УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р.С.Сакс (Новосибирск)

Настоящая статья является продолжением работы [1], где был введен и изучен класс обобщенно-эллиптических систем дифференциальных уравнений, содержащий в себе системы, эллиптические по Дуглису-Ниренбергу. В отличие от последних этот класс не зависит от выбора исходного порядка строк и столбцов оператора системы, а также от вида, в котором записана система. На примерах нетрудно убедиться, что, используя это свойство, можно получить нётеровость краевой задачи в различных пространствах. В [1] была доказана гипоэллиптичность обобщенно-эллиптического оператора с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, аналитическая гипоэллиптичность операторов с аналитическими коэффициентами, а также были сформулированы основные теоремы о нормальной разрешимости (нётеровости) оператора краевой задачи на многообразии с краем.

Целью настоящей статьи является доказательство этих теорем. Иллюстрация полученных из них результатов для различных систем уравнений математической физики, таких как системы Максвелла, Стокса, кристаллооптики и других, в стационарном случае, когда описываемые процессы зависят от времени по закону $e^{i\omega t}$, будет приведена в отдельной работе. Для краткости мы не будем повторять определений и обозначений [1], кроме основных, необходимых для понимания текста.

Статья состоит из двух параграфов. В § 1 формулируются основные результаты [3-5] с некоторыми дополнениями, необходимыми нам для дальнейшего. В § 2 доказываются основные теоремы.

§ 1. Алгебра операторов Грина

В этом параграфе кратко излагаются основные результаты работы [3] с некоторыми дополнениями, необходимыми нам для дальнейшего.

Пусть Ω - многообразие класса C^∞ с границей Γ и E, E' (соответственно F, F') - векторные расслоения на Ω (соответственно на Γ). В [3] изучаются операторы вида

$$A = \begin{pmatrix} P^{\Omega} + G & K \\ & \\ T & Q \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^{\infty}(\bar{\Omega}, E) & & C^{\infty}(\bar{\Omega}, E'), \\ \oplus & \longrightarrow & \oplus \\ C^{\infty}(\Gamma, F) & & C^{\infty}(\Gamma, F'), \end{matrix} \tag{1}$$

называемые операторами Грина, которые содержат, в частности, операторы, описывающие классические граничные задачи, а также их регуляризаторы (параметриксы) в эллиптическом случае. Матрица (1) состоит из следующих элементов:

P - псевдодифференциальный (п.д.) оператор, удовлетворяющий условию трансмиссии (таковыми являются, в частности, дифференциальные операторы и их регуляризаторы в эллиптическом случае), $P^{\Omega}u \equiv Pu_0 |_{\Omega}$, где $u_0 = \pi_0 u$ - продолжение u нулем вне Ω;

G - сингулярный оператор Грина, который переводит обобщенные функции в функции класса $C^{\infty}(\Omega)$, но может не быть регулярным вблизи границы. Такие операторы возникают, например, при описании вариации решения эллиптической краевой задачи, когда изменяются краевые условия;

K - в матрице (1) оператор Пуассона. Он возникает, в частности, при определении решения однородного уравнения $Pu = 0$, где P - эллиптический (псевдо) дифференциальный оператор в терминах граничных значений;

T - оператор следа, представляющий сумму оператора, сопряженного оператору Пуассона, и классических операторов следа $Q\left(\frac{\partial^k f}{\partial \nu^k}\Big|_{\Gamma}\right)$, где Q - п.д. оператор на границе и $\partial f/\partial \nu$ - нормальная производная.

Наконец, Q - это п.д. оператор на границе.

Семейство операторов Грина образует алгебру, так как сумма и композиция двух матриц вида (1) является матрицей того же вида.

Мы пользуемся этим свойством операторов Грина при рассмотрении композиции одной эллиптической краевой задачи для дифференциального оператора с регуляризатором другой такой задачи. В полупространстве $\Omega = R^n_+$ с границей $\Gamma: x' \in R^{n-1}, x_n = 0,$ на финитных функциях эти операторы (с точностью до сглаживающих операторов) определяются следующим образом:

$$P^{\Omega}u = \begin{cases} F^{-1}_{\xi \to x}\, p(x,\xi) F_{x \to \xi}\, u(x), \operatorname{supp} u \subset \Omega, \\ F^{-1}_{\xi \to x}\, h^+_{\xi_n} \left[p(x,\xi) F_{x \to \xi}\, u_0(x) \right], x = (x', 0) \in \Gamma, \end{cases} \tag{2}$$

где $h^+_{\xi_n} g(x, \xi', \xi_n)$ - аналитическое продолжение функции $g(\xi_n)$ в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_n < 0$; $u_0 \equiv \pi_0 u = u$ при $x_n \geq 0$ и равно 0 при $x_n < 0$. Оператор P^Ω удовлетворяет условию трансмиссии относительно границы, если функция $p(x,\xi)$ (в скалярном случае) и любая ее производная по x на границе Γ допускают разложение в ряд

$$(\partial/\partial x)^\alpha p(x,\xi)\Big|_{x_n=0} = \sum_{s=0}^{d} \alpha_s(x',\xi')\xi_n^s +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x',\xi') \frac{(<\xi'> - i\xi_n)^k}{(<\xi'> + i\xi_n)^{k+1}}, \qquad (3)$$

где $\alpha_s \in S_{1,0}^{d-s}$ и a_k - быстро убывающая последовательность в $S_{1,0}^{d+1}$ (см.[6]), $<\xi'> = (1+|\xi'|^2)^{1/2}$. Тогда оператор P^Ω имеет порядок d, а его главный символ - это однородная часть $p(x,\xi)$ степени d при достаточно больших $|\xi|$. Такой оператор непрерывен в пространстве $P^\Omega : C_0^\infty(\bar\Omega) \longrightarrow C^\infty(\bar\Omega)$ и продолжается до непрерывного оператора, действующего в пространствах Соболева $P^\Omega : H^s_{comp}(\bar\Omega) \longrightarrow H^{s-d}_{loc}(\bar\Omega)$ для любого действительного $s > -1/2$.

Матричный оператор P^Ω имеет векторный порядок (p,t), если порядки операторов P^Ω_{ij}, составляющих матрицу P^Ω, не превосходят чисел $p_i + t_j$ (p_i и t_j - компоненты векторов p и t). Такой оператор непрерывен в пространствах

$$P^\Omega : H^{s+t}_{comp}(\bar\Omega) \longrightarrow H^{s-p}_{loc}(\bar\Omega) \quad \forall s : s+t > -\frac{1}{2}, \qquad (4)$$

т.е. число s таково, что $s + t_j > -\frac{1}{2}$ для любых j.

Пусть $k(x',\xi)$- функция класса C^∞ на $R^{n-1} \times R^n$, допускающая разложение в ряд

$$k(x',\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(x',\xi') \frac{(<\xi'> - i\xi_n)^p}{(<\xi'> + i\xi_n)^{p+1}}, \qquad (5)$$

где a_p - быстро убывающая последовательность в $S_{1,0}^{d}$. Тогда скалярный оператор Пуассона K порядка d в пространствах $K : C_0^\infty(\Gamma) \to C^\infty(\bar\Omega)$ определяется как

$$Kv(x) = F^{-1}_{\xi\to x}\, k(x',\xi)\, F'_{x'\to\xi'}\, v(x'). \qquad (6)$$

Аналогично предыдущему главная часть оператора K определяется главной однородной частью $k(x,\xi)$ по ξ степени $d-1$ при $|\xi|>R$.

Оператор Пуассона продолжается до непрерывного оператора K: $H^{s-1/2}_{comp}(\Gamma)\to H^{s-d}_{loc}(\bar\Omega)$ для любого действительного s. Поэтому, уточняя определение порядка, мы скажем, что такой оператор Пуассона K имеет в пространствах H^s порядок $d-\frac{1}{2}$.

Матричный оператор Пуассона K имеет в H^s векторный порядок $(p,\ k-\frac{1}{2})$, если порядки его элементов K_{ij} не превосходят чисел $p_i+k_j-\frac{1}{2}$. Тогда он продолжается до непрерывного оператора

$$K: H^{s+k-\frac{1}{2}}_{comp}(\Gamma)\longrightarrow H^{s-p}_{loc}(\bar\Omega) \qquad \forall s\in R^1. \qquad (7)$$

Пусть P - п.д. оператор, определенный в окрестности $\bar\Omega$ и удовлетворяющий условию трансмиссии. Тогда оператор

$$K_P v(x)\equiv P\left(v(x')\,\delta(x_n)\right)\Big|_{R^n_+} : C^\infty_0(\Gamma)\longrightarrow C^\infty(\bar\Omega) \qquad (8)$$

является оператором Пуассона.

Имеет место и обратное утверждение: любой оператор Пуассона можно представить в виде (8) (см.[3]). Пусть $t(x',\xi)$ - функция класса C^∞ на $R^{n-1}\times R^n$, допускающая следующее разложение в ряд:

$$t(x',\xi) = \sum_{s=0}^{r-1}\alpha_s(x',\xi')\,\xi_n^s + \sum_{p=0}^{\infty} a_p(x',\xi')\,\frac{(\langle\xi'\rangle+i\xi_n)^p}{(\langle\xi'\rangle-i\xi_n)^{p+1}}, \qquad (9)$$

где $\alpha_s\in S^{d-s}_{1,0}$ и a_p - быстро убывающая последовательность в $S^{d+1}_{1,0}$. Скалярный оператор следа T порядка d и класса r в пространствах $T: C^\infty_0(\bar\Omega)\longrightarrow C^\infty(\Gamma)$ определяется как

$$Tu(x') = (F'_{\xi'\to x'})^{-1} \int^{+} t(x',\xi)\tilde{u}_0(\xi)d\xi_n, \tag{10}$$

где $\int^{+} = \int_{\gamma_+}$, γ_+ - окружность большого радиуса, лежащая в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\xi_n > 0$, $\tilde{u}(\xi) = F_{x\to\xi}\, u(x)$.

Главная часть оператора T определяется главной однородной частью $t(x',\xi)$ по ξ степени d при $|\xi| > R$. Оператор следа продолжается до непрерывного оператора $T: H^s_{comp}(\bar{\Omega}) \to H^{s-d-\frac{1}{2}}_{loc}(\Gamma)$ для любого $s > r - \frac{1}{2}$. Поэтому, уточняя определение порядка, мы скажем, что такой оператор следа имеет в пространствах H^s порядок $d + \frac{1}{2}$.

Матричный оператор следа T класса r имеет в H^s порядок $(q+\frac{1}{2}; t)$, если порядки его элементов T_{ij} не превосходят чисел $q_i + t_j + \frac{1}{2}$. Тогда он продолжается до непрерывного оператора

$$T: H^{s+t}_{comp}(\bar{\Omega}) \to H^{s-q-\frac{1}{2}}_{loc}(\Gamma) \quad \forall s > r - t - \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Имеет место следующее

Утверждение. *Оператор T является оператором следа тогда и только тогда, когда он может быть записан в виде*

$$Tu = \sum_{i=1}^{m} Q_i\left(P_i^{\Omega} \cdot u|_{\Gamma}\right), \tag{12}$$

где Q_i - п.д. операторы на Γ, P_i^{Ω} - п.д. операторы на Ω, удовлетворяющие условию трансмиссии [3].

Наконец, пусть $g(x',\xi',\xi_n,\eta_n) \in C^\infty(R^{n-1}\times R^{n-1}\times R\times R)$ допускает разложение в ряд

$$g(x',\xi',\xi_n,\eta_n) = \sum_{0}^{r-1} k_s(x',\xi',\xi_n)\eta_n^s + $$
$$+ \sum_{p,q\geq 0} a_{pq}(x',\xi') \frac{(\langle\xi'\rangle - i\xi_n)^p}{(\langle\xi'\rangle + i\xi_n)^{p+1}} \frac{(\langle\xi'\rangle + i\eta_n)^q}{(\langle\xi'\rangle - i\eta_n)^{q+1}}, \tag{13}$$

где k_s - символы операторов Пуассона порядков $d - s$; a_{pq} - быстро убывающая двойная последовательность в $S^{d+1}_{1,0}$.

Скалярный сингулярный оператор Грина G порядка d, и класса

τ в пространствах $G : C_0^\infty(\bar\Omega) \to C^\infty(\bar\Omega)$ определяется как

$$Gu(x) = F^{-1}_{\xi\to x} \int^+ g(x', \xi', \xi_n, \eta_n)\tilde u_0(\xi', \eta_n) d\eta_n . \qquad (14)$$

Главная часть оператора G определяется главной однородной частью $g(x', \xi, \eta_n)$ по (ξ, η_n) степени d при $|\xi|^2 + \eta_n^2 > R$. Он продолжается до непрерывного оператора в пространствах

$$G : H^s_{comp}(\bar\Omega) \to H^{s-d}_{loc}(\bar\Omega) \quad \text{для любого } s > \tau - \frac{1}{2}.$$

Матричный сингулярный оператор Грина класса τ имеет векторный порядок (p, t), если порядки его элементов G_{ij} не превосходят чисел $p_i + t_j$. Такой оператор непрерывен в пространствах

$$G : H^{s+t}_{comp}(\bar\Omega) \to H^{s-p}_{loc}(\bar\Omega) \qquad \forall s > \tau - \frac{1}{2}. \qquad (15)$$

Эквивалентно следующее определение сингулярного оператора Грина (14): существуют две последовательности операторов Пуассона K_j порядка d и операторов следа T_j нулевого порядка и класса τ такие, что $G - \sum K_j T_j$ является бесконечно сглаживающим оператором Грина [3].

Все определенные выше операторы инвариантны относительно замены переменных, сохраняющей границу, поэтому они определяются также на гладких сечениях векторных расслоений на бесконечно дифференцируемом многообразии $\bar\Omega$ с краем Γ (см. [4]). При этом остаются справедливыми утверждения о непрерывности операторов (4), (7), (11), (15).

Мы скажем, что оператор Грина (1) имеет в H^s порядок $(p, q+1/2;$ $t, k-1/2)$, если операторы $P^\Omega + G, T, K$ и Q имеют в H^s порядки (p, t), $(q+1/2, t)$, $(p, k-1/2)$ и $(q+1/2, k-1/2) = (q, k)$ соответственно (очевидно, векторный порядок оператора A определяется неоднозначно).

Такой оператор Грина на компактном многообразии $\bar\Omega$ непрерывен в пространствах

$$A = \begin{pmatrix} P^\Omega + G & K \\ T & Q \end{pmatrix} : \begin{matrix} H^{s+t}(\bar\Omega, E) \\ \oplus \\ H^{s+k-1/2}(\Gamma, F) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-p}(\bar\Omega, E') \\ \oplus \\ H^{s-q-1/2}(\Gamma, F'), \end{matrix} \quad \forall s > s_0, \qquad (16)$$

где s_0 задается ограничениями в формулах (4), (11) и (15).

Определяются внутренний и граничный символы оператора Грина. Внутренний символ оператора A порядка $(p.q+1/2\ ;t\ ,k-1/2)$ совпадает с символом п.д. оператора P порядка (p,t) (см. формулу (2)):

$$\sigma_{\Omega}^{(p,t)}(A)=\sigma_{(p,t)}(P)=P_0^{(p,t)}(x,\xi),\ (x,\xi)\in T'(G). \tag{17}$$

Он является гомоморфизмом векторных расслоений на $T'(\Omega)$, т.е.

$$\begin{aligned}\sigma_{\Omega}^{(p,t)}(A+B)&=\sigma_{\Omega}^{(p,t)}(A)+\sigma_{\Omega}^{(p,t)}(B),\\ \sigma_{\Omega}^{(p,r)}(A\circ B)&=\sigma_{\Omega}^{(p,t)}(A)\cdot\sigma_{\Omega}^{(-t,r)}(B).\end{aligned} \tag{18}$$

Далее определяется граничный символ $\sigma_{\Gamma}(A)$. Это матричный оператор Винера-Хопфа, зависящий гладко от параметра $(x',\xi')\in T'(\Gamma)$ и действующий как

$$\sigma_{\Gamma}(A)\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h^{+}_{\xi_n}p(\xi_n)+\int^{+}d\eta_n\,g(\xi_n,\eta_n) & k(\xi_n)\\ \int^{+}d\xi_n\,t(\xi_n) & q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{u}_0\\ \tilde{v}\end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $p(\xi_n)=p_0^{(p,t)}(x',\xi',\xi_n)$ и т.д. - главные символы соответствующих операторов (см. формулы (8),(12),(16)и (20)). Этот оператор отображает пространства

$$\sigma_{\Gamma}(A):\quad \begin{matrix}H_{\nu}^{+}\otimes E\\ \oplus\\ F\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}H_{\nu}^{+}\otimes E'\\ \oplus\\ F'\end{matrix}\quad, \tag{20}$$

где ν - нормальное векторное расслоение, ориентированное направлением внутренней нормали к Γ; H_{ν}^{+}- пространство мер на ν, плотности которых $f(\xi_n)\in C^{\infty}(R)$ допускают аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\xi_n<0$ и исчезают на бесконечности (здесь $x_n=0$ - локальное уравнение границы Γ, ξ_n- двойственная переменная). Граничный символ также является гомоморфизмом, т.е.

$$\sigma_{\Gamma}(A+B)=\sigma_{\Gamma}(A)+\sigma_{\Gamma}(B), \tag{21}$$

когда порядки операторов A и B совпадают; далее, если операторы A и B имеют порядки $(p,q+1/2\,;t,k-1/2)$ и $(-t,-k+1/2;r,s-1/2)$, то оператор $A\circ B$ имеет, в частности, порядок $(p,q+1/2;\,r,s-1/2)$ и его граничный символ

$$\sigma_\Gamma(A\circ B)=\sigma_\Gamma(A)\circ\sigma_\Gamma(B). \tag{22}$$

В [4,5] указываются также формулы для вычисления полного символа композиции $A\circ B$ операторов Грина A и B через их полные символы.

Между внутренним и граничным символами оператора Грина имеется связь: коэффициент $p(\xi_n)$ в операторе (19) - это след на границе Γ внутреннего символа $\sigma_\Omega(A)$.

Оператор Грина A порядка $(p, q+1/2; t, k-1/2)$ с квадратным $(\ell\times\ell)$ - матричным оператором P^Ω называется эллиптическим в $\bar\Omega$, если его внутренний символ $\sigma_\Omega(A)(x,\xi)$ и граничный символ $\sigma_\Gamma(A)(x',\xi')$ - обратимые операторы для любых $(x,\xi)\in T'(\bar\Omega)$ и $(x',\xi')\in T'(\Gamma)$. Такой оператор Грина будем называть еще квадратным эллиптическим.

Эллиптический оператор Грина (16) имеет левый и правый регуляризаторы [3], т.е. можно построить такие операторы Грина A^L и A^R, что

$$A^L\cdot A=I+N_1\,,\qquad A\cdot A^R=I+N_2 \tag{23}$$

(здесь N_i - бесконечно сглаживающие операторы, т.е. интегральные операторы, ядра которых бесконечно дифференцируемы по всем переменным [3].). Если многообразие $\bar\Omega$ компактно, то операторы N_i вполне непрерывны в пространствах (16). Имеет место следующее

Утверждение [3,12]. Эллиптичность квадратного оператора Грина необходима и достаточна для его нётеровости в пространствах (16).

Обобщим понятие эллиптичности на операторы Грина A с прямоугольным матричным $(L\times\ell)$-оператором P^Ω и $L>\ell$. Такой оператор Грина назовем эллиптическим в $\bar\Omega$, если его внутренний символ $\sigma_\Omega(A)$ и граничный символ $\sigma_\Gamma(A)$ - обратимые слева операторы на $T'(\bar\Omega)$ и $T'(\Gamma)$, т.е.

$$\operatorname{Ker}\sigma_\Omega(A)=\emptyset \text{ на } T'(\bar\Omega),\ \operatorname{Ker}\sigma_\Gamma(A)=\emptyset \text{ на } T'(\Gamma). \tag{24}$$

Можно показать, что оператор Грина A, удовлетворяющий условию (24), имеет левый регуляризатор A^L и (при $L>\ell$) не имеет правого регуляризатора.

Мы воспользуемся этим утверждением в случае, когда $A=\begin{pmatrix}P^\Omega\\ T\end{pmatrix}$ порядка $(p, q+\frac{1}{2}; t)$, где P - дифференциальный оператор с дифференциальными краевыми условиями T ($p(x,\xi)$ и $t(x,\xi)$ - матричные полиномы по ξ).

Тогда первое условие в (24) означает эллиптичность оператора $P(x,D)$ в области $\bar\Omega$, а второе - то, что оператор T накрывает эллиптический оператор P.

Действительно, пусть в окрестности некоторой точки x на Γ введены такие координаты (y, z), что уравнение границы имеет вид $z=0$ и $z>0$ в Ω; и пусть τ - произвольный ненулевой касательный вектор, а ν - единичный вектор внутренней нормали. Тогда, положив $\xi=\tau+t\nu$, условие $\sigma_\Gamma(A)\tilde{u}_0=0$ запишем в виде:

$$h_t^+\left[p_0(y,\tau+t\nu)\,\tilde{u}_0(y,\tau;t\nu)\right]=0\,,\quad \tilde{u}_0(t\nu)\in H_\nu^+\,, \tag{25}$$

$$\int^+ t_0(y,\tau+t\nu)\tilde{u}_0(y,\tau;t\nu)dt=0\,,\quad (y,\tau)\in T'(\Gamma). \tag{26}$$

Согласно утверждению (19) из [3] пространство H_ν^+ является образом Фурье-функций $u_0(z)$, которые равны нулю при $z<0$, принадлежат классу C^∞ при $z\geqslant 0$ (в частности, имеют пределы при $z\to+0$) и при $z\to+\infty$ убывают быстрее любой степени z (вместе со всеми своими производными). Следовательно, вектор-функция $u_0(y,\tau;z)=F^{-1}_{t\to z}\tilde{u}_0(y,\tau,t\nu)$ при $\tilde{u}_0\in H_\nu^+$ удовлетворяет указанным условиям. Применяя оператор F^{-1} к равенству (25), получаем, что $u_0(z)$ удовлетворяет системе

$$p_0(y,\tau-i\nu\, d/dz)\,u_0(y,\tau;z)=0,\ z>0, \tag{27}$$

и условию на бесконечности

$$u_0(y,\tau;z)\longrightarrow 0,\ z\to+\infty\quad \forall(y,\tau)\in T'(\Gamma). \tag{28}$$

Далее, условие (26) эквивалентно краевому условию

$$t_0(y,\tau-i\nu d/dz)\,u_0(y,\tau;z)\Big|_{z=+0}=0, \tag{29}$$

так как известно, что

$$2\int^+ t^k\tilde{u}_0(t)dt=(-i\,d/dz)^k u_0(z)\Big|_{z=+0},\quad \tilde{u}_0\in H_\nu^+. \tag{30}$$

Итак, если при фиксированном $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$ вектор-функция $\tilde{u}_0\in \operatorname{Ker}\sigma_\Gamma(A)$, то $u_0(z)$ - ее обратное преобразование Фурье - является решением задачи (27)-(29) при $z\geqslant 0$ и равно нулю при $z<0$. Легко видеть, что для эллиптического оператора P имеет место и обратное утверждение: если $u_0(z)$ - любое решение задачи (27)-(29) при $z\geqslant 0$, равное нулю при $z<0$, то ее образ Фурье $\tilde{u}_0$ принадлежит ядру оператора $\sigma_\Gamma(A)$.

Граничный оператор T накрывает эллиптический оператор P, если задача (27)-(29) на полуоси $z\geqslant 0$ имеет только тривиальное решение для любой точки $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$. Таким образом, T накрывает эллиптический оператор P тогда и только тогда, когда оператор $\sigma_{\Gamma}\begin{pmatrix} P^{\Omega} \\ T \end{pmatrix}$ имеет тривиальное ядро, что и требовалось доказать.

В.А.Солонников [7], изучая эллиптические краевые задачи для переопределенной системы дифференциальных уравнений, построил их левые регуляризаторы. Другой способ построения и явная формула левого регуляризатора эллиптической краевой задачи в полупространстве R_+^n для главной части A_0 оператора $A = \begin{pmatrix} P \\ T \end{pmatrix}$ приведены автором (см.[2, § 1., (37)). Используя эту формулу, нетрудно построить, так же как в [3, § 5], левый регуляризатор A^L оператора A, удовлетворяющий соотношению (23), и убедиться, что он имеет вид

$$A^L \equiv \begin{pmatrix} P^{\Omega} \\ T \end{pmatrix}^L = \begin{pmatrix} (P^L)^{\Omega} + G & K \end{pmatrix} \tag{31}$$

и его порядок равен $(-t; -p, -q-\frac{1}{2})$. Поэтому если A_1 - другой оператор Грина вида $\begin{pmatrix} P_1 \\ T_1 \end{pmatrix}$ порядка $(p_1, q_1+\frac{1}{2}; t)$, то композиция $A_1 \circ A^L$ имеет порядок $(p_1, q_1+\frac{1}{2}; -p, -q-\frac{1}{2})$ и представима в виде

$$A_1 \circ A^L = \begin{pmatrix} P_1^{\Omega} \\ T_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (P^L)^{\Omega} + G & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_1 \circ P^L)^{\Omega} + G' & K' \\ T' & Q' \end{pmatrix} + N, \tag{32}$$

где операторы со штрихами G', K', T', Q' вполне определяются согласно формулам композиции, а N - бесконечно сглаживающий оператор, т.е. оператор, полный символ которого равен нулю. Еще мы будем говорить, что N - оператор порядка $-\infty$. В дальнейшем всякий такой оператор будем обозначать через N без дополнительных пояснений. Далее оператор Грина A с $(\ell \times L)$-матричным оператором P^{Ω} назовем коэллиптическим, если его внутренний символ $\sigma_{\Omega}(A)$ и его граничный символ $\sigma_{\Gamma}(A)$ обратимы справа на $T'(\bar{\Omega})$ и $T'(\Gamma)$ соответственно.

Коэллиптический оператор Грина A имеет правый регуляризатор A^R и не имеет, вообще говоря, левого регуляризатора. Если A - эллиптический оператор Грина, то сопряженный к нему оператор A^* коэллиптичен. Оператор (31) также коэллиптичен.

Наконец, так же, как в работе [8], мы будем использовать некоторые локальные (точнее, микролокальные) понятия.

Локальный порядок оператора Грина A в угловой окрестности $U' \subset T'(\Gamma)$ определяется его локальным символом $\sigma_{\Gamma}(A)$ в U', при этом символ $\sigma_{\Omega}(A)$ рассматривается в угловой окрестности $U \subset T(\Omega_1)$, $\bar{\Omega} \subset \Omega_1$ такой, что $U \cap T'(\Gamma) = U'$. Формулы (21) и (22) для граничных локальных символов сохраняются в силу принципа локальности, который остается неизменным по переменным $(x', \xi') \in T'(\Gamma)$ (см. [5, § 6]).

Квадратный оператор Грина A называется локально эллиптическим в угловой окрестности $\mathcal{U}'$, если его внутренний символ $\sigma_\Omega(A)$ и граничный символ $\sigma_\Gamma(A)$ - обратимые операторы в $\mathcal{U}$ и в $\mathcal{U}'$ соответственно, $\mathcal{U}\cap T'(\Gamma)=\mathcal{U}'$.

Аналогично определяются локальная эллиптичность и локальная коэллиптичность для неквадратных операторов Грина.

Нетрудно доказать следующее

Утверждение. *В эллиптическом операторе Грина $A=\binom{P}{T}$ всегда можно выделить квадратный локально эллиптический оператор $\hat{A}$, т.е. $A=\binom{\hat{A}}{A_1}$, где $\hat{A}=\binom{\hat{P}}{\hat{T}}$ - квадратный эллиптический оператор в окрестности некоторой точки из $T'(\Gamma)$.*

Далее операторы $\hat{A}^L$ и $\hat{A}^R$ называются локальными регуляризаторами оператора Грина A в окрестности $\mathcal{U}'\in T'(\Gamma)$, если они удовлетворяют соотношению (23) с операторами $\hat{N}_1$ и $\hat{N}_2$, имеющими порядок $-\infty$ в $\mathcal{U}'$, т.е. их полные символы равны нулю в $\mathcal{U}'$.

Используя свойство локальности граничного символа, нетрудно доказать (см. [3, § 5, п.1]) следующее утверждение, аналогичное лемме из § 1 работы [8]:

Лемма 1. *Для оператора Грина A порядка $(p,q+\frac{1}{2};t,k-\frac{1}{2})$ в $\mathcal{U}'$ следующие утверждения равносильны:*

а) оператор A эллиптичен в $\overline{\mathcal{U}}'$;

б) оператор A имеет левый локальный регуляризатор $\hat{A}^L$, который, являясь оператором Грина порядка $(-t,-k+\frac{1}{2};-p,-q-\frac{1}{2})$, коэллиптичен в $\mathcal{U}'$.

Если A - квадратный оператор Грина-эллиптичен в $\overline{\mathcal{U}}'$, то он имеет также правый локальный регуляризатор $\hat{A}^R$, который отличается от $\hat{A}^L$ на оператор $\hat{N}$ порядка $-\infty$ в $\mathcal{U}'$.

Сопряженный оператор A^* тоже имеет локальный регуляризатор.

§ 2. Краевые задачи для слабоэллиптических систем

Пусть $A(x,\partial/\partial x)$ - слабоэллиптический в области G оператор порядка (s,t) и степени $\sigma>0$, т.е. существует цепочка эллиптических в G операторов $Q_1, Q_2,\ldots,Q_p$ порядков $(q_1,-s),(q_2,-s_1),\ldots,(q_p,-s_{p-1})$ соответственно такая, что оператор $A_p=\mathcal{D}_pA=Q_p\ldots Q_1A$ имеет порядок (s_p,t) и эллиптичен в области G. Здесь $s_0=s,s_1,\ldots,s_p$ и $q_1,\ldots,q_p$ - целочисленные векторы различной длины, удовлетворяющие условию $q_j>s_j$, $j=1,\ldots,p$ (т.е. компоненты вектора q_j-s_j неотрицательны, и их сумма $|q_j-s_j|>0$).

Наш метод изучения краевых задач для слабоэллиптического дифференциального оператора A состоит в переходе от системы

$$A(x,\partial/\partial x)u(x)=f(x), \quad x\in G, \tag{1}$$

к эллиптической (и в общем случае переопределенной) системе

$$A_p(x,\partial/\partial x)u(x)=\mathcal{D}_p f(x), \quad x\in G. \tag{2}$$

Очевидно, системы (1) и (2) эквивалентны на функциях класса $C^\infty(G)$, если ядро оператора $\mathcal{D}_p\equiv Q_p\dots Q_1$ тривиально. В противном случае мы добиваемся эквивалентности, накладывая дополнительные краевые условия на вектор-функцию $v=Au-f$:

$$C(Au-f)|_\Gamma=0, \tag{3}$$

причем оператор C имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2Q_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_pQ_{p-1}\dots Q_1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где R_j - граничные операторы, накрывающие Q_j (R_k отсутствует, если ядро оператора Q_k конечномерно). В силу эллиптичности Q_j, такие операторы всегда существуют (см. [2, теорема 1]). Мы скажем тогда, что C_Γ дополняет оператор $\mathcal{D}_p$. Так как ядро оператора $(Q_j, R_{j\Gamma})$ - конечномерное пространство, базис которого состоит из вектор-функций, бесконечно дифференцируемых вплоть до границы G [7], то оператор $(\mathcal{D}_p, C_\Gamma)$ также имеет конечномерное ядро $H(x)$ с базисом $h_1(x),\dots,h_n(x)$. Это ядро можно ликвидировать дополнительным краевым условием вида (3), либо условием ортогональности

$$\int_G (Au-f)\overline{h_j(x)}dx=0, \quad j=1,\dots,n. \tag{5}$$

Легко видеть, что система (1) эквивалентна системе (2) с условиями (3),(5), т.е. ядра операторов A и $(A_p, C_\Gamma A_\Gamma)$ совпадают, а их образы находятся во взаимно-однозначном соответствии. Условия (5) в конечном счете приводятся к дополнительным условиям разрешимости краевой задачи для системы (1). В настоящей работе мы не интересуемся индексом краевой задачи, поэтому без ограничения общности будем предполагать, что для любого $j\in[1,p]$ операторы $(Q_j, R_{j\Gamma})$, а следовательно, и $(\mathcal{D}_p, C_\Gamma)$, имеют тривиальное ядро.

Обозначим через $\mathfrak{M}_A^+$ линейное пространство решений на полупрямой $z\geqslant 0$ следующей краевой задачи:

$$\sigma_{(s_p,t)}\, A_p(y, i\tau + \nu\, d/dz)\, v(y,\tau;z) = 0,$$

$$v(y,\tau;z) \to 0,\quad z \to +\infty, \tag{6}$$

$$\sigma_{(c,t)}\,(CA)(y, i\tau+\nu\, d/dz)\, v(y,\tau;z)\big|_{z=+0} = 0,$$

зависящей от параметра $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$, где $y\in\Gamma$, τ - произвольный ненулевой вектор, касательный к Γ в точке y, а ν - единичный вектор внутренней нормали.

Лемма 2. *Пространство $\mathfrak{M}_A^+$ слабоэллиптического оператора A не зависит от произвола в выборе операторов цепочки $\mathcal{D}_p$ и краевых условий C_Γ.*

Доказательство. Повторяя рассуждения, которые мы привели в конце § 1, легко убедиться, что пространство $\mathfrak{M}_A^+$ при $z\geq 0$ совпадает с обратным преобразованием Фурье ядра оператора $\sigma_\Gamma\begin{pmatrix}A_p\\ C_\Gamma A\end{pmatrix}$ - граничного символа оператора $\begin{pmatrix}A_p\\ (CA)_\Gamma\end{pmatrix}$ порядка $(s_p, c+\frac{1}{2}; t)$. Поэтому лемма будет доказана, если мы покажем, что ядро не зависит от произвола, который имеется при выборе оператора $\begin{pmatrix}\mathcal{D}_p\\ C_\Gamma\end{pmatrix}$. Утверждение локально по $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$, поэтому зафиксируем точку (y,τ) и выберем в $\mathcal{D}_p$ оператор $\hat{\mathcal{D}}_p$, который приводит A к квадратному оператору $\hat{A}_p=\hat{\mathcal{D}}_p A$ порядка $(\hat{s}_p, t)$, эллиптическому в угловой окрестности U этой точки, и оператор $\hat{C}_\Gamma$, который дополняет $\hat{\mathcal{D}}_p$ в окрестности $U_1 = U\cap T'(\Gamma)$. Пусть $(\hat{\mathcal{D}}_p', \hat{C}_\Gamma')$ - другой такой же оператор. Так как каждый из этих операторов имеет левый локальный регуляризатор, то, согласно лемме 1, они связаны соотношением

$$\begin{pmatrix}\hat{\mathcal{D}}_p'\\ \hat{C}_\Gamma'\end{pmatrix} = \hat{\mathcal{E}}\begin{pmatrix}\hat{\mathcal{D}}_p\\ \hat{C}_\Gamma\end{pmatrix} + \hat{N},\quad \begin{pmatrix}\hat{\mathcal{D}}_p\\ \hat{C}_\Gamma\end{pmatrix} = \hat{\mathcal{E}}'\begin{pmatrix}\hat{\mathcal{D}}_p'\\ \hat{C}_\Gamma'\end{pmatrix} + \hat{N}', \tag{7}$$

где $\hat{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}\hat{\mathcal{D}}'\\ \hat{C}_\Gamma'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\mathcal{D}}_p\\ \hat{C}_\Gamma\end{pmatrix}^L_{loc}$ и аналогично $\hat{\mathcal{E}}'$ - операторы Грина, порядки которых в $U_1'\subset U_1$ не меньше чем $e\equiv(\hat{S}_p', \hat{C}'+\frac{1}{2}; -\hat{S}_p, -\hat{C}-\frac{1}{2})$ и $e'\equiv(\hat{S}_p, \hat{C}+\frac{1}{2}; -\hat{S}_p', -\hat{C}'-\frac{1}{2})$ соответственно, где $\hat{S}_p, \hat{S}_p', \hat{C}$ и $\hat{C}'$ - порядки строк операторов $\hat{A}_p, \hat{A}_p', \hat{C}A$ и $\hat{C}'A$ соответственно, а $\hat{N}$ и $\hat{N}'$ - операторы порядка $-\infty$ в U_1'.

Покажем, что порядки операторов $\hat{\mathcal{E}}$ и $\hat{\mathcal{E}}'$ в некоторой окрестности $U_2'\subset U_1'$ в точности равны e и e'. Действительно, дополним оператор $(\hat{A}_p, \hat{C}_\Gamma A)$ оператором следа B_Γ порядка (b,t) таким, чтобы граничный символ оператора $(\hat{A}_p, \hat{C}_\Gamma A, B_\Gamma)$ был обратимым в $U_2'\subset U_1'$, где U_2' - достаточно малая окрестность точки (y,τ). Очевидно, это всегда можно сделать [2]. Тогда из первого соотношения в (7) имеем

$$\begin{pmatrix} \hat{A}'_p \\ \hat{C}_\Gamma A \\ B_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_p \\ \hat{C}_\Gamma A \\ B_\Gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{N}_1 \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{8}$$

Из соотношения (8), сравнивая внутренние и граничные символы и учитывая локальную обратимость внутреннего и граничного символов оператора $(\hat{A}_p, \hat{C}_\Gamma A, B_\Gamma)$, легко получаем, что порядок оператора $\hat{\mathcal{E}}$ в $\mathcal{U}'_2$ равен ℓ и

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}' \\ \hat{C}_\Gamma A \\ B_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_p \\ \hat{C}_\Gamma A \\ B_\Gamma \end{pmatrix}^R_{loc} + \hat{N}_2 . \tag{9}$$

Аналогично доказывается, что оператор $\hat{\mathcal{E}}'$ имеет в $\mathcal{U}'_3$ порядок ℓ'. Далее, из соотношения (8) имеем

$$\sigma_\Gamma \begin{pmatrix} \hat{A}'_p \\ \hat{C}'_\Gamma A \end{pmatrix} = \sigma_\Gamma(\mathcal{E})\, \sigma_\Gamma \begin{pmatrix} \hat{A}_p \\ \hat{C}_\Gamma A \end{pmatrix} \qquad \text{в } \mathcal{U}'_2 , \tag{10}$$

откуда следует, что $\ker \sigma_\Gamma \begin{pmatrix} \hat{A}'_p \\ \hat{C}'_\Gamma A \end{pmatrix} \subset \ker \sigma_\Gamma \begin{pmatrix} \hat{A}_p \\ C_\Gamma A \end{pmatrix}$. Аналогично из второго соотношения в (7) вытекает обратное неравенство. Итак, ядра операторов $\sigma_\Gamma(\hat{A}_p, \hat{C}_\Gamma A)$ и $\sigma_\Gamma(\hat{A}'_p, \hat{C}'_\Gamma A)$ совпадают в достаточно малой окрестности точки $(y,\tau) \in T'(\Gamma)$. Лемма 2 доказана.

Если размерность $m(y,\tau)$ пространства $\mathfrak{M}^+_A$ положительна, то систему (1) дополним краевыми условиями

$$B(x, \partial/\partial x)\, u(x)\big|_\Gamma = g(x') , \quad x' \in \Gamma, \tag{11}$$

где B - $(\tau \times \ell)$ -матричный дифференциальный оператор порядка (b,t) с коэффициентами класса $C^\infty(\overline{G})$, $\tau \geq m_0 = \max\limits_{T'(\Gamma)} m(y,\tau)$.

Замечание. Как показывают примеры [16], $m(y,\tau)$ может не быть постоянной на связной части $T'(\Gamma)$ и $m(y,\tau) \geq \sigma/2$.

Мы скажем, что граничный оператор B_Γ дополняет слабоэллиптический оператор A, если B_Γ накрывает оператор $(A_p, C_\Gamma A)$. Лемма 2 обосновывает это определение.

Изучим теперь пространства, в которых действует слабоэллиптический оператор A. Пусть k - действительное число, а $t = (t^1, \ldots, t^\ell)$ - вектор с целочисленными компонентами t^j. Обозначим через $H^{\kappa+t}(G)$ прямое произведение пространств С.Л.Соболева

$$H^{\kappa+t}(G) = H^{\kappa+t^1}(G) \times \ldots \times H^{\kappa+t^\ell}(G). \qquad (12)$$

Мы скажем, что вектор $s \succ t$, если компоненты $s^j \geq t^j$ $\forall j$ и $[s-t] \equiv \equiv \max\limits_j (s^j-t^j) > 0$. Тогда

$$H^{k+s}(G) \subset H^{k+t}(G) \quad \text{при } s \succ t. \qquad (13)$$

Введем еще пространства $H^{\kappa-s}_{[S_p,\mathcal{D}_p]}(G)$ и $H^{\kappa-s}_{[S_p,\mathcal{D}_p,C_\Gamma]}(G)$. Они определяются целочисленным вектором S_p и цепочным оператором $\mathcal{D}_p = Q_p \ldots Q_1$, состоящим из композиции эллиптических в $\bar{G}$ операторов Q_j порядков $(q_j, -s_{j-1})$ таких, что $q_j \succ s_j$, $j=1,\ldots,p$; $s_0 = s$.

Пусть операторы Q_j эллиптичны как операторы Грина (т.е. не только внутренний символ $\sigma_G(Q_j)$, но и граничный символ $\sigma_\Gamma(Q_j)$ обратим слева). Тогда определим пространство $H^{\kappa-s}_{[S_p,\mathcal{D}_p]}(G)$, которое состоит из обобщенных вектор-функций v таких, что $\mathcal{D}_p v \in H^{k-s_p}(G)$.

Если ядро оператора $\mathcal{D}_p$ тривиально, то норма в нем определяется как

$$\|v\|_{H^{\kappa-s}_{[S_p,\mathcal{D}_p]}(G)} = \|\mathcal{D}_p v\|_{H^{k-s_p}(G)}. \qquad (14)$$

В общем случае это - полунорма, так как ядро оператора $\mathcal{D}_p$ - конечномерное пространство H, базис которого состоит из вектор-функций $h_j(x)$, $j=1,\ldots,n$, класса $C^\infty(\bar{G})$. Мы получим норму, если к правой части (14) добавим $\|Pv\|_0$, где P - проектор в $L_2(G)$ на H. Однако для дальнейшего нам достаточно полунормы (14). Отметим, что пространство $H^{\kappa-s}_{[S_p,\mathcal{D}_p]}(G)$ определяется классом эквивалентных пар $(S_p,\mathcal{D}_p)$ векторов S_p и операторов $\mathcal{D}_p$. Пары $(S_p,\mathcal{D}_p)$ и $(S'_p,\mathcal{D}'_p)$ называются эквивалентными, если

$$\mathcal{D}'_p = \mathcal{E}\mathcal{D}_p + T, \quad \mathcal{D}_p = \mathcal{E}'\mathcal{D}'_p + T', \qquad (15)$$

где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ - п.д. операторы порядков $(S'_p,-S_p)$ и $(S_p,-S'_p)$ соответственно, а порядки операторов T и T' равны $-\infty$ в $T'(\bar{G})$.

Пространство $H^{k-s}_{[S_p,\mathcal{D}_p]}(G)$ не зависит от выбора конкретной пары $(S_p,\mathcal{D}_p)$, так как нормы, определяемые различными парами, эквивалентны.

Пусть $n = n_1 + \ldots + n_p$, $n_j = [q_j - s_j] > 0$, $n' = n - n_1$ и пусть $\bar{n}$ =

$=(n,\dots,n)$ - вектор с одинаковыми компонентами. Тогда $\bar n_j > q_j - s_j$, $j=1,\dots,p$. Имеют место вложения

$$H^{k+n-s}(G) \subset H^{k-s}_{[\mathcal{B}_p,\mathcal{D}_p]}(G) \subset H^{k-s}(G). \tag{16}$$

Докажем первое из них. Имеем следующую цепочку отображений:

$$H^{k-s_p} \xleftarrow{\supset} H^{k+n_p-q_p} \xleftarrow{Q_p} \dots \xleftarrow{Q_2} H^{k+n^L-s_1} \xleftarrow{\supset} H^{k+n-q_1} \xleftarrow{Q_1} H^{k+n-s}, \tag{17}$$

поскольку порядки операторов Q_j равны $(q_j, -s_{j-1})$ и $\bar n - q_1 > \bar n^L - s_1, \dots, \bar n_p - q_p > -s_p$. Следовательно, $\mathcal{D}_p v \in H^{k-s_p}(G)$, если $v \in H^{k+n-s}(G)$.

Второе вложение доказывается аналогично. Учитывая, что порядки операторов Q_j^L равны $(s_{j-1}, -q_j)$ и $s_j < q_j$, имеем следующую цепочку отображений:

$$H^{k-s_p} \xleftarrow{Q_1^L} \dots \xleftarrow{Q_{p-1}^L} H^{k-q_{p-1}} \xleftarrow{\supset} H^{k-s_{p-1}} \xleftarrow{Q_p^L} H^{k-q_p} \xleftarrow{\supset} H^{k-s_p}, \tag{18}$$

откуда вытекает, что $\mathcal{D}_p^L \mathcal{D}_p v = v + Tv \in H^{k-s}(G)$, если $\mathcal{D}_p v \in H^{k-s_p}(G)$. Так как $Tv \in C^\infty(\bar G)$, то $v \in H^{k-s}(G)$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь Q_j - эллиптические операторы порядка $(q_j, -s_{j-1})$, имеющие бесконечномерные ядра. Дополним Q_j краевыми условиями R_{jr} порядка $(c'+\frac{1}{2}; -s_{j-1})$, накрывающими Q_j. Определим векторы s_j^o и c_j из условий, что пары $(s_j; -s_j^o)$ и $(c+\frac{1}{2}; -s_j^o)$ также составляют точные порядки операторов Q_j и R_{jr}. (Напомним, что для произвольного матричного оператора A точные порядки t^j его столбцов определяются однозначно, если заданы порядки s^i его строк, и обратно. Так, $t^j = \max_i(\operatorname{ord} A_{ij} - s^i)$). Так как $s_j < q_j$, то $s_j^o < s_{j-1}$, $c_j < c_j'$ и $[c_j' - c_j] \leqslant [s_{j-1}^L - s_j^o] \leqslant [q_j - s_j]$. Положим $c = (c_1,\dots,c_p)$, и пусть C_r - оператор, определенный формулой (4).

В некоторых случаях оператор Q_j представим в виде

$$Q_j = Q_j' Q_j^o + N_j, \tag{19}$$

где Q_j^o - п.д. оператор порядка $(q_j^o, -s_{j-1})$, эллиптический в $\bar G$ и имеющий конечномерное ядро (или даже обратимый слева), а Q_j' - квадратный дифференциальный оператор порядка $(q_j, -q_j^o)$, эллиптический в $\bar G$ и имеющий бесконечномерное ядро. Тогда оператор Q_j' дополним накрывающими краевыми условиями R_{jr}' порядка $(c'+\frac{1}{2}; -q_j^o)$. Аналогично предыдущему определим векторы S_j^0 и c_j из условий, что $(s_j; -s_j^0)$ и $(c+\frac{1}{2}; -s_j^0)$ - порядки операторов Q_j' и $R_{j\Gamma}'$. Так как $s_j<q_j$, то $s_j^0<q_j^0$, $c_j<c_j'$ и $[c_j'-c_j]\leqslant[q_j^0-s_j^0]\leqslant$ $\leqslant[q_j-s_j]$. Далее, пусть $c=(c_1,\ldots,c_p)$ и пусть C_Γ - оператор (4), в котором $R_j=R_j'Q_j^0$.

В общем случае некоторые из операторов Q_j требуют дополнительных краевых условий $R_{j\Gamma}$, а остальные операторы сами имеют левые регуляризаторы. Мы получим оператор C_Γ, если в (4) вычеркнем строки, соответствующие этим операторам.

Определение. Пространство $H^{k-s}_{[s_p,\mathcal{D}_p,C_\Gamma]}(G)$ состоит из обобщенных вектор-функций v таких, что $\mathcal{D}_p v\in H^{k-s_p}(G)$ и $Cv|_\Gamma\in H^{k-c-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Норма в нем определяется как

$$\|v\|^2_{H^{k-s}_{[s_p,\mathcal{D}_p,C_\Gamma]}}=\|\mathcal{D}_p v\|^2_{H^{k-s_p}(G)}+\|C_\Gamma v\|^2_{H^{k-c-\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\|Pv\|_0, \tag{20}$$

где P - проектор на конечномерное ядро оператора $(\mathcal{D}_p, C_\Gamma)$.

Пространство $H^{k-s}_{[s_p,\mathcal{D}_p,C_\Gamma]}(G)$ определяется классом эквивалентных пар векторов s_p и операторов Грина $(\mathcal{D}_p, C_\Gamma)$. Пары $(s_p;\mathcal{D}_p,C_\Gamma)$ и $(s_p';\mathcal{D}_p', C_p')$ называются эквивалентными, если

$$\begin{pmatrix}\mathcal{D}_p'\\ C_\Gamma'\end{pmatrix}=\mathcal{E}\begin{pmatrix}\mathcal{D}_p\\ C_\Gamma\end{pmatrix}+N,\quad \begin{pmatrix}\mathcal{D}_p\\ C_\Gamma\end{pmatrix}=\mathcal{E}'\begin{pmatrix}\mathcal{D}_p'\\ C_\Gamma'\end{pmatrix}+N', \tag{21}$$

где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ - операторы Грина порядков $(s_p', c'+\frac{1}{2}; -s_p, -c-\frac{1}{2})$ и $(s_p, c+\frac{1}{2}; -s_p', -c'-\frac{1}{2})$ соответственно, а порядки операторов N и N' равны $-\infty$. Мы будем обозначать этот класс через $[s_p,\mathcal{D}_p,C_\Gamma]$, а иногда просто через Q.

Пусть по-прежнему $n=n_1+\ldots+n_p$, $n_j=[q_j-s_j]>0$. Имеют место вложения

$$H^{k+n-s}(G)\subset H^{k-s}_{[s_p,\mathcal{D}_p,C_\Gamma]}(G)\subset H^{k-s}(G). \tag{22}$$

Первое из них означает, что $\mathcal{D}_p v\in H^{k-s_p}(G)$, $Cv|_\Gamma\in H^{k-c-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, если $v\in H^{k+n-s}(G)$. Одно из этих включений следует из отображений (17), другое доказывается аналогично с учетом того, что $n_j\geqslant c_j'-c_j$:

$$H^{k-c_1-\frac{1}{2}}(\Gamma) \supseteq H^{k+n^L-c_1-\frac{1}{2}} \supseteq H^{k+n-c_1'-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xleftarrow{R_{1\Gamma}'Q_1^o} H^{k+n-s}(G),$$

$$H^{k-c_p-\frac{1}{2}}(\Gamma) \supseteq H^{k+n_p-c_p'-\frac{1}{2}} \xleftarrow{R_{p\Gamma}'} H^{k+n_p-q_p^o} \xleftarrow{Q_p^o Q_{p-1}\dots Q_1} H^{k+n-s}(G).$$

Для доказательства второго вложения в (22) рассмотрим следующую цепочку отображений, аналогичную (18):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^{k-s_{p-1}} & & H^{k-q_p} & & H^{k-s_p} \\
 & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\
 & & H^{k-c_{p-1}-\frac{1}{2}} & \left(\begin{pmatrix} Q_p \\ R_{p\Gamma} \\ 0 \end{pmatrix}^L \begin{matrix} 0 \\ \\ I \end{matrix}\right) & H^{k-c_p'-\frac{1}{2}} & \supset & H^{k-c_p-\frac{1}{2}} \\
H^{k-s} \xleftarrow{\begin{pmatrix} Q_1 \\ R_{1\Gamma} \end{pmatrix}^L} \dots & \longleftarrow & \oplus & \longleftarrow & \oplus & \longleftarrow & \oplus \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\
 & & H^{k-c_1-\frac{1}{2}} & & H^{k-c_1-\frac{1}{2}} & & H^{k-c_1-\frac{1}{2}}
\end{array}$$

которая справедлива, так как $s_j < q_j$, $c_j < c_j'$ и порядки операторов $\begin{pmatrix} Q_j \\ R_{j\Gamma} \end{pmatrix}^L = Q_j^{oL} \begin{pmatrix} Q_j' \\ R_j' \end{pmatrix}^L$ равны $(s_{j-1}; -q_j, -c_j' - \frac{1}{2})$, $s_0 = s$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_p \\ C_\Gamma \end{pmatrix}^L \begin{pmatrix} \mathcal{D}_p \\ C_\Gamma \end{pmatrix} v = v + Nv \in H^{k-s}(G) \quad \forall v \in H^{k-s}_{[s_p, \mathcal{D}_p, C_\Gamma]}(G).$$

Так как $Nv \in C^\infty(\bar{G})$, то $v \in H^{k-s}(G)$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь слабоэллиптический оператор A порядка (s, t). Пусть $\mathcal{D}_p$ - цепочный оператор, приводящий A к эллиптическому в G оператору A_p порядка (s_p, t), и C_Γ - оператор, дополняющий $\mathcal{D}_p$, как указано выше. Тогда оператор A ограничен в пространствах

$$A : H^{k+t}(G) \longrightarrow H^{k-s}_{[s_p, \mathcal{D}_p, C_\Gamma]}(G), \tag{23}$$

т.е. $\mathcal{D}_p Au \in H^{k-s_p}(G)$, $CAu|_\Gamma \in H^{k-c-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, если $u \in H^{k+t}(G)$. Но это очевидно, так как оператор A_p имеет порядок (s_p, t), операторы $A_j = \mathcal{D}_j A$ - порядки (s_j, t) и в случае (19) порядки операторов $Q_{j-1}^o \mathcal{D}_{j-1} A$ равны (s_j^o, t), операторов $(Q_j', R_{j\Gamma}') - (s_j, c_j + \frac{1}{2}; -s_j^o)$ соответственно.

Имеет место следующая

Лемма 3. *Для произвольного слабоэллиптического оператора* A *прост-*

ранство $H^{k-s}_{[S_p,\mathcal{D}_p,C_\Gamma]}(G)$ не зависит от произвола, который имеется при выборе оператора $\mathcal{D}_p$, приводящего A к эллиптическому, и оператора следа C_Γ, дополняющего $\mathcal{D}_p$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}'_p$ - другой оператор, приводящий A к (S'_p, t) - эллиптическому оператору $A'_p = \mathcal{D}'_p A$, и оператор C'_Γ дополняет $\mathcal{D}'_\Gamma$. Покажем, что пары $(S_p;\mathcal{D}_p,C_\Gamma)$ и $(S'_p;\mathcal{D}'_p,C'_\Gamma)$ эквивалентны, т.е. удовлетворяют соотношениям (21). Так как операторы Грина $(\mathcal{D}_p,C_\Gamma)$ и $(\mathcal{D}'_p,C'_\Gamma)$ имеют левые регуляризаторы, то соотношения (21) всегда выполняются с операторами $\mathcal{E}=\begin{pmatrix}\mathcal{D}'_p\\ C'_\Gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{D}_p\\ C_\Gamma\end{pmatrix}^L$ и соответственно $\mathcal{E}'$. Поэтому остается доказать, что порядки этих операторов равны $e\equiv(S'_p,c'+\frac{1}{2};-S_p,-c-\frac{1}{2})$ и $e'=(S_p,c+\frac{1}{2};-S'_p,-c'-\frac{1}{2})$ соответственно.

Для внутренних точек области G эквивалентность пар означает, что выполняются соотношения (15) с операторами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ порядков $(S'_p,-S_p)$ и $(S_p,-S'_p)$ и операторами T,T' порядков $-\infty$ в $T'(G)$. Пусть J_S - диагональный оператор, соответствующий вектору s (см.[8]). Тогда п.д. операторы $J_{-S_p}\mathcal{D}_p$ и $J_{-S'_p}\mathcal{D}'_p$ приводят оператор к эллиптическим операторам $J_{-S_p}A$ и $J_{-S'_p}A$ порядка $(0,t)$. Для них соотношения (15) имеет тот же вид, но операторы $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}'_0$ имеют нулевой порядок. Приводящие операторы, связанные такими соотношениями, в [8] назывались эквивалентными.

В [8] и в конце § 1 работы [1] доказана эквивалентность различных операторов $\mathcal{D}_p$, приводящих оператор A к $(0,t)$ - эллиптическим операторам A_p на компактном многообразии без края. Это доказательство состоит из двух основных этапов. Вначале доказывается эквивалентность оператора $\mathcal{D}_p$ блочному оператору $\widetilde{\mathcal{D}}_p$, составленному из квадратных операторов $\mathcal{D}_p$, приводящих A к локально эллиптическому оператору $\hat{A}_p$ порядка $(0,t)$. Затем доказывается эквивалентность различных блочных операторов $\widetilde{\mathcal{D}}_p$ и $\widetilde{\mathcal{D}}'_p$. Тогда, обозначая эквивалентность символом $\sim$, имеем $\mathcal{D}_p\sim\widetilde{\mathcal{D}}_p\sim\widetilde{\mathcal{D}}'_p\sim\mathcal{D}'_p$. Причем на каждом этапе доказательства существенно используется то, что локально эллиптический п.д. оператор $\hat{A}_p$ имеет как левый, так и правый локальные регуляризаторы.

Это же доказательство проходит для операторов Грина, так как оператор $\hat{A}_p$ в окрестности U' точки $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$ всегда можно дополнить краевыми условиями $\hat{B}_\Gamma$ такими, что граничный символ оператора $(\hat{A}_p,\hat{B}_\Gamma)$ обратим в U' как слева, так и справа. Отметим, что локальную эквивалентность пар $(\hat{S}_p,\hat{\mathcal{D}}_p,\hat{C}_\Gamma)$ и $(\hat{S}',\hat{\mathcal{D}}'_p,\hat{C}'_\Gamma)$ (см. формулу (7)) мы уже установили при доказательстве леммы 1. Остальная часть доказательства использует разбиение единицы в $T'(\Gamma)$ и аналогична вышеуказанному.

Перейдем к изучению краевой задачи (1),(11) для слабоэллиптического оператора A . В конечной области G этой задаче соответствует ограниченный оператор

$$\mathfrak{A}=(A,B_{\Gamma}):H^{k+t}(G)\longrightarrow H_{Q}^{k-s}(G)\oplus H^{k-b-\frac{1}{2}}(\Gamma), \tag{24}$$

где $Q=[S_p,\mathcal{D}_p,C_{\Gamma}]$ - класс эквивалентных пар векторов s_p и операторов $\mathcal{D}_p$, приводящих A к (S_p,t)- эллиптическим операторам A_p , $K\geq K_0=$ $=\max\limits_{i,j}(b_i,c_j)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) оператор A *порядка* (s,t) *слабоэллиптичен в* $\overline{G}$ *и граничный оператор* B_{Γ} *порядка* (b,t) *дополняет* A ;

б) существует пространство $H_Q^{k-s}(G)$ *такое, что оператор* (24) *имеет левый регуляризатор;*

в) существует пространство $H_Q^{k-s}(G)$ *такое, что оператор* (24) *имеет конечномерное ядро и замкнутую область значений;*

г) существует пространство $H_Q^{k-s}(G)$ *такое, что выполняется априорная оценка*

$$\|u\|_{H^{k+t}(G)}\leq C\left(\|Au\|_{H_Q^{k-s}(G)}+\|B_{\Gamma}u\|_{H^{k-b-\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\sum_{t_j>0}\|u_j\|_0\right), \tag{25}$$

причем постоянная C *не зависит от* u; $K\geq K_0$.

Доказательство. Утверждение а) $\Longrightarrow$ б) доказывается, как обычно, построением левого регуляризатора оператора (24) , причем пространство $H_Q^{k-s}(G)$ определяется цепочным оператором $\mathcal{D}_p=Q_p\ldots Q_1$, приводящим A к $(S_p;t)$ - эллиптическому оператору A_p , и не зависит от произвола, который имеется при его выборе. Левый регуляризатор $\mathfrak{A}^L$ строится в виде композиции приводящего оператора и левого регуляризатора оператора эллиптической краевой задачи

$$\begin{pmatrix} A \\ \\ B_{\Gamma}\end{pmatrix}^L=\begin{pmatrix} A_p \\ C_{\Gamma}A \\ B_{\Gamma}\end{pmatrix}^L\begin{pmatrix}\mathcal{D}_p & 0 \\ C_{\Gamma} & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}. \tag{26}$$

Ограниченность оператора (26) в пространствах (24) вытекает из того, что $(A_p,C_{\Gamma}A,B_{\Gamma})^L$ имеет порядок $\left(-t;-s_p,-c-\frac{1}{2},-b-\frac{1}{2}\right)$. Из существования левого регуляризатора следует [9] конечномерность ядра оператора (24) замкнутость его образа в тех же пространствах. Кроме того, все решения однородной задачи из $H^{k+t}(G)$ принадлежат $C^{\infty}(\bar{G})$, так как для них

$$\mathfrak{A}^{L}\mathfrak{A}u = u + Nu \qquad \text{и} \qquad Nu \in C^{\infty}(\bar{G}).$$

Априорная оценка (25) из условия в) получается обычным путем [10] , с использованием теоремы о замкнутом графике для оператора $\mathfrak{A}$, рассмотренного на ортогональном дополнении в $H^{k+t}(G)$ к его ядру.

Наконец, из априорной оценки (25) и определения (20) нормы в $H_Q^{k-s}(G)$ вытекает [10] эллиптичность оператора краевой задачи $(A_p, C_\Gamma A, B_\Gamma)$ порядка $(s_p, c+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}; t)$, откуда, согласно определениям, следует утверждение а). Теорема доказана.

Что касается коядра оператора (24), о котором в теореме ничего не говорится, то оно заведомо не конечномерно, если число τ краевых условий (11) превышает m_0 - максимум размерности пространства $\mathfrak{M}_A^+$. В этом случае векторы f и g должны быть подчинены некоторым, вообще говоря, интегродифференциальным краевым условиям, которые могут быть получены из ортогональности (f,g) бесконечномерному ядру сопряженного оператора Грина [11,12] .

Пусть размерность $m(y,\tau)$ пространства $\mathfrak{M}_A^+$ постоянна на $T'(\Gamma)$ и $\tau = m$. Тогда оператор (24) имеет конечномерное коядро, если оператор $\mathcal{D}_p A$ квадратный, так как в этом случае условие накрытия совпадает с условием Лопатинского. В общем случае оператор A приводим справа к коэллиптическому оператору, поэтому можно построить [1] такой оператор F , что $K = AF$ - квадратный эллиптический оператор порядка $(s, -s)$. Тогда, полагая $u = Fv$, мы приходим к задаче

$$Kv = f(x), \ x \in G, \qquad BFv\big|_\Gamma = g(x'), \ x' \in \Gamma, \tag{27}$$

разрешимость которой обеспечивает разрешимость задачи (1),(2). Если задача (27) слабоэллиптична [2], то коядро оператора (24) конечномерно, так как он имеет также правый регуляризатор.

В некоторых случаях удобно использовать метод расширения системы (2) до квадратной эллиптической системы [13,14] путем увеличения числа неизвестных функций, на которые налагаются определенные однородные краевые условия.

Можно также свести краевую задачу (1),(2) к системе п.д. уравнений на границе [15,4] и получить таким путем условия нормальной разрешимости оператора (24).

Детальное изучение коядра оператора (24) мы предполагаем провести в следующей работе.

Нётеровые краевые задачи для некоторых классов слабоэллиптических систем рассмотрены автором в [16-20].

Литература

1. Сакс Р.С. Слабоэллиптические системы дифференциальных уравнений и их свойства.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара академика С.Л. Соболева), 1979, № 1, с.91-118.
2. Сакс Р.С. Слабоэллиптические краевые задачи. - В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара академика С.Л.Соболева), 1980, № 2, с.57-58.
3. Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudo-differential operators. - Acta Math. 1971, v.126, No 1-2, p.10-51.
4. Boutet de Monvel L. Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variêté a bord. - Journ. d'analyse math. 1966, v.17, p. 241 - 304.
5. Boutet de Monvel L. Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et problèmes aux limites elliptiques.-Ann.Inst.Fourier,1970,v.19,p.163-268.
6. Хёрмандер Л. Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения. - В кн.: Псевдодифференциальные операторы.- М., Мир, 1967, с. 297-367.
7. Солонников В.А. Переопределенные эллиптические краевые задачи.- Записки научных семинаров ЛОМИ, 1971, т.21, № 5, с.112-158.
8. Сакс Р.С. Слабоэллиптические системы псевдодифференциальных уравнений на многообразии без края.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара академика С.Л. Соболева), 1978, № 2, с.103-126 (см. также Докл. АН СССР 1978, т.240, № 4, с.786-789).
9. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.- М.: Ф-М, 1962.- 256 с.
10. Волевич Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем.- Мат. сб., 1965, т.68, № 3, с.373-416.
11. Диканский А.С. Сопряженные краевые задачи к эллиптическим дифференциальным и псевдодифференциальным краевым задачам в ограниченной области.- Мат.сб., 1973, т. 91, № 1, с. 62-77.
12. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1973.- 232 с.
13. Гудович И.С., Крейн С.Г. Краевые задачи для переопределенных систем уравнений в частных производных.- В кн.: Труды семинара "Дифференциальные уравнения и их применения", Вильнюс, 1974, вып. 9, с. 1-143.
14. Солонников В.А. Об одном классе нётеровых переопределенных эллиптических краевых задач. - Записки научных семинаров ЛОМИ, 1974, т.47, № 5, с. 138-145.
15. Хёрмандер Л. Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые

задачи.- В кн.: Псевдодифференциальные операторы.- М.: Мир, 1967, с. 166-296.

16. Сакс Р.С. О краевых задачах для системы $\mathrm{rot}\, u + \lambda u = h$.- Дифференц. уравнения, 1972, т.8, № 1, с.126-133.
17. Сакс Р.С. Краевые задачи для некоторых уравнений, связанных с оператором внешнего дифференцирования.- Докл. АН СССР, 1974, т.218, № 1, с. 39-42.
18. Сакс Р.С. Краевые задачи для некоторых систем, приводимых к эллиптическим.- Дифференц. уравнения, 1974, т.10, № 1, с. 132-142.
19. Сакс Р.С. Краевые задачи для слабоэллиптических систем дифференциальных уравнений.- Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 6, с. 1311-1314.
20. Сакс Р.С. О нётеровых краевых задачах для некоторых классов слабоэллиптических систем диффренециальных уравнений.- В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики, Новосибирск, Наука, 1978, с.237-253.