УДК 517.9

ОБ ОДНОСТОРОННИХ ЗАДАЧАХ С ВЫПУКЛЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГРАДИЕНТ

Т.Н.Рожковская (Новосибирск)

Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$; L - равномерно эллиптический оператор вида

$$Lu = a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + a_i(x)u_{x_i} + a(x)u,$$

где $a_{ij}, a_i, a \in C^2(\bar{\Omega})$, $a \geq 0$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2$, $\nu = const > 0$.

Каждой точке $x \in \bar{\Omega}$ ставится в соответствие замкнутое выпуклое множество $K(x) \subset R^n$.

Задача заключается в нахождении функции u, удовлетворяющей следующим условиям:

$$Lu(x) - f(x) \leq 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nabla u(x) \in K(x) \quad \text{в } \Omega, \tag{2}$$

если $\nabla u(x) \in \operatorname{int} K(x)$, то $Lu(x) = f(x)$, (3)

$$u(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{4}$$

где f - заданная функция.

Если $L = -\Delta$, $K(x) = \{p \in R^n : |p| \leq 1\}$, то при определенных ограничениях на f задача (1)-(4) эквивалентна вариационному неравенству (задаче о кручении упругопластического материала). Этот факт установили Эванс[1] для $f = const \geq 0$ и П.Л. Лионс [2] для функций $f \in H^{1,\infty}(\Omega)$, $f \geq 0$, подчиненных некоторым дополнительным условиям.

Для задачи (1)-(4) имеет место "порог гладкости": решение может не принадлежать $H^3(\Omega)$ даже при данных класса C^∞. Подтверждением является контрпример Ж.-Л.Лионса [3] для задачи об упругопластических материалах.

Задачи с выпуклыми ограничениями на градиент исследовались с различных точек зрения многими авторами. В частности, для вариационной постановки принадлежность слабого решения $u \in \mathcal{K} = \{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : |\nabla v| \leq 1$ почти всюду в $\Omega\}$ пространству $H^{2,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, доказали Брезис и Стампаккья [4]. Чиматти [5] обобщил этот результат для $\mathcal{K} = \{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) : |\nabla v| \leq g(x)$ почти всюду в $\Omega\}$.

Невариационную постановку задачи рассматривал Эванс [1]. Для ограничений в виде шара $K(x) = \{p \in R^n : |p| \leq g(x)\}$ в предположении $f, g \in C^2(\bar\Omega)$, $f \geq 0$, Эванс доказал разрешимость и единственность для задачи (1)-(4) в $C^{0,1}(\bar\Omega) \cap H^{2,p}_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, а также при условии $a_{ij} = const$ локальную ограниченность вторых производных решения.

В настоящей статье при довольно общих предположениях на выпуклые множества $K(x)$ обобщается результат Эванса об однозначной разрешимости задачи (1)-(4) в $C^{0,1}(\bar\Omega) \cap H^{2,p}_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Кроме того, для $L = -\Delta$ указаны достаточные условия принадлежности решения классу $H^{2,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Пусть $K(x)$ - строго выпуклое замкнутое ограниченное множество в R^n и $0 \in \operatorname{int} K(x)$ для каждой точки $x \in \bar\Omega$. В R^n введем сферические координаты (r, φ). Уравнение границы $\partial K(x)$ множества $K(x)$ можно записать в виде $r = r(x, \varphi)$, где $0 < \alpha \leq r(x, \varphi) \leq \beta < \infty$, $\alpha, \beta = const$. Предположим, что $r(x, \varphi) \in C^2$ по совокупности аргуметов.

Теорема 1. *Если существует функция $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$ такая, что $Lw(x) \leq f(x)$, $\nabla w(x) \in K(x)$ в Ω, $w = 0$ на $\partial\Omega$, то для каждой функции $f \in C^2(\bar\Omega)$ существует функция $u \in C^{0,1}(\bar\Omega) \cap H^{2,p}_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, удовлетворяющая условиям (2),(4), условию (1) для почти всех $x \in \Omega$ и условию (3) в следующем смысле: если $\nabla u(x_0) \in \operatorname{int} K(x_0)$, то существует окрестность точки x_0, в которой $Lu(x) = f(x)$ для почти всех x.*

Существование функции w с указанными свойствами является необходимым условием: в качестве w можно взять решение задачи (1)-(4) $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$ (если оно существует). При $f \geq 0$ в $\bar\Omega$ можно положить $w \equiv 0$.

Без предположения $0 \in \operatorname{int} K(x)$ решение задачи может не существовать. Например, если $\Omega \subset R^1$, $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, $K(x) = [1,2]$ или $K(x) = [0,1]$, $f < 0$, то ни для какой функции $u \in C(\bar\Omega)$ условия (1)-(4) одновременно не выполняются.

Доказательство теоремы 1. Задачу (1) - (4) можно записать в виде:

$$\max\{Lu - f,\ \mathcal{F}(x, \nabla u(x)) - 1\} = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{5}$$

$$u = 0 \qquad \text{на } \partial\Omega, \tag{6}$$

где функция $\mathcal{J} : \overline{\Omega} \times R^n \longrightarrow R$ при фиксированном $x \in \overline{\Omega}$ представляет собой функционал Минковского для множества $K(x)$, т.е. $\mathcal{J}(x,p) = \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda} p \in K(x)\}$. При этом

$$\mathcal{J}^2(x,p) \begin{cases} < 1 \iff p \in \operatorname{int} K(x), \\ = 1 \iff p \in \partial K(x), \\ > 1 \iff p \notin K(x). \end{cases}$$

Ввиду наложенных условий на $K(x)$, функции $\mathcal{J}(x,p)$, $\mathcal{J}^2(x,p)$ обладают следующими свойствами:

1) $\mathcal{J}(x,p) = \dfrac{|p|}{r(x,\varphi_p)}$,

где $(|p|, \varphi_p)$ - сферические координаты точки $p \in R^n$;

2) $\mathcal{J} \in C^2(\overline{\Omega} \times R^n \setminus \{0\})$, $\mathcal{J}^2 \in C^2(\overline{\Omega} \times R^n)$;

3) $\mathcal{J}(x,p) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\partial}{\partial p_k} \mathcal{J}(x,p) \right) \cdot p_k$;

4) $\sum\limits_{k,\ell=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial p_k \partial p_\ell} \mathcal{J}^2(x,p) \xi_k \xi_\ell \geq \varepsilon_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^n$;

5) $m|p| \leq \mathcal{J}(x,p),\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{J}(x,p),\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \mathcal{J}(x,p) \leq M|p|$;

6) $m_1 |p|^2 \leq \mathcal{J}^2(x,p),\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{J}^2(x,p),\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \mathcal{J}^2(x,p) \leq M_1 |p|^2$;

7) $\left| \dfrac{\partial}{\partial p_k} \mathcal{J}(x,p) \right|,\ \left| \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial p_k} \mathcal{J}(x,p) \right| \leq A$.

Здесь $\varepsilon_0, m, m_1, M, M_1, A$ - положительные константы, $x \in \overline{\Omega}$, $i, j, k = 1, \ldots, n$.

<u>Регуляризация задачи (5)-(6)</u>. Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $\beta_\varepsilon : R \longrightarrow R$ - гладкая неубывающая выпуклая функция такая, что $\beta_\varepsilon(t) = 0$ при $t \leq 0$, $\beta_\varepsilon(t) =$

$= \dfrac{t-\varepsilon}{\varepsilon}$ при $t \geq 2\varepsilon$. Функция β_ε является штрафом для R_- .

Ввиду свойств 2 и 6 функции $\mathcal{J}^2(x,p)$, регуляризованная задача

$$Lu^\varepsilon + \beta_\varepsilon\left[\mathcal{J}^2(x,\nabla u^\varepsilon(x))-1\right] = f \qquad \text{в } \Omega, \tag{7}$$

$$u^\varepsilon = 0 \qquad \text{на } \partial\Omega \tag{8}$$

имеет единственное решение $u^\varepsilon \in C^2(\bar\Omega)$.

<u>Оценка</u> $|u^\varepsilon|_{C(\bar\Omega)}\, |\nabla u^\varepsilon|_{C(\partial\Omega)}$. Из теорем сравнения для эллиптических операторов следует неравенство

$$w(x) \leq u^\varepsilon(x) \leq v(x) \qquad \text{в } \bar\Omega,$$

где функция $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$ такая, что $Lv = f$ в Ω , $v=0$ на $\partial\Omega$, а w определена в условиях теоремы 1. Поскольку $v = u^\varepsilon = w =$ $= 0$ на $\partial\Omega$, то $\nabla u^\varepsilon(x) = \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial n}(x)$, $x \in \partial\Omega$ и

$$\frac{\partial w(x)}{\partial n} \leq \frac{\partial u^\varepsilon(x)}{\partial n} \leq \frac{\partial v(x)}{\partial n}, \qquad x \in \partial\Omega,$$

где n - вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке x .

<u>Оценка</u> $|\nabla u^\varepsilon|_{C(\bar\Omega)}$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v^\varepsilon(x) = \mathcal{J}^2(x,\nabla u^\varepsilon(x)) - \lambda u^\varepsilon(x),$$

где $\lambda > 0$. Пусть $v^\varepsilon(x)$ достигает максимума в точке $x_0 \in \bar\Omega$. Покажем, что при соответствующем выборе λ величину $v^\varepsilon(x_0)$ можно оценить константой, не зависящей от ε . Тогда, учитывая ограниченность $\{u^\varepsilon\}$ получаем равномерную оценку $\mathcal{J}^2(x,\nabla u^\varepsilon(x))$, и, следовательно, $\nabla u^\varepsilon(x)$ в $\bar\Omega$.

Если $x_0 \in \partial\Omega$ или $x_0 \in \Omega$, $v^\varepsilon(x_0) \leq 0$, то $|v^\varepsilon(x_0)| \leq const$ в силу полученных выше оценок. Пусть $x_0 \in \Omega$ и $v_\varepsilon(x_0) > 0$. Тогда

$$v^\varepsilon_{x_k} = \frac{d}{dx_k}\mathcal{J}^2(x,\nabla u^\varepsilon(x)) - \lambda u^\varepsilon_{x_k} = 0, \quad k=1,\dots,n, \tag{9}$$

$$0 \leq Lv^\varepsilon(x_0) = -a_{ij}(\mathcal{J}^2)_{kl}\, u^\varepsilon_{x_i x_k} u^\varepsilon_{x_j x_l} + (\mathcal{J}^2)_k Lu_{x_k} -$$

$$
-(\mathcal{J}^2)_k a u^\varepsilon_{x_k} - \lambda L u^\varepsilon + a\mathcal{J}^2 - a_{ij}\big[(\mathcal{J}^2)_{x_i x_j} +
$$

$$
+(\mathcal{J}^2)_{x_i x_k} u^\varepsilon_{x_j x_k} + (\mathcal{J}^2)_{k x_j} u^\varepsilon_{x_k x_i}\big] \,. \qquad (10)
$$

Здесь и далее частные производные $\mathcal{J}^2(x,p)$ по x_i обозначены через $(\mathcal{J}^2)_{x_i}$, а по p_k - через $(\mathcal{J}^2)_k$. Для простоты аргументы $\mathcal{J}$ и β_ε опускаются. Через C обозначены различные константы, не зависящие от ε.

Первое слагаемое в (10), ввиду эллиптичности оператора L и строгой выпуклости $K(x)$ (свойство 4)), оценивается сверху величиной $-\theta|D^2u^\varepsilon|^2$, $\theta = const > 0$. Дифференцируя уравнение (7), выведем выражение для Lu_{x_k}, и используя (9) и свойства функций $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2$, получаем из (10)

$$
0 \le C\mathcal{J}^2 + \lambda C - 2\lambda \mathcal{J}^2 \beta'_\varepsilon + \lambda\beta_\varepsilon \,.
$$

Не ограничивая общности, можно считать $\beta_\varepsilon\big(\mathcal{J}^2(x,\nabla u^\varepsilon(x)) - 1\big) \ge 1$, а в силу выпуклости $\beta_\varepsilon(t) \le t\beta'_\varepsilon(t)$, поэтому

$$
0 \le \beta'_\varepsilon \cdot \big[-\lambda \mathcal{J}^2 + C\mathcal{J}^2 + \lambda C\big] \,.
$$

Положив $\lambda > C$, придем к оценке $\mathcal{J}^2$, а следовательно, $v^\varepsilon(x_0)$.

<u>Оценка</u> $|\beta_\varepsilon(\mathcal{J}^2(x,\nabla u^\varepsilon(x)) - 1)|_{C(\bar\Omega')}$, $\bar\Omega' \subset \Omega$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$
v^\varepsilon(x) = \xi^2 \beta_\varepsilon\big(\mathcal{J}^2(x,\nabla u^\varepsilon(x)) - 1\big), \quad \xi \in C_0^\infty(\Omega).
$$

Пусть $v^\varepsilon(x)$ достигает максимума в точке $x_0 \in \bar\Omega$. Покажем равномерную по ε ограниченность $v^\varepsilon(x_0)$. Если $x_0 \in \partial\Omega$ или $x_0 \in \Omega$, $v^\varepsilon(x_0) = 0$, то $v^\varepsilon \equiv 0$. Если $x_0 \in \Omega$, $v^\varepsilon(x_0) > 0$, то $v^\varepsilon_{x_k}(x_0) = 0$, $k = 1,\dots,n$, $Lv^\varepsilon(x_0) \ge 0$. Оценивая $Lv^\varepsilon(x_0)$ аналогично предыдущему, получаем

$$
0 \le \beta'_\varepsilon\Big[C - \frac{\theta}{2}|D^2u^\varepsilon|^2\xi^2 - \xi^2(\mathcal{J}^2)_k L u^\varepsilon_{x_k}\Big] \,.
$$

Так как $\xi^2 Lu^\varepsilon + v^\varepsilon = \xi^2 f$ в Ω, то в точке x_0 выполняется $(\xi^2 Lu^\varepsilon)_{x_k} = (\xi^2 f)_{x_k}$, $k = 1,\dots,n$. Из последнего равенства можно выразить $\xi^2 Lu_{x_k}$. Окончательно

$$0 \leq \beta_\varepsilon' \left[C - \frac{\theta}{4} |D^2 u^\varepsilon|^2 \xi^2 \right],$$

откуда следует ограниченность $\xi^2 |D^2 u^\varepsilon|^2$, $\xi^2 |Lu^\varepsilon|^2$ и, следовательно, $v^\varepsilon(x)$ в точке x_0 .

Оценка $\|D^2 u^\varepsilon\|_{L^p_{loc}(\Omega)}$, $1 \leq p < \infty$, получается из второго основного неравенства для эллиптических операторов, поскольку равномерная ограниченность $\xi^2 \beta_\varepsilon$ приводит к оценке

$$|\xi^2 Lu^\varepsilon| \leq C \qquad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Таким образом, семейство $\{u^\varepsilon\}$ ограничено в $H^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap H^{1,\infty}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, поэтому можно выделить подпоследовательность $\{u^{\varepsilon'}\}$ такую, что $u^{\varepsilon'} \to u$ в $H^{2,p}_{loc}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, $u^{\varepsilon'} \to u$ в $C(\bar{\Omega})$, $u^{\varepsilon'}_{x_k} \to u_{x_k}$ в $C(\Omega)$. Для $u^{\varepsilon'}$ выполнены условия (1),(3),(4), поэтому этим условиям удовлетворяет (в указанном выше смысле) также предельная функция u . Из равномерной ограниченности $\xi^2 \beta_\varepsilon$ следует (2).

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Если* $f > 0$ *или* $a > 0$, *то решение задачи* (1)-(4) *единственно.*

Доказательство теоремы 2 в основном следует схеме, предложенной в [1, теорема 1.1] и отличается получением равенства $L\hat{u}(x) = f(x)$ для почти всех x из окрестности точки x_1 , в которой достигается положительный максимум функции $(1-\varepsilon)u - \hat{u}$ (обозначения из [1]) . Указанное равенство справедливо ввиду следующих рассуждений. В точке x_1 имеем $(1-\varepsilon)\nabla u(x_1) - \nabla\hat{u}(x_1) = 0$. Следовательно, векторы $\nabla u(x_1)$ и $\nabla\hat{u}(x_1)$ одинаково направлены, и $|\nabla\hat{u}(x_1)| < |\nabla u(x_1)|$. Из строгой выпуклости функционала $\mathcal{J}$ следует

$$\mathcal{J}(x_1, \nabla\hat{u}(x_1)) < \mathcal{J}(x_1, \nabla u(x_1)), \text{ т.е. } \nabla\hat{u}(x_1) \in \operatorname{int} K(x_1).$$

Далее предполагается $L = -\Delta$. Обозначим через $\varphi_{n(x)}$ сферические координаты вектора n внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Если* Ω *- выпуклая и*

1. $\max\limits_{x \in \bar{\Omega}} f(x) \leq 0$

или

2. $$\max_{x \in \bar{\Omega}} f(x) > 0, \quad \operatorname{diam} \Omega \leq \frac{2 \min\limits_{x \in \partial\Omega} r(x, \varphi_{n(x)})}{\max\limits_{x \in \bar{\Omega}} f(x)},$$

то $u \in H^{2,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Доказательство теоремы 3.

Условия теоремы 3 обеспечивают существование функции $V \in C^2(R^1)$ со следующими свойствами:

$$V_{tt} = -\max_{\bar{\Omega}} f, \quad \dot{V} \geq 0 \qquad \text{на } [0, diam\,\Omega],$$
$$V(0) = 0, \quad V_t(0) = \min_{x \in \partial\Omega} r(x, \varphi_{n(x)}).$$

Поэтому для каждой точки $x_0 \in \partial\Omega$ можно построить верхний барьер $v \in C^2(\bar{\Omega})$ такой, что

$$-\Delta v \geq f, \quad v\big|_{\partial\Omega} \geq 0, \quad v(x_0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}(x_0) \leq r(x_0, \varphi_{n(x_0)}).$$

Из теорем сравнения для эллиптических операторов следует неравенство

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x_0) \leq \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n}(x_0) \leq \frac{\partial v}{\partial n}(x_0),$$

где u^ε - решение регуляризованной задачи (7)-(8), а w определена в условиях теоремы 1. Так как

$$\frac{\partial w}{\partial n}(x_0), \frac{\partial v}{\partial n}(x_0) \in K(x_0),$$

то

$$\nabla u(x) = \frac{\partial u}{\partial n}(x) \in K(x) \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

Следовательно, $\forall x \in \partial\Omega \quad \beta_\varepsilon(\gamma^2(x, \nabla u^\varepsilon(x)) - 1) = 0$. Теперь, рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, можно получить равномерную ограниченность β_ε (или, что равнозначно, Lu^ε) в $\bar{\Omega}$, откуда следует оценка $\| u^\varepsilon \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq C$, $1 \leq p < \infty$.

В заключение автор благодарит проф. Н.Н. Уральцеву за помощь в работе.

Литература

1. Evans L.C. A second order elliptic equation with gradient constraint. - Comm.part.diff.eq. 1979, v.415, p. 555-572.
2. Lions P.L. An estimate of the Lipshitz Norm of Solutions of Variational Inequalities and Applications. - In : Variational inequalities and compl. problems, New-York, 1980, p. 241-246.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М.: Мир 1972. - 587 с.

4. Brezis H., Stampacchia G. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. - Bull.Soc.math.France, 1968, v.96, № 2, p.153-180.

5. Cimatti G. On a problem of the theory of lubrication governed by a variational inequality.- Appl.Mat.Opt.,1977,v.3,№2/3,p.227-242.