots, \xi'_{n-1})$, $\xi'_k = \frac{\xi_k}{|\xi|^{\alpha_k}}$. Рассмотрим матрицы $\mathcal{L}_0(\tau, i\xi', i\lambda)$, $B_0(\tau, i\xi', i\lambda)$, $\tilde{\mathcal{L}}_0(\tau, i\xi', i\lambda)$, определенные в условиях 5) и 2), 6). Обозначим $B_0(\tau, i\xi', i\lambda)\cdot\tilde{\mathcal{L}}_0(\tau, i\xi', i\lambda) = A_0(\tau, i\xi', i\lambda)$.

От матрицы $A_0(\tau, i\xi', i\lambda)$ перейдем к матрице $A'_0(\tau, i\xi', i\lambda)$, элементы которой есть остатки от деления соответственных элементов $A_0(\tau, i\xi', i\lambda)$ на $M^+(\tau, i\xi', i\lambda)$. Определим теперь матрицу $\overline{A'_0}(\tau, i\xi', i\lambda)$. Если $a^{\alpha}_{kj}(\tau, i\xi', i\lambda) = \sum_{s=1}^{\mu} \lambda^{s-1} a^s_{kj}(\tau, i\xi')$ - элементы матрицы $A'_0(\tau, i\xi', i\lambda)$, то

$$\overline{A'_0}(\tau, i\xi') = \{a^1_{kj}(\tau, i\xi'), a^2_{kj}(\tau, i\xi', \ldots, a^{\mu}_{kj}(\tau, i\xi')\}_{\substack{k=1\ldots\mu \\ j=1\ldots\theta}}.$$

В силу предположения 6), ранг матрицы $\overline{A'_0}(\tau, i\xi')$ равен μ. Значит, существует минор порядка $\mu \times \mu$, определитель которого не равен нулю, когда $|\xi'| = 1$, $Re\,\tau \ge \gamma$. Обращая его, строим правую обратную матрицу

$$(\overline{A'_0})^{-1}_{np} = \{a^{(k,q)}_{\ell}(\tau, i\xi')\}_{\substack{\ell=1\ldots\mu \\ k=1\ldots\theta \\ q=1\ldots\mu}}.$$

Отметим, что, в силу такого построения и условий 1) - 7), элементы $a^{(k,q)}_{\ell}(\tau, i\xi)$ равномерно ограничены при $|\xi| = 1$, $Re\,\tau \ge \gamma$.

Определим

$$M^+_{\mu-q}(\tau, i\xi', i\lambda) = \sum_{j=0}^{\mu-q} b_j(\tau, i\xi')\lambda^{\mu-q-j},$$

$b_j(\tau, i\xi')$ определены условием 3). Далее,

$$T_{\kappa,q}(\tau, i\xi', i\lambda) = \sum_{s=1}^{\mu} M^{+}_{\mu-s}(\tau, i\xi', i\lambda) a_s^{(\kappa,q)}(\tau, i\xi'),\ q=1,\dots,\mu,\ \kappa=1,\dots,\theta;$$

$$N_{j,q}(\tau, i\xi', i\lambda) = \sum_{\kappa=1}^{\theta} \tilde{\ell}^{o}_{j\kappa}(\tau, i\xi', i\lambda) T_{\kappa,q}(\tau, i\xi', i\lambda),\ j=1,\dots,\theta,\ q=1,\dots,\mu,$$

где $\tilde{\ell}^{o}_{j\kappa}(\tau, i\xi', i\lambda)$ - элементы матрицы $\tilde{\mathcal{L}}_o(\tau, i\xi', i\lambda)$. Определим оператор

$$\overrightarrow{\tilde{R}^h}\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_1^h \vec{\varphi} \\ \tilde{R}_2^h \vec{\varphi} \\ \vdots \\ \tilde{R}_\theta^h \vec{\varphi} \end{pmatrix},$$

где $$\tilde{R}_j^h \vec{\varphi} = (2\pi)^{-n+1} \sum_{q=1}^{\mu} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1+\delta_q+t_j} \int_{E_{n-1}} \int_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^\alpha}} G(\xi) \times$$

$$\times |\xi|^{-\delta_q - t_j} \tau^{-\nu_j - p_q} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} e^{\frac{i x_n \lambda |\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}} \frac{N_{j,q}(\tau, i\xi', i\lambda)}{M^{+}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, \varphi_q(\tau, y) d\xi\, dy\, d\sigma,$$

$j=1,\dots,\theta$, где $G(\xi) = N|\xi|^N e^{-|\xi|^N}$.

Здесь Γ^+ - контур, охватывающий $\lambda_1^+, \dots, \lambda_\mu^+$.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi_q(\tau, y) \in L_{2,\gamma}(E_n)$ $\forall q = 1,\dots,\mu$, *тогда* $\mathcal{L}(\tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) \tilde{R}^h \vec{\varphi} = 0$,

$$\| B(\tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) \overrightarrow{\tilde{R}^h}\vec{\varphi}|_{x_n=0} - \vec{\varphi}, H_{2,\gamma}(E_n) \| \to 0 \text{ при } h \to 0,$$

где $H_{2,\gamma}(E_n) = L_{2,\gamma}(E_n) \times \dots \times L_{2,\gamma}(E_n)$.

Доказательство следует из построения полиномов $N_{j,q}(\tau, i\xi', i\lambda)$, $M^+(\tau, i\xi', i\lambda)$ (см. [11]) и из свойств интегрального представления (см. [12]).

Лемма 2. *Если* $\vec{\varphi} \in \mathcal{L}'(E_n)$, *то* $\overrightarrow{\tilde{R}^h}\vec{\varphi}$ *голоморфна по* τ, $Re\,\tau > \gamma$, *и имеет место оценка*

$$\| \overrightarrow{\tilde{R}^h}\vec{\varphi}, \tilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1}) \| \le c(\gamma) \cdot \| \vec{\varphi}, \mathcal{M}'(E_n) \|, \tag{3}$$

$$\|\overrightarrow{\widetilde{R}^{h_1}\vec{\varphi}} - \overrightarrow{\widetilde{R}^{h_2}\vec{\varphi}},\ \widetilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})\| \longrightarrow 0 \quad \text{при } h_1, h_2 \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Доказательство оценки проводится аналогично доказательства оценок в [13,7]. Голоморфность $\overrightarrow{\widetilde{R}^h\vec{\varphi}}$ следует из голоморфности контурного интеграла. Оценим каждую $\widetilde{R}^h_j\vec{\varphi}$ в отдельности. Пусть $\beta_0, \beta_1, \beta_n$ таковы, что

$$\beta_0 \nu_j^{-1} + \beta\alpha + \beta_n\alpha_n \leq 1 + t_j \quad \text{при } \nu_j \neq 0 \text{ и } \beta\alpha + \beta_n\alpha_n \leq t_j \quad \text{при } \nu_j = 0.$$

Тогда

$$I = \left\| |\tau|^{\beta_0} \mathcal{D}_x^{\beta} \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n} \widetilde{R}^h_j \vec{\varphi}, L_2(E^+_{n+1}) \right\| \leq C \sum_{q=1}^{\mu} \Big\| |\tau|^{\beta_0 - \nu_j - p_q} \times$$

$$\times \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha| - 1 - \alpha\beta - \alpha_n\beta_n + \delta_q + t_j} \int_{E_{n-1}} \int_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^{\alpha}}} G(\xi)\cdot(i\xi)^{\beta}\cdot|\xi|^{-\delta_q - t_j + \alpha_n\beta_n} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} e^{\frac{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}} \frac{(i\lambda)^{\beta_n} N_{j,q}(\tau, i\xi', i\lambda)}{M^+(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, \varphi_q(\tau, y)\, d\xi\, dy\, d\sigma, L_2(E^+_{n+1}) \Big\| \leq$$

$\leq$ (подстановка $\dfrac{\xi}{\sigma^{\alpha}} = \widetilde{\xi}$) $\leq$

$$\leq C \sum_{q=1}^{\mu} \Big\| |\tau|^{\beta_0 - \nu_j - p_q} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} \int_{E_{n-1}} \int_{E_{n-1}} e^{i(x-y)\widetilde{\xi}} G(\widetilde{\xi}\sigma^{\alpha}) \times (i\widetilde{\xi})^{\beta} |\widetilde{\xi}|^{-\delta_q - t_j + \alpha_n\beta_n} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} e^{ix_n\lambda|\widetilde{\xi}|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^{\beta_n} N_{j,q}(\tau, i\xi', i\lambda)}{M^+(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda\, \varphi_q(\tau, y)\, d\widetilde{\xi}\, dy\, d\sigma,\ L_2(E^+_{n+1}) \Big\| =$$

(обозначим $G(\widetilde{\xi}\sigma^{\alpha})(i\widetilde{\xi})^{\beta} |\widetilde{\xi}|^{-\delta_q - t_j + \alpha_n\beta_n} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma^+} e^{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}} \times$

$$\times \frac{(i\lambda)^{\beta_n} N_{j,q}(\tau, i\xi', i\lambda)}{M^+(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda = G_{j,q}(\tau, \sigma, \widetilde{\xi}), \quad \text{тогда)}$$

$$= c\sum_{q=1}^{\mu} \Big\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-p_q} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1}\hat{G}_{j,q}(\tau,\sigma,x) *$$

$$* \varphi_q(\tau,y)\,d\sigma, L_2(E^+_{n+1})\Big\| =$$ (равенство Парсеваля в $L_2(E_{n-1})$) $=$

$$= c\sum_{q=1}^{\mu} \Big\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-p_q} \Big\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\tilde{\xi}\sigma^{\alpha})(i\tilde{\xi})^{\beta}|\tilde{\xi}|^{-\delta_q-t_j+\alpha_n\beta_n} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} e^{ix_n\lambda|\tilde{\xi}|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^{\beta_n} N_{jq}(\tau,i\xi',i\lambda)}{M^+(\tau,i\xi',i\lambda)}\hat{\varphi}_q(\tau,\hat{\xi})\,d\sigma, L_2(E^+_n)\Big\|, L_2(E_1)\Big\| \le$$

$$\le c(y)\sum_{q=1}^{\mu} \Big\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-p_q} \Big\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) \times$$

$$\times |\xi|^{\alpha\beta+\alpha_n\beta_n-\delta_q-t_j} e^{-\delta x_n|\xi|^{\alpha_n}} \hat{\varphi}_q(\tau,\xi)\,d\sigma, L_2(E^+_n)\Big\|, L_2(E_1)\Big\| \le$$

(вычисляя интеграл, получим) $\le C_1(y)\sum_{q=1}^{\mu} \Big\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-p_q} \Big\| \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) \times$

$$\times |\xi|^{\alpha\beta+\alpha_n\beta_n-\delta_q-t_j-\frac{\alpha_n}{2}} \hat{\varphi}_q(\tau,\xi)\,d\sigma, L_2(E_{n-1})\Big\|, L_2(E_1)\Big\| \le c_1(y) \times$$

$$\times \sum_{q=1}^{\mu}\Big(\Big\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-p_q} \Big\| \int_h^{1} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha})|\xi|^{\alpha\beta+\alpha_n\beta_n-\delta_q-t_j-\frac{\alpha_n}{2}} \hat{\varphi}_q(\tau,\xi)\,d\sigma. L_2(E_{n-1})\Big\|,$$

$$L_2(E_1)\Big\| + \Big\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-p_q} \int_1^{h^{-1}} \sigma^{-1-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n+\delta_q+t_j+\frac{\alpha_n}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} \times$$

$$\times \Big\| G(\xi)|\xi|^{\alpha\beta+\alpha_n\beta_n-\delta_q-t_j-\frac{\alpha_n}{2}} \hat{\varphi}_q\Big(\tau,\frac{\xi}{\sigma^{\alpha}}\Big)\,d\sigma, L_2(E_{n-1})\Big\|, L_2(E_2)\Big\| =$$

$$= c_1(y)\sum_{q=1}^{\mu}\big(I^1_{j,q} + I^2_{j,q}\big).$$

Оценим I^2_{j,q_0}. Достаточно рассмотреть случай $\nu_j \ne 0$. Если $\frac{|\alpha|}{2} > t_j + \delta_q + \frac{\alpha_n}{2}$, то в силу выбора $G(\xi)$ имеем

$$I^2_{j,q} \le c_0(y)\Big\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-p_q} \Big| \varphi_q(\tau,x) L_1(E_{n-1})\Big\|, L_2(E_1)\Big\| \times$$

$$\times \int_1^{h^{-1}} v^{-1-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n+\delta_q+t_j+\frac{\alpha_n}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\,dv \leq C_1(\gamma)\left\| |\tau|^{t_j\nu_j-\rho_q}\times\right.$$

$$\left.\times \left\| \varphi_q(\tau,x) L_1(E_{n-1})\right\|, L_2(E_1)\right\|.$$

Если $\dfrac{|\alpha|}{2}+N_q\alpha_{min} > \max\limits_{1\leq j\leq\theta} t_j+\delta_q+\dfrac{\alpha_n}{2} \geq \dfrac{|\alpha|}{2}+(N_q-1)\alpha_{min}$,

то из условий ортогональности получим

$$|\hat{\varphi}_q(\tau,\xi)| \leq \sum_{i_k}\int_{E_{n-1}} \prod_{k=1}^{N_q}|\xi_{i_k}x_{i_k}\varphi_q(\tau,x)|\,dx,$$

отсюда

$$I^2_{j,q} \leq C_1^*(\gamma)\sum_{|\tilde{\ell}|\leq N_q}\left\| |\tau|^{t_j\nu_j-\rho_q}\left\|\varphi_q x^{\tilde{\ell}}, L_1(E_{n-1})\right\|, L_2(E_1)\right\|.$$

Теперь оценим $I^1_{j,q}$. Имеем три случая:

1. Пусть $\alpha\beta+\alpha_n\beta_n-\delta_q-t_j-\frac{\alpha_n}{2}=0$. Достаточно рассмотреть случай $\nu_j\neq 0$. Тогда

$$I^1_{j,q} \leq \tilde{C}_0(\gamma)\left\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-\rho_q}\hat{\varphi}_q(\tau,\xi), L_2(E_n)\right\| \leq \tilde{C}_1(\gamma)\times$$

$$\times\left\| |\tau|^{t_j\nu_j-\rho_q}\hat{\varphi}_q(\tau,\xi), L_2(E_n)\right\|.$$

2. Пусть $\gamma=\alpha\beta+\alpha_n\beta_n-\delta_q-t_j-\frac{\alpha_n}{2}<0$. Достаточно рассмотреть случай $\nu_j\neq 0$. Имеем

$$I^1_{j,q} \leq \bar{C}_0(\gamma)\left\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-\rho_q}\hat{\varphi}_q(\tau,\xi), L_2(E_n)\right\| \leq$$

$$\leq \bar{C}_1(\gamma)\left\| |\tau|^{t_j\nu_j-\rho_q}\hat{\varphi}_q(\tau,\xi), L_2(E_n)\right\|.$$

3. Пусть $\gamma=\alpha\beta+\alpha_n\beta_n-\delta_q-t_j-\frac{\alpha_n}{2}>0$. Если $\nu_j=0$, $\rho_q\neq 0$, то, полагая $m_1=\dfrac{\gamma-\rho_q}{\gamma}$, $m_2=\dfrac{\gamma-\rho_q}{-\rho_q}$ и учитывая, что $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}=1$ (по определению $\rho_q\leq 0$), получаем

$$|\xi|^{\gamma}|\tau|^{-\rho_q} \leq \frac{|\tau|^{-\rho_q m_2}}{m_2}+\frac{|\xi|^{\gamma m_1}}{m_1},$$ и так как

$$-\rho_q m_2 = \tau - \rho_q = \alpha\beta + \alpha_n\beta_n - \delta_q - t_j - \frac{\alpha_n}{2} - \rho_q \leqslant$$

$$\leqslant t_j - t_j - \delta_q - \frac{\alpha_n}{2} - \rho_q = -\delta_q - \rho_q - \frac{\alpha_n}{2},$$

$$\tau m_1 = \tau - \rho_q \leqslant -\delta_q - \rho_q - \frac{\alpha_n}{2},$$

то

$$I'_{j,q} \leqslant \tilde{C}_1(y)\Big(\big\| |\tau|^{-\delta_q-\rho_q-\frac{\alpha_n}{2}}\, \hat{\varphi}_q(\tau,\xi),\, L_2(E_n)\big\| +$$

$$+\big\| |\xi|^{\delta_q-\rho_q-\frac{\alpha_n}{2}}\, \hat{\varphi}_q(\tau,\xi),\, L_2(E_n)\big\|\Big).$$

Если $\rho_q = 0$, то

$$I'_{j,q} \leqslant \tilde{C}_1(y)\big\| |\xi|^{-\delta_q-\frac{\alpha_n}{2}}\, \hat{\varphi}_q(\tau,\xi), L_2(E_n)\big\|.$$

Если $\nu_j \neq 0$, а $\beta_0 - \nu_j - \rho_q \leqslant 0$, то

$$I'_{j,q} \leqslant C_2(y)\big\| |\xi|^{1-\delta_q-\frac{\alpha_n}{2}}\, \hat{\varphi}_q(\tau,\xi),\, L_2(E_n)\big\|.$$

Если $\nu_j \neq 0$ и $\beta_1 = \beta_0 - \nu_j - \rho_q > 0$, то, полагая $m_1 = \frac{\tau + \nu_j^{-1}\beta_1}{\tau}$, $m_2 = \frac{\tau + \nu_j^{-1}\beta}{\nu_j^{-1}\beta_1}$, в силу $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1$, получаем

$$|\xi|^{\tau}|\tau|^{\beta_1} \leqslant \frac{|\xi|^{\tau m_1}}{m_1} + \frac{|\tau|^{\beta_1 m_2}}{m_2}, \quad \tau m_1 = \tau + \nu_j^{-1}\beta_1 = \alpha\beta + \alpha_n\beta_n -$$

$$-\delta_q - t_j - \frac{\alpha_n}{2} + \nu_j^{-1}\beta_0 - 1 - \rho_q\nu_j^{-1} \leqslant -\delta_q - \frac{\alpha_n}{2} - \rho_q,$$

$$\beta_1 m_2 = \nu_j(\tau + \nu_j^{-1}\beta_1) \leqslant -\nu_j\left(\delta_q + \frac{\alpha_n}{2}\right) - \rho_q.$$

Отсюда имеем

$$I'_{j,q} \leqslant \overline{C}_2(y)\Big(\big\| |\tau|^{-\nu_j(\delta_q+\frac{\alpha_n}{2})-\rho_q}\, \hat{\varphi}_q(\tau,\xi), L_2(E_n)\big\| +$$

$$+\big\| |\xi|^{-\delta_q-\rho_q-\frac{\alpha_n}{2}}\, \hat{\varphi}_q(\tau,\xi), L_2(E_n)\big\|\Big).$$

Оценка (3) доказана. Оценка (4) доказывается аналогично.

Определим оператор

$$\overrightarrow{\widetilde{R}\vec{\varphi}} = \begin{pmatrix} \widetilde{R}_1\vec{\Phi} \\ \widetilde{R}_2\vec{\Phi} \\ \vdots \\ \widetilde{R}_\theta\vec{\Phi} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $\widetilde{R}_j\vec{\varphi} = \lim\limits_{h\to 0} \widetilde{R}_j^h\vec{\varphi}$, сходимость понимается в смысле $\widetilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})$. Область определения оператора совпадает с $\mathcal{L}'(E_n)$.

Определим оператор

$$\overrightarrow{R_1^h\vec{f}} = \begin{pmatrix} R^h_{11}\vec{f} \\ R^h_{12}\vec{f} \\ \vdots \\ R^h_{1\theta}\vec{f} \end{pmatrix},$$

где

$$R^h_{1j}\vec{f} = \sum_{K=1}^{\theta} \widetilde{\ell}_{jK}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})R^{0,h}f_K =$$

$$= \sum_{K=1}^{\theta} \widetilde{\ell}_{jK}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\Bigg[(2\pi)^{1-n}\int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n+m\alpha_n}\int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^\alpha}}G(\xi)\,\times$$

$$\times\frac{|\xi|^{\alpha_n-m\alpha_n}}{P_m(\tau)\,2\pi}\times\int_{\Gamma^+} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda}{\sigma^{\alpha_n}}|\xi|^{\alpha_n}}\frac{1}{\widetilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda f_K(\tau,y,y_n)d\xi dy d\sigma dy_n +$$

$$+(2\pi)^{1-n}\int_\infty^{x_n}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n+m\alpha_n}\int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^\alpha}}G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-m\alpha_n}\frac{1}{P_m(\tau)2\pi}\,\times$$

$$\times\int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{1}{\widetilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}f_K(\tau,y,y_n)d\xi dy d\sigma dy_n\Bigg];$$

$$\widetilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda) = (i\lambda)^m + \sum_{K=0}^{m-1}(i\lambda)^K L_K\left(\tau,\frac{i\xi}{|\xi|^\alpha}\right)\Big/P_m(\tau) =$$

$$= \det\mathcal{L}(\tau,i\xi',i\lambda)/P_m(\tau);$$

$P_m(\tau)$ определяется условием 1), $Re\,\tau > \gamma$, контур $\Gamma^+(\Gamma^-)$ охватывает корни $\lambda_\kappa^+ (\lambda_\kappa^-)$; $\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})$ - элементы матрицы, взаимной $\mathcal{L}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})$.

Лемма 3. *Пусть* $\vec{f}\in H(E_{n+1}^+)$, *тогда*

$$\| \mathcal{L}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{R}_1^h\vec{f} \quad \vec{f}, H(E_{n+1}^+)\| \longrightarrow 0 \qquad \text{при } h\longrightarrow 0.$$

Доказательство. Пусть $1\leq p\leq\theta$. Рассмотрим

$$\sum_{j=1}^{\theta}\ell_{pj}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})R_{1j}^h\vec{f} =$$

$$=\sum_{j=1}^{\theta}\ell_{pj}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\sum_{\kappa=1}^{\theta}\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\circ R^{0,h}f_\kappa =$$

$$=\sum_{\kappa=1}^{\theta}\sum_{j=1}^{\theta}\ell_{pj}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})R^{0,h}f_\kappa =$$

$$=\sum_{\kappa=1}^{\theta}\delta_{p\kappa}\det\mathcal{L}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})R^{0,h}f_\kappa = \left(\delta_{p\kappa}=\begin{cases}1 & p=\kappa\\ 0 & p\neq\kappa\end{cases}\right) =$$

$$=\det\mathcal{L}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})R^{0,h}f_p - \rho^m(\tau)\tilde{L}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\cdot R^{0,h}f_p .$$

Дальнейшее доказательство аналогично проведенному в [7] для уравнений.

Лемма 4. *Если* $\vec{f}\in\mathcal{L}^0(E_{n+1}^+)$, *то* $\overrightarrow{R_1^h\vec{f}}$ *голоморфна по* τ, $Re\,\tau>\gamma$, *и имеет место оценка*

$$\|\overrightarrow{R_1^h}\vec{f}, \tilde{H}^{t,\nu}(E_{n+1}^+)\| \leq c(\gamma)\|\vec{f}, \mathfrak{M}^0(E_{n+1}^+)\|, \tag{6}$$

при этом

$$\|\overrightarrow{R_1^{h_1}}\vec{f} - \overrightarrow{R_1^{h_2}}\vec{f}, \tilde{H}^{t,\nu}(E_{n+1}^+)\| \longrightarrow 0 \quad \text{для } h\longrightarrow 0. \tag{7}$$

Доказательство. Голоморфность следует из голоморфности контурного интеграла. Чтобы получить оценку (6), рассмотрим выражения:

$$I_{\vec{\beta}}^j = \left(\int_{E_1}\int_{E_{n-1}}\int_0^\infty |\tau|^{2\beta_0}|\mathcal{D}_x^\beta\mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n}R_{1,j}^h\vec{f}|^2 dx_n dx d\eta\right)^{\frac{1}{2}},$$

$\beta_0\nu_j^{-1}+\beta\alpha+\beta_n\alpha_n\leq t_j+1$, если $\nu_j\neq 0$, и $\beta\alpha+\beta_n\alpha_n\leq t_j$, $\beta_0=0$, при $\nu_j=0$. Имеем

$$I_\beta^j \leqslant \sum_{\kappa=1}^{\theta}\left(\int_{E_1}\int_{E_{n-1}}\int_0^\infty |\tau|^{2\beta_0}\left|\mathcal{D}_x^\beta \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n}\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})R^{0,h}f_\kappa\right|^2 dx_n dx d\eta = \right.$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\theta} I_\beta^{j,\kappa}.$$

Оценим каждое слагаемое $I_\beta^{j,\kappa}$ в отдельности. Поступаем аналогично работам [13, 7].

К $R^{0,h}f_\kappa$ прибавим и вычтем выражение

$$(2\pi)^{1-n}\int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n+m\alpha_n}\int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^\alpha}}\frac{G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-m\alpha_n}}{P_m(\tau)2\pi}\int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\times$$

$$\times\frac{1}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda f_\kappa(\tau,y,y_n)d\xi dy d\sigma dy_n.$$

Рассмотрим случай , когда

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\kappa}}^{\theta} s_i/\alpha_n + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\theta} t_i/\alpha_n + \beta_n < m.$$

Имеем

$$I_\beta^{j,\kappa} = \left\| |\tau|^{\beta_0}\mathcal{D}_x^\beta \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n}\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\right[(2\pi)^{1-n}\int_0^{x_n}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n+m\alpha_n}\times$$

$$\times\int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^\alpha}}G(\xi)\frac{|\xi|^{\alpha_n-m\alpha_n}}{P_m(\tau)2\pi}\times$$

$$\times\int_\Gamma e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{1}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda f_\kappa(\tau,y,y_n)d\xi dy d\sigma dy_n +$$

$$\div(2\pi)^{1-n}\int_\infty^0\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n+m\alpha_n}\int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^\alpha}} G(\xi)\times$$

$$\times\frac{|\xi|^{\alpha_n-m\alpha_n}}{P_m(\tau)2\pi}\int_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{1}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\times$$

$$\times d\lambda f_\kappa(\tau,y,y_n)d\xi dy d\sigma dy_n L_2(E_{n+1}^+)\Big\| =$$

(используя, то что $\int\limits_{\Gamma} \frac{(i\lambda)^{\kappa}}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda \equiv 0, \quad \kappa \leqslant m-2$)

$$= (2\pi)^{1-n} \left\| \left[|\tau|^{\beta_0} \int\limits_0^{x_n} \int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n+t_j+s_\kappa} \int\limits_{E_{n-1}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^{\alpha}}} G(\xi) \times \right.\right.$$

$$\times |\xi|^{\alpha_n+\alpha_n\beta_n-t_j-s_\kappa} \frac{(i\xi)^{\beta}}{P_m(\tau)2\pi} \int\limits_{\Gamma} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}} \frac{\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau, i\xi', i\lambda)(i\lambda)^{\beta_n}}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} \times$$

$$\times d\lambda f_\kappa\, d\xi\, dy\, dy_n + |\tau|^{\beta_0} \int\limits_{\infty}^{0} \int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n+t_j+s_\kappa} \int\limits_{E_{n-1}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^{\alpha}}} \times$$

$$\times G(\xi)|\xi|^{\alpha_n+\alpha_n\beta_n-t_j-s_\kappa} \frac{(i\xi)^{\beta}}{P_m(\tau)2\pi} \int\limits_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}} \frac{\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau, i\xi', i\lambda)(i\lambda)^{\beta_n}}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} \times$$

$$\left.\left. \times d\lambda f_\kappa\, d\xi\, dy\, dy_n \right], L_2(E^+_{n+1}) \right\| =$$

$$= (2\pi)^{1-n} \Big\| |\tau|^{\beta_0} \int\limits_0^{x_n} \int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n+t_j+s_\kappa} \times$$

$$\times \int\limits_{E_{n-1}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^{\alpha}}} G(\xi) \times |\xi|^{\alpha_n+\alpha_n\beta_n-t_j-s_\kappa} \frac{(i\xi)^{\beta}}{P_m(\tau)2\pi} \int\limits_{\Gamma^+} e^{\frac{i(x_n-y_n)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}} \times$$

$$\times \frac{(i\lambda)^{\beta_n}\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau, i\xi', i\lambda)}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} d\lambda f_\kappa\, d\xi\, dy\, dy_n +$$

$$+ |\tau|^{\beta_0} \int\limits_{\infty}^{x_n} \int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n+t_j+s_\kappa} \int\limits_{E_{n-1}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^{\alpha}}} G(\xi) \times$$

$$\times |\xi|^{\alpha_n+\alpha_n\beta_n-t_j-s_\kappa} \frac{(i\xi)^{\beta}}{P_m(\tau)2\pi} \int\limits_{\Gamma^-} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}} \frac{\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau, i\xi', i\lambda)(i\lambda)^{\beta_n}}{\widetilde{L}(\tau, i\xi', i\lambda)} \times$$

$\times d\lambda f_\kappa\, d\xi\, dy\, dy_n\,,\ L_2(E^+_{n+1}) \Big\| \leqslant$ (равенство Парсеваля в $L_2(E_{n-1})$) $\leqslant$

$$\leqslant C\Bigg(\Bigg\| |\tau|^{\beta_0}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-1-\alpha_n-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n+t_j+s_\kappa} G(\xi\sigma^\alpha)|\xi\sigma^\alpha|^{\alpha_n+\alpha_n\beta_n-t_j-s_\kappa}\times$$

$$\times\frac{(i\xi\sigma^\alpha)^\beta}{P_m(\tau)2\pi}\int\limits_{\Gamma^+} e^{i(x_n-y_n)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\times$$

$$\times\frac{(i\lambda)^{\beta_n}\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau,i\xi',i\lambda)}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)}\,d\lambda\,\hat{f}_\kappa(\tau,\xi,y_n)\,d\sigma\,dy_n, L_2(E^+_{n+1})\Bigg\|+$$

$$+\Bigg\| |\tau|^{\beta_0}\int\limits_\infty^{x_n}\int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-1-\alpha_n-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n+t_j+s_\kappa} G(\xi\sigma^\alpha)|\xi\sigma^\alpha|^{\alpha_n+\alpha_n\beta_n-t_j-s_\kappa}\frac{(i\xi\sigma^\alpha)^\beta}{P_m(\tau)2\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma^-} e^{i(x_n-y_n)\lambda|\xi|^{\alpha_n}}\frac{\tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau,i\xi',i\lambda)(i\lambda)^{\beta_n}}{\tilde{L}(\tau',i\xi',i\lambda)}\,d\lambda\,\hat{f}_\kappa(\tau,\xi,y_n)\,d\sigma\,dy_n, L_2(E^+_{n+1})\Bigg\|\Bigg)\leqslant$$

$\leqslant$ (используя оценки контурных интегралов, а также, то что $\deg_\tau P_m(\tau)=$

$$=\sum_{i=1}^{\theta}\nu_i+n_i\,,\ \tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau,i\xi',i\lambda)=\tau^{\left(\sum\limits_{i=1}^{\theta}\nu_i+n_i\right)-\nu_j-n_\kappa}\,\tilde{\ell}^{\,0}_{j\kappa}(\tau,i\xi',i\lambda),$$

где $\deg_\tau \tilde{\ell}^{\,0}_{j\kappa}(\tau,i\xi',i\lambda)\leqslant 0$, получаем) $\leqslant$

$$\leqslant C(\gamma)\Bigg\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-n_\kappa}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^\alpha)|\xi|^{\alpha_n+\alpha_n\beta_n-t_j-s_\kappa+\alpha\beta}\times$$

$$\times e^{-\delta(x_n-y_n)|\xi|^{\alpha_n}}\chi(x_n-y_n)\chi(y_n)\hat{f}_\kappa(\tau,\xi,y_n)\,d\sigma\,dy_n, L_2(E^+_{n+1})\Bigg\|+$$

$$+C(\gamma)\Bigg\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-n_\kappa}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^\alpha)|\xi|^{\alpha_n+\alpha_n\beta_n-t_j-s_\kappa+\alpha\beta}\times$$

$$\times e^{\delta(x_n-y_n)|\xi|^{\alpha_n}}\times\chi(y_n-x_n)\chi(y_n)\hat{f}_\kappa(\tau,\xi,y_n)\,d\sigma\,dy_n, L_2(E^+_{n+1})\Bigg\|\leqslant$$

(здесь $\chi(y_n)=\begin{cases}1\,, & y_n\geqslant 0\,,\\ 0\,, & y_n<0\,.\end{cases}$

и применяя неравенство Юнга $\Big\|\int\limits_{E_1} f(x-y)\varphi(y)dy., L_2(E_1)\Big\|\leqslant\|f, L_1(E_1)\|\times$

$\times \| \varphi, L_2(E_1) \|$, получаем) $\leq$

$$\leq \tilde{c}(y) \Big\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta y_n |\xi|^{\alpha_n}} \chi(y_n) dy_n |\tau|^{\beta_0 - \nu_j - n_k} \Big\| \int_{h}^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) \times$$

$$\times |\xi|^{\alpha_n + \alpha_n\beta_n - t_j - s_k + \alpha\beta} d\sigma \times \chi(x_n) \hat{f}_k(\tau, \xi, x_n), L_2(E_1) \Big\|, L_2(E_n) \Big\| +$$

$$+ \tilde{c}(y) \Big\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta y_n |\xi|^{\alpha_n}} \chi(-y_n) dy_n \cdot |\tau|^{\beta_0 - \nu_j - n_k} \Big\| \int_{h}^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) \times$$

$$\times |\xi|^{\alpha_n + \alpha_n\beta_n - t_j - s_k + \alpha\beta} d\sigma \chi(x_n) \hat{f}_k(\tau, \xi, x_n), L_2(E_1) \Big\|, L_2(E_n) \Big\| =$$

(вычисляя интегралы, получаем)

$$\leq \tilde{c}'(y) \Big\| |\tau|^{\beta_0 - \nu_j - n_k} \int_{h}^{h^{-1}} \sigma^{-1} G(\xi\sigma^{\alpha}) |\xi|^{\alpha_n\beta_n - t_j - s_k + \alpha\beta} d\sigma \hat{f}_k(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^{+}) \Big\|.$$

Рассмотрим возможные случаи:

1. Пусть $\gamma = \alpha_n\beta_n - t_j - s_k + \alpha\beta > 0$, $\nu_j = 0$, $-n_k \neq 0$, тогда, полагая $m_1 = \frac{\gamma - n_k}{\gamma}$, $m_2 = \frac{\gamma - n_k}{-n_k}$ и учитывая неравенства $-n_k m_2 = \gamma - n_k \leq -s_k - n_k$, $\gamma m_1 = \gamma - n_k \leq -s_k - n_k$, как в лемме 2, имеем

$$I_{\beta}^{jk} \leq \tilde{c}_1'(y) \Big(\big\| |\tau|^{-s_k - n_k} \hat{f}_k(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^{+}) \big\| +$$

$$+ \big\| |\xi|^{-s_k - n_k} \hat{f}_k(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^{+}) \big\| \Big).$$

Если $n_k = 0$, то

$$I_{\beta}^{jk} \leq \bar{c}_1(y) \big\| |\xi|^{-s_k} \hat{f}_k(\tau, \xi, x_n) L_2(E_{n+1}^{+}) \big\|.$$

Если $\nu_j \neq 0$, а $\beta_0 - \nu_j - n_k \leq 0$, то

$$I_{\beta}^{jk} \leq \tilde{c}_2(y) \big\| |\xi|^{1 - s_k} \hat{f}_k(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^{+}) \big\|.$$

Если $\nu_j \neq 0$, а $\beta_1 = \beta_0 - \nu_j - n_\kappa > 0$, то, полагая

$m_1 = \dfrac{\tau + \nu_j^{-1}\beta_1}{\tau}$, $m_2 = \dfrac{\tau + \nu_j^{-1}\beta_1}{\nu_j^{-1}\beta_1}$ и учитывая, что

$\tau m_1 = \tau + \nu_j^{-1}\beta_1 \leq -s_\kappa - n_\kappa$, $\beta_1 m_2 = \nu_j(\tau + \nu_j^{-1}\beta_1) \leq -\nu_j s_\kappa - n_\kappa$, получаем

$$I_\beta^{j\kappa} \leq \tilde{C}_3(y)\Big(\| |\xi|^{-s_\kappa - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\| +$$

$$+ \| |\tau|^{-\nu_j s_\kappa - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\|\Big).$$

2. Пусть $\tau = \alpha_n \beta_n - t_j - s_\kappa + \alpha\beta = 0$. Достаточно рассмотреть случай $\nu_j \neq 0$. Имеем

$$I_\beta^{j\kappa} \leq \tilde{C}_3(y) \| |\tau|^{t_j \nu_j - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\|.$$

3. Пусть $\tau = \alpha_n \beta_n - t_j - s_\kappa + \alpha\beta < 0$. Достаточно рассмотреть случай $\nu_j \neq 0$. При $\frac{|\alpha|}{2} > s_\kappa + t_j$ имеем

$$I_\beta^{j\kappa} \leq \tilde{C}_4(y)\Big(\| |\tau|^{t_j \nu_j - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\| +$$

$$+ \| |\tau|^{\beta_0 - \nu_j - n_\kappa} \int_1^{h^{-1}} \sigma^{-1-\alpha_n\beta_n + t_j + s_\kappa - \alpha\beta} G(\xi\sigma^\alpha) |\xi\sigma^\alpha|^{\alpha_n\beta_n - t_j - s_\kappa + \alpha\beta} \times$$

$$\times \hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\|\Big) \leq C_4(y)\Big(\| |\tau|^{t_j\nu_j - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\| +$$

$$+ \| |\tau|^{t_j \nu_j - n_\kappa} \| f_\kappa(\tau, x, x_n), L_1(\bar{E}_{n-1})\|, L_2(E_2^+)\| \times$$

$$\times \int_1^{h^{-1}} \sigma^{-1 - \frac{|\alpha|}{2} - \alpha_n\beta_n + t_j + s_\kappa - \alpha\beta} d\sigma\Big) \leq C_0(y)\Big(\| |\tau|^{t_j \nu_j - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n),$$

$$L_2(E_{n+1}^+)\| + \| |\tau|^{t_j\nu_j - n_\kappa} \| f_\kappa(\tau, x, x_n), L_1(E_{n-1})\|, L_2(E_2^+)\|\Big).$$

Если $\dfrac{|\alpha|}{2} + N_\kappa^* \alpha_{min} > \max\limits_{1 \leq j \leq \theta} t_j + s_\kappa \geq \dfrac{|\alpha|}{2} + (N_\kappa^* - 1)\alpha_{min}$,

$$N_\kappa^* \geq 1 \quad , \text{ и } \int\limits_{E_{n-1}} f_\kappa(\tau, x, x_n)\, x^\ell dx = 0, \quad 0 \leq |\ell| \leq N_\kappa^* - 1,$$

то

$$I_\beta^{j\kappa} \leq \tilde{C}_4(\gamma)\Big(\big\| |\tau|^{t_j\nu_j - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\big\| +$$

$$+ \int\limits_1^{h^{-1}} \sigma^{-1-\frac{|\alpha|}{2} - \alpha_n\beta_n + t_j + s_\kappa - \alpha\beta} \Big\| |\tau|^{t_j\nu_j - n_\kappa} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n\beta_n - t_j - s_\kappa + \alpha\beta} \times$$

$$\times \int\limits_{E_{n-1}} \prod_{i=1}^{N_\kappa^*} \left| \frac{\xi \ell_i}{\sigma^{\alpha \ell_i}} y_{\ell_i} \right| \times |f_\kappa(\tau, y, y_n)| dy,\ L_2(E_{n+1}^+)\Big\|\, d\sigma\Big) \leq$$

$$\leq \tilde{C}_4(\gamma)\Big(\big\| |\tau|^{t_j\nu_j - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau, \xi, x_n), L_2(E_{n+1}^+)\big\| +$$

$$+ \int\limits_1^{h^{-1}} \sigma^{-1-\frac{|\alpha|}{2} - \alpha_n\beta_n + t_j + s_\kappa - \alpha\beta - N_\kappa^*\alpha_{min}}\, d\sigma \times$$

$$\times \sum_{|\ell| \leq N_\kappa^*} \Big\| |\tau|^{t_j\nu_j - n_\kappa} \big\| y^\ell f_\kappa(\tau, y, y_n), L_1(E_{n-1})\big\|, L_2(E_2^+)\Big\|\Big).$$

Рассмотрим теперь случай

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \kappa}}^{\theta} s_i/\alpha_n + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\theta} t_i/\alpha_n + \beta_n = m.$$

Имеем

$$\mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n} \tilde{\ell}_{j\kappa}(\tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) = \sum_{\ell_n \leq m} a_{(\vec{\ell}, \ell_n)}^{j,\kappa}(\tau) \mathcal{D}_x^{\vec{\ell}} \mathcal{D}_{x_n}^{\ell_n}.$$

Тогда

$$I_\beta^{j\kappa} = (2\pi)^{1-n} \big\| |\tau|^{\beta_0} \Big[\int\limits_0^{x_n} \int\limits_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha| - 1 - \alpha_n - \alpha\beta - \alpha_n\beta_n + t_j + s_\kappa} \times$$

$$\times \int\limits_{E_{n-1}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^{\alpha}}} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n+\alpha_n\beta_n-t_j-s_k} \frac{(i\xi)^{\beta}}{P_m(\tau)2\pi} \int\limits_{\Gamma} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}} \times$$

$$\times \frac{(i\lambda)^{\beta_n}\tilde{\ell}_{jk}(\tau,i\xi',i\lambda)}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)} d\lambda f_k(\tau,y,y_n)\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n +$$

$$+ a^{jk}_{(\vec{0},m)}(\tau) \int\limits_{h}^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\alpha\beta} \int\limits_{E_{n-1}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^{\alpha}}} G(\xi) \times$$

$$\times \frac{(i\xi)^{\beta}}{P_m(\tau)} f_k(\tau,y,x_n)\,d\xi\,dy\,d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\infty}^{0} \int\limits_{h}^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1-\alpha_n+s_k+t_j-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n} \int\limits_{E_{n-1}} \int\limits_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^{\alpha}}} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n-s_k-t_j+\alpha_n\beta_n} \times$$

$$\times \frac{(i\xi)^{\beta}}{P_m(\tau)2\pi} \int\limits_{\Gamma} e^{\frac{i(x_n-y_n)}{\sigma^{\alpha_n}}\lambda|\xi|^{\alpha_n}} \frac{(i\lambda)^{\beta_n}\tilde{\ell}_{jk}(\tau,i\xi',i\lambda)}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)} d\lambda \times$$

$$\times f_k(\tau,y,y_n)\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n \Big],\quad L_2(E^+_{n+1})\Big\| \leq I_1+I_2+I_3 .$$

Оценки первого и третьего слагаемых проведены. Оценим второе слагаемое. Так как

$$\left|\frac{a^{jk}_{(\vec{0},m)}(\tau)}{P_m(\tau)}\right| = \left|\frac{a^{jk}_{(\vec{0},m)}(\tau)/\tau^{\,e-\nu_j-n_k}}{P_m(\tau)/\tau^{e}}\cdot\tau^{-\nu_j\;n_k}\right| \leq C(\gamma)|\tau|^{-\nu_j-n_k}$$

имеем

$$I_2 \leq C(\gamma)|\tau|^{-\nu_j-n_k}) \leq C_1(\gamma)\Big\||\tau|^{\beta_0-\nu_j-n_k}\int\limits_{h}^{h^{-1}}\sigma^{-1-\alpha\beta} \times$$

$$\times \int\limits_{E_{n-1}}\int\limits_{E_{n-1}} e^{i(x-y)\xi} G(\xi\sigma^{\alpha})(i\xi\sigma^{\alpha})^{\beta} f_k(\tau,y,x_n)\,d\xi\,dy\,d\sigma, L_2(E^+_{n+1})\Big\| =$$

(равенство Парсеваля в $L_2(E_{n-1})$)

$$= C_1(\gamma)\Big\||\tau|^{\beta_0-\nu_j-n_k}\int\limits_{h}^{h^{-1}}\sigma^{-1-\alpha\beta}G(\xi\sigma^{\alpha})(i\xi\sigma^{\alpha})^{\beta}\hat{f}_k(\tau,\xi,x_n)\,d\sigma, L_2(E^+_{n+1})\Big\| \leq$$

$$\leq C_2(\gamma)\left\| |\tau|^{\beta_0-\nu_j-n_\kappa} \int_h^{h^{-1}} v^{-1} G(\xi v^{\alpha}) |\xi|^{\alpha\beta} |\hat{f}_\kappa(\tau,\xi,x_n)| dv, L_2(E_{n+1}^+)\right\|.$$

Рассмотрим возможные случаи.

1) Если $\gamma = \alpha\beta > 0$ и $\beta_0 - \nu_j - n_\kappa \leq 0$, то

$$I_2 \leq C_3(\gamma)\left\| |\xi|^{1-s_\kappa} |\hat{f}_\kappa(\tau,\xi,x_n)|, L_2(E_{n+1}^+)\right\|.$$

2) Если $\gamma > 0$ и $\beta_0 - \nu_j - n_\kappa > 0$, $n_\kappa \neq 0$, $\nu_j = 0$, то, полагая $m_1 = \frac{\gamma - n_\kappa}{\gamma}$, $m_2 = \frac{\gamma - n_\kappa}{-n_\kappa}$ и, учитывая, что $\alpha\beta + \alpha_n\beta \leq t_j^1$, а $a_n\beta_n = t_j + s_\kappa$, $\alpha\beta \leq -s_\kappa$, как и ранее, имеем

$$I_2 \leq \tilde{C}_3(\gamma)\Big(\left\| |\xi|^{-s_\kappa - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau,\xi,x_n), L_2(E_{n+1}^+)\right\| +$$

$$+ \left\| |\tau|^{-s_\kappa - n_\kappa} \hat{f}_\kappa(\tau,\xi,x_n), L_2(E_{n+1}^+)\right\|\Big).$$

3) Если $\gamma > 0$, $\beta_1 = \beta_0 - \nu_j - n_\kappa > 0$, $\nu_j \neq 0$, то, полагая $m_1 = \frac{\gamma + \nu_j^{-1}\beta_1}{\gamma}$, $m_2 = \frac{\gamma + \nu_j^{-1}\beta_1}{\nu_j^{-1}\beta_1}$ и учитывая неравенства

$$\gamma m_1 = \alpha\beta + \nu_j^{-1}\beta_1 \leq -s_\kappa - n_\kappa,$$

$$\beta_1 m_2 = \nu_j(\alpha\beta + \nu_j^{-1}\beta_1) \leq -s_\kappa\nu_j - n_\kappa$$, получаем

$$I_2 \leq C_2'(\gamma)\Big(\left\| |\tau|^{-s_\kappa\nu_j - n_\kappa} |\hat{f}_\kappa(\tau,\xi,x_n)|, L_2(E_{n+1}^+)\right\| +$$

$$+ \left\| |\xi|^{-s_\kappa - n_\kappa} |\hat{f}_\kappa(\tau,\xi,x_n)|, L_2(E_{n+1}^+)\right\|\Big).$$

4) Если $\gamma = 0$, имеем

$$I_2 \leq C_2(\gamma)\left\| |\tau|^{-s_\kappa\nu_j - n_\kappa} |\hat{f}_\kappa(\tau,\xi,x_n)|, L_2(E_{n+1}^+)\right\|.$$

При

$$m+1 \leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\theta} s_i/\alpha_n + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\theta} t_i/\alpha_n + \beta_n \leq m - \frac{s_k}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} .$$

Оценки I_β^{jk} проводятся аналогично.

Из вышесказанного получаем оценку (6). Аналогичными рассуждениями получаем (7).

Лемма доказана.

Определим оператор $\longrightarrow$

$$\overrightarrow{R_1 \vec{f}} = \lim_{h\to 0} R_1^h \vec{f}, \tag{8}$$

здесь сходимость понимается в смысле $\widetilde{H}^{t,\nu}(E_{n+1}^+)$.

Область определения $\overrightarrow{R_1}$ совпадает с $\mathcal{L}^0(E_{n+1}^+)$.

Обозначим

$$(2\pi)^{1-n} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1+s_k-\delta_q} \int_{E_{n-1}} \int_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^\alpha}} G(\xi)|\xi|^{\alpha_n - s_k+\delta_q} \times$$

$$\times \frac{1}{P_m(\tau)2\pi} \int_{\Gamma^-} e^{-\frac{iy_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}} \frac{\sum_{j=1}^{\theta} b_{q,j}(\tau,i\xi',i\lambda)\tilde{\ell}_{jk}(\tau,i\xi',i\lambda)}{\tilde{L}(\tau,i\xi',i\lambda)} \times$$

$$\times f_k(\tau,y_1,y_n)\,d\xi\,dy\,d\sigma\,dy_n = f_{\varepsilon,q}(\tau,x) . \tag{9}$$

Определим оператор

$$\overrightarrow{\bar{R}^{h,\varepsilon}\vec{f}} = \begin{pmatrix} \bar{R}_1^{h,\varepsilon}\vec{f} \\ \bar{R}_2^{h,\varepsilon}\vec{f} \\ \vdots \\ \bar{R}_\theta^{h,\varepsilon}\vec{f} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{R}_j^{h,\varepsilon}\vec{f} = (2\pi)^{-n+1} \sum_{q=1}^{\mu} \int_h^{h^{-1}} \sigma^{-|\alpha|-1+\delta_q+t_j} \int_{E_{n-1}} \int_{E_{n-1}} e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^\alpha}} G(\xi) \times$$

$$\times|\xi|^{-\delta_q-t_j}\tau^{-\nu_j-p_q}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}e^{\frac{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}}\frac{N_{j,q}(\tau,i\xi',i\lambda)}{M^+(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda f_{\varepsilon,q}(\tau,y)d\xi dy d\sigma.$$

Замечание. Из определения оператора $\overrightarrow{\overline{R}^{h,\varepsilon}\vec{f}}$ следует, что

$$\mathcal{L}\overrightarrow{\overline{R}^{h,\varepsilon}\vec{f}}=0.$$

Лемма 5. *Если* $\vec{f}\in\mathcal{L}^0(E^+_{n+1})$, *то* $\overrightarrow{\overline{R}^{h,\varepsilon}\vec{f}}$ *голоморфна по* τ, $Re\,\tau>\gamma$, *и имеет место оценка*

$$\|\overrightarrow{\overline{R}^{h,\varepsilon}\vec{f}},\tilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})\|\leqslant c(\gamma)\|\vec{f},\mathfrak{M}^0(E^+_{n+1})\|. \tag{10}$$

При этом $\|\overrightarrow{\overline{R}^{h_1,\varepsilon_1}\vec{f}}-\overrightarrow{\overline{R}^{h_2,\varepsilon_2}\vec{f}},\tilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})\|\longrightarrow 0$ (11)

для $h_i\longrightarrow 0,\ \varepsilon_i\longrightarrow 0,\ i=1,2.$

Доказательство. Голоморфность $\overrightarrow{\overline{R}^{h,\varepsilon}\vec{f}}$ следует из голоморфности контурных интегралов.

Докажем оценку (10). Пусть $1\leqslant j\leqslant\theta$. Имеем

$$\||\tau|^{\beta_0}\mathcal{D}^{\beta_n}_{x_n}\mathcal{D}^{\beta}_{x}\overline{R}^{h,\varepsilon}_j\vec{f},L_2(E^+_{n+1})\|\leqslant$$

$$\leqslant(2\pi)^{-n+1}\sum_{q=1}^{\mu}\Big\||\tau|^{\beta_0}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-|\alpha|-1+\delta_q+t_j-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n}\times$$

$$\times\int_{E_{n-1}}\int_{E_{n-1}}e^{\frac{i(x-y)\xi}{\sigma^\alpha}}G(\xi)|\xi|^{-\delta_q-t_j}\tau^{-\nu_j-p_q}(i\xi)^\beta|\xi|^{\alpha_n\beta_n}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}e^{\frac{ix_n\lambda|\xi|^{\alpha_n}}{\sigma^{\alpha_n}}}\frac{(i\lambda)^{\beta_n}N_{j,q}(\tau,i\xi',i\lambda)}{M^+(\tau,i\xi',i\lambda)}d\lambda f_{\varepsilon,q}(\tau,y)d\xi dy d\sigma,L_2(E^+_{n+1})\Big\|\leqslant$$

(равенство Парсеваля в $L_2(E_{n-1})$ и оценка контурного интеграла)

$$\leqslant C_2(\gamma)\Big\||\tau|^{\beta_0-\nu_j-p_q}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1+\delta_q+t_j-\alpha\beta-\alpha_n\beta_n}G(\xi\sigma^\alpha)|\xi\sigma^\alpha|^{-\delta_q-t_j+\alpha_n\beta_n+\alpha\beta}\times$$

$$\times e^{-\delta x_n|\xi|^{\alpha_n}} |\hat{f}_{\delta,q}(\tau,\xi)|d\sigma, L_2(E^+_{n+1})\| \leqslant$$ (вычисляя преобразование Фурье $f_{\delta q}$ и учитывая оценку $|\hat{f}_{\delta,q}| \leqslant \bar{c}_1(y)\sum_{K=1}^{\theta}\int_0^\infty |\xi|^{\alpha_n - s_K+\delta_q}|\tau|^{\rho_q - n_K} \times e^{-\delta y_n|\xi|^{\alpha_n}}|\hat{f}_K(\tau,\xi,y_n)|dy_n$, получим)

$$\leqslant c_2(y)\sum_{K=1}^{\theta}\Big\||\tau|^{\rho_0-\nu_j-n_K}\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^\alpha)d\sigma|\xi|^{-t_j-s_K+\alpha\beta+\alpha_n\beta_n+\alpha_n}e^{-\delta x_n|\xi|^{\alpha_n}}\times$$

$$\times\int_0^\infty\hat{f}_K(\tau,\xi,y_n)e^{-\delta|\xi|^{\alpha_n}y_n}dy_n, L_2(E^+_{n+1})\Big\| \leqslant c_2(y)\sum_{K=1}^{\theta}\Big\||\tau|^{\rho_0-\nu_j-n_K}\times$$

$$\times\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^\alpha)|\xi|^{-t_j-s_K+\alpha\beta+\alpha_n\beta_n+\alpha_n}e^{-\delta x_n|\xi|^{\alpha_n}}\left(\int_0^\infty(\hat{f}_K(\tau,\xi,y_n))^2dy_n\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\int_0^\infty e^{-2\delta|\xi|^{\alpha_n}y_n}dy_n\right)^{\frac{1}{2}}, L_2(E^+_{n+1})\Big\| \leqslant \tilde{c}_2(y)\sum_{K=1}^{\theta}\Big\||\tau|^{\rho_0-\nu_j-n_K}\times$$

$$\times\int_h^{h^{-1}}\sigma^{-1}G(\xi\sigma^\alpha)d\sigma|\xi|^{-t_j-s_K+\alpha\beta+\alpha_n\beta_n}\hat{f}_K(\tau,\xi,y_n), L_2(E^+_{n+1})\Big\|.$$

Оценка этого интеграла уже проводилась в лемме 4.

Лемма доказана.

Определим оператор

$$\overrightarrow{\overline{\overline{R}}f} = \lim_{h,\delta\to 0}\overrightarrow{\overline{\overline{R}}^{h,\delta}f}, \qquad (12)$$

здесь сходимость понимается в смысле $\tilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})$.

Область определения оператора совпадает с $\mathcal{L}^0(E^+_{n+1})$.

Определим теперь оператор

$$\vec{R}(\vec{f},\vec{\varphi}) = \overrightarrow{R_1 f} + \overrightarrow{\overline{\overline{R}}f} + \overrightarrow{\tilde{R}\varphi},$$

действующий из пространства $\mathcal{L}^0(E^+_{n+1})\times\mathcal{L}^1(E_n)$ в $\tilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})$, где операторы $\vec{\overline{\overline{R}}}, \vec{R}_1, \vec{\overline{R}}$ определены в (5), (8), (12) соответственно.

Лемма 6. *Если*

$$\vec{f}\in\mathcal{L}^0(E^+_{n+1}),\quad \vec{\varphi}\in\mathcal{L}^1(E_n),$$

то

$$\mathcal{L}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{R}(\vec{f},\vec{\varphi})=\vec{f}, \tag{13}$$

$$B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{R}(\vec{f},\vec{\varphi})\Big|_{x_n=0}=\vec{\varphi}, \tag{14}$$

где равенство понимается в смысле L_2.

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{L}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\left[\overrightarrow{R_1^h\vec{f}}+\overrightarrow{\overline{R}^{h,\delta}\vec{f}}+\overrightarrow{\tilde{R}^h\vec{\varphi}}\right]=\mathcal{L}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\overrightarrow{R_1^h\vec{f}}$$

и из леммы 3 получаем равенство (13). Покажем (14). Имеем

$$B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\left[\overrightarrow{R_1^h\vec{f}}+\overrightarrow{\overline{R}^{h,\delta}\vec{f}}+\overrightarrow{\tilde{R}^h\vec{\varphi}}\right]\Big|_{x_n=0}=B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\overrightarrow{R_1^h\vec{f}}\Big|_{x_n=0}+$$

$$+B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\overrightarrow{\overline{R}^{h,\delta}\vec{f}}\Big|_{x_n=0}+B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\overrightarrow{\tilde{R}^h\vec{\varphi}}\Big|_{x_n=0}.$$

В силу определения операторов $\overrightarrow{R_1^h\vec{f}}$, $\overrightarrow{\overline{R}^{h,\delta}\vec{f}}$ и условия 7), имеем:

$$\left\|B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\overrightarrow{R_1^h\vec{f}}\Big|_{x_n=0}+B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\overrightarrow{\overline{R}^{h,\delta}\vec{f}}\Big|_{x_n=0},L_2\right\|\longrightarrow 0$$

при $h,\delta\longrightarrow 0$. Следовательно, (14) вытекает из леммы 1.

Лемма доказана.

Итак, функция $v=R(\vec{f},\vec{\varphi})$ является решением задачи (2). Доказательство единственности аналогично [11].

Теорема 2 доказана.

Оператор $R(\vec{f},\vec{\varphi})$ является обратным к вектору-оператору

$$A=\left\{\mathcal{L}(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n}),\ B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\Big|_{x_n=0}\right\}.$$

§3. Решение смешанной задачи с переменными коэффициентами

Рассмотрим задачу с параметром τ, $Re\,\tau>\gamma$, для системы с переменными коэффициентами:

$$\mathcal{L}(\bar{x},\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{v} = \vec{F}(\tau,x,x_n),$$
$$B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{v}\Big|_{x_n=0} = \vec{\varphi}(\tau,x). \qquad (15)$$

Для задачи (15) имеет место

Теорема 4. *Пусть операторы* $\mathcal{L}(\bar{x},\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_{\bar{x}})$ *и* $B(\mathcal{D}_{x_0},\mathcal{D}_{\bar{x}})$ *удовлетворяют условиям теоремы 2,* $\vec{F}\in\mathcal{M}^{o}(E^{+o}_{n+1})$, $\vec{\varphi}\in\mathcal{L}^2(E_n)$. *Если* $\frac{|\alpha|}{2}\leq 1$*, то предположим, что выполнено дополнительное условие: при* $\frac{|\alpha|}{2}-N^*\alpha_{min}>1\geq\frac{|\alpha|}{2}+(N^*-1)\alpha_{min}$ *справедливо*

$$\int\limits_{E_{n-1}} x^{\ell}\Big[\vec{F}-\Delta\mathcal{L}\overrightarrow{\tilde{R}\vec{\varphi}}+\sum_{i=1}^{\infty}\big[-\Delta\mathcal{L}R'(x_0)\big]^{i}(\vec{F}-\Delta\mathcal{L}\overrightarrow{\tilde{R}\vec{\varphi}})\Big]dx=0,\ |\ell|\leq N^*-1,$$

где $\Delta\mathcal{L}=\mathcal{L}(\bar{x},\tau,\mathcal{D}_{\bar{x}})-\mathcal{L}(\bar{x}^{o},\tau,\mathcal{D}_{\bar{x}})$, $R(\bar{x}^o)<\vec{f},\vec{\varphi}>=R'(\bar{x}^o)\vec{f}+\overrightarrow{\tilde{R}(\bar{x}^o)}\vec{\varphi}$ *– оператор, обратный к* $A(\bar{x}^o)$, $\bar{x}^o\notin K$. *Тогда краевая задача (15) имеет единственное решение* $\vec{V}\in\tilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})$ *и выполняется оценка*

$$\|\vec{V},\tilde{H}^{t,\nu}(E^+_{n+1})\|\leq c(\gamma,K)\Big[\|\vec{F},\mathcal{M}^{o}(E^+_{n+1})\|+\|\vec{\varphi},\mathcal{M}^{2}(E_n)\|\Big].$$

Константа $c(\gamma,K)$ *зависит от* γ *и* $diam\,K$.

Следствие. *Из теоремы 4 и обобщенной теоремы Пэли-Винера получаем утверждение теоремы 2.*

Для доказательства теоремы 4 применим методику, проведенную для уравнения в [7]. Используя оператор $R(\bar{x}^o)$, построенный в §2, сведем решение краевой задачи (15) к решению операторного уравнения

$$(I+T)<\vec{f},\vec{\varphi}> = <\vec{F},\vec{\varphi}>.$$

Пусть $\bar{x}^o\notin K$.

Имеем

$$\mathcal{L}(\bar{x},\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\overrightarrow{R(\bar{x}^o)}<\vec{f},\vec{\varphi}> = \mathcal{L}(\bar{x}^o,\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{R}(\bar{x}^o)<\vec{f},\vec{\varphi}> +$$

$$+\Big[\mathcal{L}(\bar{x},\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})-\mathcal{L}(\bar{x}^o,\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\Big]\vec{R}(\bar{x}^o)<\vec{f},\vec{\varphi}> -$$

$$= \langle \vec{f}, \vec{\varphi} \rangle + \left(\mathcal{L}(\bar{x}, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) - \mathcal{L}(\bar{x}^\circ, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) \right) \vec{R}(\bar{x}^\circ) \langle \vec{f}, \vec{\varphi} \rangle =$$

$$= (\vec{I} + \vec{T}_0) \langle \vec{f}, \vec{\varphi} \rangle = \vec{F},$$

$$B(\tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) \vec{R}(\bar{x}^\circ) \langle \vec{f}, \vec{\varphi} \rangle \Big|_{x_n = 0} = \vec{\varphi},$$

$$\vec{T}_0 = \left(\mathcal{L}(\bar{x}, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) - \mathcal{L}(\bar{x}^\circ, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) \right) \vec{R}(\bar{x}^\circ) = \begin{pmatrix} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_\theta \end{pmatrix},$$

$$T_i \langle \vec{f}, \vec{\varphi} \rangle = \sum_{j=1}^{\theta} \Big(\ell_{ij}(\bar{x}, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) -$$

$$- \ell_{ij}(\bar{x}^\circ, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) \Big) \left(\tilde{R}_j \vec{\varphi} + R_{1,j} \vec{f} + \bar{R}_j \vec{f} \right),$$

где $\tilde{R}_j$, $R_{1,j}$, $\bar{R}_j$ – j-е компоненты операторов $\vec{\tilde{R}}$, $\vec{R}_1$, $\vec{\bar{R}}$ соответственно.

Итак, $A(\bar{x}) \circ \vec{R}(\bar{x}^\circ) = I + T$.

Докажем, что норма оператора T мала в пространстве $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}^0(E^+_{n+1}) \times \mathfrak{M}^2(E_n)$. Полагаем по определению

$$\| \langle \vec{G}, \vec{\varphi} \rangle, \overline{\mathfrak{M}} \| = \| \vec{G}, \mathfrak{M}^0(E^+_{n+1}) \| + \| \vec{\varphi}, \mathfrak{M}^2(E_n) \|.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^{\theta} \left(\ell_{ij}(\bar{x}, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) - \ell_{ij}(\bar{x}^\circ, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\theta} \sum_{p, \beta, \tilde{\kappa}} \left(a_{ij}^{p,\beta,\tilde{\kappa}}(\bar{x}) - a_{ij}^{p,\beta,\tilde{\kappa}}(\bar{x}^\circ) \right) \tau^p \mathcal{D}_x^{\tilde{\beta}} \mathcal{D}_{x_n}^{\tilde{\kappa}},$$

здесь $p \le \nu_j$, $\alpha \tilde{\beta} + \alpha_n \tilde{\kappa} = t_j \le 1$.

Предполагаем, что коэффициенты дифференциальных операторов матрицы мало отличаются от постоянных и стабилизируются вне компакта K, а все производные от коэффициентов достаточного порядка мало отличаются от нуля.

Обозначим

$$d = \sup_{\bar{x}} \sum_{p,\beta,\kappa,\bar{\beta}} \left| \mathcal{D}_x^{\bar{\beta}} \left(a_{p,\beta,\kappa}(\bar{x}) - a_{p,\beta,\kappa}(\bar{x}^\circ) \right) \right|.$$

Лемма 6. *Для оператора* T_0 *имеет место оценка*

$$\| T_0 < \vec{f}, \vec{0} > , \mathfrak{M}^0(E^+_{n+1}) \| \leq dc(\gamma, \kappa) \| \vec{f}, \mathfrak{M}^0(E^+_{n+1}) \| .$$

Доказательство. Пусть $1 \leq i \leq \theta$ произвольно. Поскольку $supp(a_{ij}^{\rho,\beta,\kappa}(\bar{x}) - a_{ij}^{\rho,\beta,\kappa}(\bar{x}^0)) \subset K$, то достаточно оценить

$\| |\tau|^{\beta_0} \mathcal{D}_x^{\beta} \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n} T_i < \vec{f}, \vec{0} > , L_{2,\gamma} \|$, где $\beta_0 \nu_0^{-1} + \beta\alpha + \beta_n \alpha_n = 1$ (так как $s_\kappa = n_\kappa = 0$, $\max\limits_{1 \leq j \leq \theta} t_j = 1$).

Имеем

$$\| |\tau|^{\beta_0} \mathcal{D}_x^{\beta} \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n} T_i < \vec{f}, \vec{0} >, L_{2,\gamma} \| = \| |\tau|^{\beta_0} \mathcal{D}_x^{\beta} \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n} \sum_{j=1}^{\theta} \times$$

$$\times (\ell_{ij}(\bar{x}, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}) - \ell_{ij}(\bar{x}^0, \tau, \mathcal{D}_x, \mathcal{D}_{x_n}))(R_{1,j}\vec{f} + \bar{R}_j \vec{f}), L_{2,\gamma} \| \leq$$

$$\leq cd \sum_{j=1}^{\theta} \sum_{\alpha\beta + \alpha_n \beta_n + \beta_0 \nu_0^{-1} \leq 1} \sum_{\rho, \tilde{\beta}, \tilde{\kappa}} \| |\tau|^{\beta_0 + \rho} \mathcal{D}_x^{\tilde{\beta} + \beta} \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n + \tilde{\kappa}} \times$$

$$\times (R_{1,j} \vec{f} + \bar{R}_j \vec{f}), L_{2,\gamma} \| ; \ \rho \leq \nu_j, \ \alpha\tilde{\beta} + \alpha_n \tilde{\kappa} = t_j ,$$

т.е. $\beta_0 \nu_0^{-1} + \alpha(\beta + \tilde{\beta}) + \alpha_n(\beta_n + \tilde{\kappa}) \leq 1 + t_j$.

Поэтому для оценки

$$\| |\tau|^{\beta_0 + \rho} \mathcal{D}_x^{\tilde{\beta} + \beta} \mathcal{D}_{x_n}^{\beta_n + \tilde{\kappa}} (R_{1,j} \vec{f} + \bar{R}_j \vec{f}), L_{2,\gamma} \|$$

достаточно проследить выкладки в леммах 4,5.

Лемма 7. *Имеет место оценка*

$$\| T_0 < \vec{0}, \vec{\varphi} >, \mathfrak{M}^0(E^+_{n+1}) \| \leq dc(\gamma, \kappa) \| \vec{\varphi}, \mathfrak{M}^2(E_n) \| .$$

Доказательство аналогично предыдущей лемме.

Из лемм 6 и 7 получаем оценку

$$\| T < \vec{f}, \vec{\varphi} > \overline{\mathfrak{M}} \| \leq dc(\gamma, \kappa) \| < \vec{f}, \vec{\varphi} > , \overline{\mathfrak{M}} \| .$$

Следовательно, при малом d $\| T \|$ мала, и оператор $I + T$ о ратим в пространстве $\mathfrak{M}$.

Если $\vec{F} \in \mathfrak{M}_0(E^+_{n+1})$ и $\vec{\varphi} \in \mathfrak{M}^2(E_n)$, то из операторного уравнения находим

$$<\vec{f},\vec{\varphi}> = (I+T)^{-1} <\vec{F},\vec{\varphi}>. \qquad (16)$$

Если $\frac{|\alpha|}{2} > 1$, то область определения оператора $R(\bar{x}^0)$ совпадает с $\mathfrak{M}^0(E^+_{n+1}) \times \mathcal{L}^2(E_n)$ и решение получаем в виде $\vec{V} = R(\bar{x}^0)(I+T)^{-1}<\vec{F},\vec{\varphi}>$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\frac{|\alpha|}{2} \leq 1$.

Пусть $\vec{\varphi} = \vec{0}$ и $R'(\bar{x}^0)\vec{f} = \vec{R}_1 \vec{f} + \bar{R}f$. Имеем

$$\mathcal{L}(\bar{x},\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})R(\bar{x}^0)<\vec{f},\vec{0}> = \mathcal{L}(\bar{x},\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})R'(x_0)\vec{f} =$$

$$= (I + \Delta\mathcal{L}R'(\bar{x}^0))\vec{f} = \vec{F},$$

$$B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})R(\bar{x}^0)<\vec{f},\vec{0}>\Big|_{x_n=0} = \vec{0}.$$

Из (16) получаем

$$\vec{f} = \vec{F} + \sum_{i=1}^{\infty}\left[-\Delta\mathcal{L}R'(\bar{x}^0)\right]^i \vec{F} \in \mathfrak{M}^0(E^+_{n+1}).$$

Если выполнены условия:

$$\int\limits_{E_{n-1}} \left[\vec{F} + \sum_{i=1}^{\infty}\left[-\Delta\mathcal{L}R'(\bar{x}^0)\right]^i\vec{F}\right]\cdot x^\ell dx = 0, \quad |\ell| \leq N^* - 1,$$

то оператор $R(\bar{x}^0)$ определен на $<\vec{f},\vec{0}>$, следовательно, функция $\gamma = R(\bar{x}^0)\cdot(I+T)^{-1}<\vec{F},\vec{0}>$ является решением задачи (15).

Рассмотрим теперь случай $\vec{\varphi} \neq \vec{0}$. Делая замену $\vec{v} = \vec{\omega} + \vec{\tilde{R}}\vec{\varphi}$, получаем задачу

$$\mathcal{L}(\bar{x},\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{\omega} = \vec{F}^* = \vec{F} - \Delta\mathcal{L}\vec{\tilde{R}}\vec{\varphi},$$

$$B(\tau,\mathcal{D}_x,\mathcal{D}_{x_n})\vec{\omega}\Big|_{x_n=0} = \vec{0}.$$

Из предыдущего следует: если $\vec{F} \in \mathfrak{M}^0(E^+_{n+1})$, $\vec{\varphi} \in \mathcal{L}^2(E_n)$ и выполнены условия

$$\int\limits_{E_{n-1}} x^\ell\left[\vec{F}^* + \sum_{i=1}^{\infty}\left[-\Delta\mathcal{L}R'(\bar{x}^0)\right]^i\vec{F}^*\right]dx = 0,$$

$$|\ell| \leqslant N^*-1, \quad \frac{|\alpha|}{2}+N^*\alpha_{min} > 1 \geqslant \frac{|\alpha|}{2}+(N^*-1)\alpha_{min},$$

то функция

$$\vec{V} = R'(\bar{x}^0) \circ \left(I + \Delta \mathcal{L} R'(\bar{x}^0)\right)^{-1} \vec{F}^* + \overrightarrow{\tilde{R}\vec{\Phi}}$$

является решением задачи (15) из класса $\tilde{H}^{t,v}(E^+_{n+1})$. Правый обратный оператор $R(\bar{x})$ будет и левым обратным. Доказательство проводится аналогично [7].

Теорема 4 доказана.

В заключении автор выражает благодарность профессору С.В.Успенскому за научное руководство.

Литература

1. Соболев С.Л. Об одной задаче математической физики.- Изв.АН СССР. Серия мат., 1954, т.18, №1, с.3-50.

2. Дезин А.А., Масленникова В.Н. Неклассические граничные задачи.- В кн.: Дифференциальные уравнения. Труды симпозиума. М., Наука, 1970, с.85-95.

3. Kreiss H.O. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. - Comm.Pure and Appl.Math., 1970, v.23, № 3, p. 277-298.

4. Масленникова В.Н. Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для системы Соболева.- Сиб.мат.журн., 1968, т.9, №5, с.1182-1198.

5. Вишик М.И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения.- Мат. сб., 1956, т.39, №1, с.51-148.

6. Успенский С.В., Демиденко Г.В. О дифференциальных свойствах решений общих краевых задач для уравнений типа Соболева.- В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики.М. Наука, 1978, с.276-296.

7. Демиденко Г.В. О смешанных краевых задачах для уравнений типа Соболева с переменными коэффициентами.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л.Соболева), Новосибирск, 1979, №2, с.52-91.

8. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.- Успехи мат.наук, 1964, т.19, вып.3,

с.53-161.

9. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границ.- М.: ИЛ, 1963.- 264 с.

10. Эйдельман С.Д. О фундаментальных решениях параболических систем.- М сб., ч.1, 1956, т.38, №1, с.51-92; ч.2, 1961, т.53, №1, с.73-135.

11. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических сист дифференциальных уравнений общего вида.- Тр.мат.ин-та АН СССР, 1965, т.83, с.25-36.

12. Успенский С.В. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов.- Тр. Мат.ин-та АН СССР,1972,т.117,с.292-

13. Успенский С.В. Об общих краевых задачах для одного класса неклассич ких уравнений.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функциона ного анализа. Материалы школы-конференции. Новосибирск, 1975, с.221-23

14. Янов С.И. О некоторых краевых задачах в полупространстве.- В кн.: Материалы 13 Всесоюзной научной студенческой конференции. Новосибирск,19 с.52.