УДК 517.43

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ВОЛНОВЫХ СИСТЕМ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В.Ю. Новокшенов, И.Т. Хабибуллин (Уфа)

В работе рассматриваются две дифференциально-разностные системы:

$$\begin{cases} \dot{R}_n = (1 \pm |R_n|^2)(S_n^* - S_{n-1}^*), \\ \dot{S}_n = (1 \pm |S_n|^2)(R_{n+1}^* - R_n^*), \end{cases} \tag{0.1}$$

где $R_n = R(n,t)$, $S_n = S(n,t)$, $t > 0$, n пробегает все целые значения. Как обычно, точка над R_n, S_n обозначает производную по времени t, а знак " * " - комплексное сопряжение. При $t=0$ задается начальное условие

$$R_n(0) = R_n^0, \quad S_n(0) = S_n^0, \quad R_n^0, S_n^0 \in \ell_1. \tag{0.2}$$

Решение задачи Коши для каждой из систем (0.1) с условием (0.2) существует и единственно в классе ℓ_1 (см.§1, теорема 2).

Основной целью данной работы является построение и обоснование асимптотики решения задачи Коши (0.1), (0.2) при $t \to +\infty$. Асимптотика строится при некоторых дополнительных предположениях относительно начальных функций (0.2), которые, в частности, обеспечивают отсутствие солитонных решений для системы (0.1) со знаком " + ". Для коэффициентов асимптотики предъявляются явные выражения через элементы матрицы рассеяния, порожденной начальным потенциалом (0.2) (см.ниже формулы (0.5), (0.6)).

Системы вида (0.1), носящие название "самосопряженных схем" (self-dual networks), исследовались методом обратной задачи рассеяния в [1,2], где установлена полная интегрируемость этих систем и найдены частные решения типа солитонов. В [1] указан способ построения $(L-A)$-пары для широкого класса нелинейных дифференциально-разностных систем, включающий известную "цепочку Тода" [3]

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_n = \alpha_n (\beta_n - \beta_{n+1}), \\ \dot{\beta}_n = \alpha_{n-1} - \alpha_n, \end{cases} \tag{0.3}$$

где α_n, β_n вещественны. Сравнение соответствующих задач рассеяния для систем (0.1), (0.3) позволило найти отображение решений системы (0.1) со знаком "-" и с вещественными R_n, S_n в решения (0.3). Нелинейная замена, переводящая (0.1) в (0.3), имеет вид

$$\alpha_n = (1+R_{n-1})(1-R_n)(1-S_{n-1}^2),$$
$$\beta_n = S_{n-1}(1+R_{n-1}) - S_{n-2}(1-R_{n-1}).$$

Эта замена, вообще говоря, необратима, однако на те решения цепочки Тода, которые получаются таким образом, переносятся результаты относительно решений системы (0.1) (см.§6).

Асимптотическое разложение (а.р.) решения задачи (0.1), (0.2) при $t \to \infty$ имеет вид:

$$R_n(t) = \hat{R}_n(t) + O(t^{-\frac{1}{2}-\delta}), \quad S_n(t) = \hat{S}_n(t) + O(t^{-\frac{1}{2}-\delta}), \quad \delta>0, \tag{0.4}$$

где

$$\hat{R}_n(t) = \frac{r(x)}{\sqrt{t}} e^{-it\Phi_1} - \frac{s(x)}{\sqrt{t}} e^{it\Phi_2},$$

$$\hat{S}_n(t) = -\frac{r(x)}{\sqrt{t}} e^{it\Phi_1 + i\xi} + \frac{s(x)}{\sqrt{t}} e^{-it\Phi_2 - i\xi},$$

$x = \frac{n}{t}$, $r(x) = s(x) = 0$ при $|x|>1$; $\xi = \arccos x$, $0 \le \xi \le \pi$,

$$\Phi_{1,2} = 2(x\arccos x - \sqrt{1-x^2}) + t^{-1}(\gamma_{1,2}(x)\ln 2t + \beta_{1,2}(x)).$$

Амплитуды r, s представляют собой гладкие в интервале (-1,1) функции, имеющие интегрируемые особенности на концах интервала. Имеют место формулы:

$$r^2(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}} \ln|T_{22}(x+i\sqrt{1-x^2})|, \tag{0.5}$$

$$s^2(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}} \ln|T_{22}(x-i\sqrt{1-x^2})|, \quad |x|<1,$$

$$\gamma_1(x) = \mp 2r^2(x)\sqrt{1-x^2}, \quad \gamma_2(x) = \mp 2s^2(x)\sqrt{1-x^2}. \tag{0.6}$$

Здесь $T_{22}(z)$ - диагональный элемент матрицы рассеяния, заданной начальным условием (0.2), $T_{22}(z)$ - гладкая функция на окружности $|z|=1$ и $|T_{22}(z)|<1$ (см.§ 1). В выражениях для $\gamma_{1,2}$ верхний знак берется для системы (0.1) со знаком "+", нижний - со знаком "-". Формулы для функций $\beta_{1,2}$ более громоздки (они будут приведены ниже, в § 4).

Вне отрезка $[-1, 1]$ амплитуды r, s продолжаются нулем, так что решение нашей задачи асимптотически при $t\to\infty$ сосредоточено в конусе $|n|<t$. На это указывает также тот факт, что главный член фазы $2(x\arccos x-\sqrt{1-x^2})$ становится чисто мнимым при $|x|>1$.

Известный факт о том, что для решений дискретных волновых систем область зависимости конечна , по-видимому, является достаточно общим и справедливым не только для вполне интегрируемых систем. Он справедлив и тогда, когда непрерывный аналог (уравнение с частными производными) соответствующей дискретной системы не обладает указанным свойством.

Метод построения и доказательства асимптотики (0.4) в основном повторяет аналогичные методы для вполне интегрируемых уравнений с частными производными [4,5] . Он состоит в исследовании линейных уравнений прямой задачи рассеяния с приближенным потенциалом вида (0.4). Неопределенные коэффициенты амплитуды и фазы, входящие в этот потенциал, определяются из условия совпадения точной и приближенной матриц рассеяния. Теорема 4, §1 о непрерывной зависимости потенциала от матрицы рассеяния позволяет оценить в норме ℓ_2 разность между точным и приближенным решениями нелинейной системы (0.1). Доказательства этой теоремы и теоремы существования и единственности решения основаны на сведении обратной задачи рассеяния к задаче Римана об аналитической факторизации матриц-функций на окружности $|z|=1$. Необходимая техника связанная с применением задачи Римана для интегрирования дискретных систем, намеченная в [3], подробно излагается в § 1.

Отметим, что методом обратной задачи получается аналитическое выражение для решения задачи Коши (0.1),(0.2) (см. ниже формулы (1.12)), но непосредственно из этих формул получение а.р. решения при $t\to\infty$ затруднительно.

§ 1,3,6 написаны И.Т. Хабибуллиным, остальные - В.Ю.Новокшеновым.

§1. Метод обратной задачи рассеяния для дифференциально-разностных уравнений

1. В [1] построена $(L - A)$- пара для системы (0.1), т.е. найдена пара матриц $P_n^{\pm}$, $Q_n^{\pm}$ таких, что система (0.1) является условием сов-

местности двух линейных дифференциально-разностных матричных уравнений:

$$\dot{V}_n = P_n^{\pm} V_n , \tag{1.1}$$

$$V_{n+1} = Q_n^{\pm} V_n , \tag{1.2}$$

где $V_n = \begin{pmatrix} V_1(n,t,z) \\ V_2(n,t,z) \end{pmatrix}$, $P_n^{\pm}$, $Q_n^{\pm}$ - комплекснозначные 2 x 2 - матрицы, зависящие от n , t , z ;

$$P_n^{\pm} = \begin{pmatrix} \mp\frac{1}{2}(z-z^{-1}) \pm R_n^* S_{n-1}^* & \mp S_{n-1} z^{-1} - R_n^* \\ S_{n-1}^* z \mp R_n & \mp \frac{1}{2}(z-z^{-1}) \pm R_n S_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$Q_n^{\pm} = \begin{pmatrix} z + R_n S_n & \mp R_n^* + S_n z^{-1} \\ R_n \mp S_n^* z & z^{-1} + R_n^* S_n^* \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Здесь $R_n, S_n \in \ell_1$, $z \in \mathbb{C}$ - спектральный параметр, $|z|=1$. Знаки "+" и "-" в матрицах $P_n^{\pm}, Q_n^{\pm}$ соответствуют знакам "±" в правой части системы (0.1).

Пусть существует общее решение V_n , удовлетворяющее уравнениям (1.1), (1.2) с заданными абсолютно суммируемыми коэффициентами $R_n(t)$, $S_n(t)$. Тогда R_n , S_n удовлетворяют нелинейной системе (0.1). В этом нетрудно убедиться, дифференцируя по t уравнение (1.2), вычисляя $\dot{V}(n+1)$ в уравнении (1.1) и приравнивая получившиеся правые части.

Для уравнения (1.2) определим матрицу рассеяния - основной объект, по которому строятся совместные решения (1.2),(1.1). Чтобы не загромождать статью выкладками, будем работать только с системой (0.1) со знаком "+". Формулы для второй системы аналогичны (см. §6).

Построим решения уравнения (1.2) с заданными асимптотиками на бесконечности

$$\begin{gathered} \psi_1(n,t,z) \to \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} z^{-n} e^{-\frac{t}{2}(z-z^{-1})}, \quad \varphi_2(n,t,z) \to \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} z^{n} e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})}, \; n \to -\infty, \\ \psi_2(n,t,z) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z^{n} e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})}, \quad \varphi_1(n,t,z) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} z^{-n} e^{-\frac{t}{2}(z-z^{-1})}, \; n \to +\infty. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $t \geq 0$, а постоянная K будет определена ниже.

Решения (1.5) $\{\Psi_1, \Phi_2\}$ и $\{\Psi_2, \Phi_1\}$ представляют собой два фундаментальных решения (1.2), поэтому общее решение уравнений (1.1),(1.2) является линейной комбинацией $\{\Psi_1, \Phi_2\}$ и $\{\Psi_2, \Phi_1\}$ с коэффициентами, зависящими лишь от t и z . Но поскольку при $n \to \infty$ $\{\Psi_1, \Phi_2\}, \{\Psi_2, \Phi_1\}$ удовлетворяют (1.1), то они являются решениями (1.1) при всех n . Таким образом, существует матрица T , называемая матрицей рассеяния, зависящая только от z и осуществляющая переход от второго фундаментального решения к первому

$$\Phi_2 = T_{11}(z)\Psi_2 + T_{21}(z)\Phi_1, \tag{1.6}$$

$$\Psi_1 = T_{12}(z)\Psi_2 + T_{22}(z)\Phi_1.$$

Вронскианом $H(V, U)$ двух решений уравнения (1.2) называется определитель матрицы $\{V, U\}$. Закон изменения вронскиана по n выражается разностным аналогом формулы Лиувилля

$$H(n) = H(-\infty)\prod_{K=-\infty}^{n}(1+|R_K|^2)(1+|S_K|^2), \tag{1.7}$$

которая непосредственно следует из вида матрицы Q^+ в уравнении (1.2). Из соотношений (1.5),(1.6) имеем

$$H(\Phi_2, \Phi_1)(+\infty) = T_{11}(z), \quad H(\Phi_2, \Phi_1)(-\infty) = \frac{T_{11}(z)K^2}{\det T}.$$

Отсюда, по формуле (1.7), получаем, что величина $\prod_{-\infty}^{\infty}(1+|R_K|^2)(1+|S_K|^2)$ не зависит от t , т.е. является законом сохранения для решений нелинейной системы (0.1) (см. [1]). Полагая

$$K^2 = \prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+|R_n|^2\right)^{-1}\left(1+|S_n|^2\right), \tag{1.8}$$

получаем $\det T(z) = 1$ при $|z| = 1$, (1.8')

$$H(\Psi_2, \Psi_1)(+\infty) = T_{22}(z), \quad H(\Phi_2, \Phi_1)(+\infty) = T_{11}(z).$$

Из асимптотик (1.5) и уравнения (1.2) при $R_n, S_n \in \ell_1$ можно показать (см. [3]), что функции $\Psi_1 z^n e^{-\frac{t}{2}(z-z^{-1})}$, $\Psi_2 z^{-n} e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})}$ аналитически продолжаются во внутрь единичного круга $|z|\leqslant 1$, а функции $\Phi_1 z^n e^{-\frac{t}{2}(z-z^{-1})}$, $\Phi_2 z^{-n} e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})}$ - во внешность его, причем последние ограничены при $z\to\infty$. Тогда из последних соотношений для вронскиана следует, что матричные элементы T_{11}, T_{22} аналитичны соответственно внутри и вне единичного круга $|z|\leqslant 1$. Симметрия уравнения (1.2) относительно замены

$$V_1(n,t,z)\mapsto -V_2^*(n,t,(z^*)^{-1}),\ V_2(n,t,z)\mapsto V_1^*(n,t,(z^*)^{-1})$$

показывает, что

$$T_{12}^*(z) = -T_{21}(z),\quad |z|=1,$$

$$T_{11}^*(z^*) = T_{22}(z^{-1}),\quad |z|\leqslant 1.$$

Составим из базисных решений Ψ, Φ матрицы:

$$\begin{aligned} C_1(n,t,z) &= \left\{\Phi_2 T_{11}^{-1} z^{-n} e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})},\ \Phi_1 z^n e^{-\frac{t}{2}(z-z^{-1})}\right\}, \\ C_2(n,t,z) &= \left\{\Psi_2 z^{-n} e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})},\ \Psi_1 T_{22}^{-1} z^n e^{-\frac{t}{2}(z-z^{-1})}\right\}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Матрицы C_1, C_2, по построению, обладают свойством аналитичности по z соответственно вне и внутри единичного круга. При $|z|=1$ выполняются равенства (1.6), которые можно переписать в виде:

$$C_1 G = C_2, \tag{1.10}$$

где

$$G(n,t,z) = \begin{pmatrix} 1 & T_{12}T_{22}^{-1} z^{2n} e^{-t(z-z^{-1})} \\ -T_{21}T_{11}^{-1} z^{-2n} e^{t(z-z^{-1})} & T_{11}^{-1}T_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Матрица G называется приведенной матрицей рассеяния для уравнения (1.2). Задача о нахождении матриц C_1, C_2, аналитических по z в соответствующих областях и удовлетворяющих (1.10) при $|z|=1$, называется задачей Римана об аналитической факторизации матрицы-функции G на окружности $|z|=1$.

Таким образом, если уравнения (1.1),(1.2) имеют общее решение для некоторых R_n, $S_n \in \ell$, то матрицы (1.9), составленные из базисных решений (1.2), дают решение задачи Римана (1.10).

2. Вычисление матрицы G по заданным R_n, S_n называется решением прямой задачи рассеяния. Оно сводится, как мы видели, к решению задачи Коши для линейной разностной системы уравнений (1.2) с начальными условиями (1.5) при $n \to \infty$. Определение функций R_n, S_n - "потенциала" системы уравнений (1.2) по заданной матрице G - называется решением обратной задачи рассеяния. При некоторых условиях на матричные элементы T_{ij} эта задача, сводящаяся к аналитической факторизации (1.10) матрицы G, однозначно разрешима.

Приведем один из способов ее решения. Будем предполагать выполненными следующие условия:

1°. $T(z) \in C^\infty$ и $\det T = 1$ на окружности $|z| = 1$.

2°. $T_{21}(z) = -T^*_{12}(z)$ при $|z| = 1$,

$T_{22}(z^{-1}) = T^*_{11}(z^*)$ при $|z| \geq 1$.

3°. $T_{22}(z)$ аналитически продолжается в круг $|z| < 1$ и не обращается в нуль при $|z| \leq 1$.

Введем класс W (банахову алгебру Винера [7]) матриц-функций от z таких, что их элементы разлагаются при $|z| = 1$ в абсолютно сходящиеся ряды Фурье $\sum c_n z^n$. Легко видеть, что условие 1° обеспечивает $T \in W$.

Класс $W^+ (W^-)$ будут составлять матрицы из W с элементами, представимыми в виде $\sum\limits_{n \geq 0} c_n z^n$ $(\sum\limits_{n \leq 0} c_n z^n)$.

Теорема 1. *Пусть матрица $T(z)$ удовлетворяет условиям 1°-3°. Тогда для матрицы G (1.11), составленной из элементов T, существует единственное решение задачи Римана (1.10) с условиями: $C_1 \in W^-$, $C_2 \in W^+$,*

$$\det C_1 \neq 0, \quad |z| \geq 1, \quad \det C_2 \neq 0, \quad |z| \leq 1, \tag{1.12}$$

$$C_1(n,t,\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}, \quad C_2(n,t,0) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

где звездочки означают, что соответствующие элементы матриц C_1, C_2 не фиксируются.

Доказательство. Существование решения регулярной задачи Римана (1.10), т.е. задачи Римана с условиями (1.12), следует из теоремы 1 из [7], так как при выполнении условий 1°-3° матрица G положительно определена и принадлежит W. Нормировка (1.13) фиксирует единственное решение задачи Римана, поскольку, в силу аналитичности и ограниченности матриц C_1, C_2, различные решения задачи Римана могут отличаться лишь постоянными по z матричными множителями (см.[3]).

Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть матрицы C_1, C_2 являются решением задачи Римана (1.10), (1.12), (1.13). Тогда вектор-столбцы матриц*

$$\{\Phi_2, \Phi_1\} = C_1(n,t,z)\begin{pmatrix} z^n e^{-\frac{t}{2}(z-z^{-1})}T_{11} & 0 \\ 0 & z^{-n}e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})} \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

$$\{\Psi_2, \Psi_1\} = C_2(n,t,z)\begin{pmatrix} z^n e^{-\frac{t}{2}(z-z^{-1})} & 0 \\ 0 & z^{-n}e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})}T_{22} \end{pmatrix}$$

составляют совместные решения систем (1.1), (1.2) с асимптотиками (1.5).

Доказательство. Самосопряженность матрицы обусловливает симметрию решений задачи (1.10), (1.12), (1.13):

$$C_1(n,t,z) = \sigma\bar{C}_2(n,t,(z^*)^{-1})\sigma^{-1}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Здесь черта сверху обозначает взятие комплексного сопряжения от всех элементов матрицы C_2.

По построению, для матрицы G выполняется рекуррентное соотношение

$$G(n+1,t,z) = ZG(n,t,z)Z^{-1},$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда и решения задачи Римана в точках n, $n+1$ связаны между собой равенством

$$C_1(n+1,t,z)ZC_1^{-1}(n,t,z) = C_2(n+1,t,z)ZC_2^{-1}(n,t,z) = F(n,t,z). \tag{1.16}$$

В силу аналитических свойств C_1, C_2, матрица $F(n,t,z)$ является многочленом первой степени относительно z, z^{-1}:

$$F = F_{-1} z^{-1} + F_c + F_1 z . \qquad (1.17)$$

Для вычисления F_{-1}, F_1 используем нормировку (1.13):

$$F_1 = \lim_{z\to\infty} z^{-1} F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_n & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y_{n-1} x_n^{-1} & x_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{-1} = \lim_{z\to 0} z F = \begin{pmatrix} x_n^* & -y_n^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_{n-1}^*)^{-1} & y_{n-1}/x_{n-1}^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -y_n^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При вычислении F_0 используем симметрию (1.15). Матрица F_0 имеет следующий вид:

$$F_0 = \begin{pmatrix} a_n & -b_n^* \\ b_n & a_n^* \end{pmatrix}.$$

Из равенства (1.10) легко видеть, что $\det C_1 = \det C_2 = d_n$. По теореме Лиувилля, x_n не зависит от z. Вычисляя $\det F = d_{n+1}/d_n$ непосредственно из формулы (1.17), находим, что $a_n = -b_n y_n^*$. Отсюда F имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} z - b_n y_n^* & -y_n^* z^{-1} - b_n^* \\ b_n + y_n z & z^{-1} - b_n^* y_n \end{pmatrix},$$

т.е. совпадает с матрицей Q^+ в уравнении (1.2), если положить $R_n = b_n$, $S_n = -y_n^*$.

Доказательство выполнения условий (1.5) проводится точно так же, как и в непрерывном случае (см. [5, теорема 3.1]).

Дифференцируя равенство (1.10) по t и рассуждая как и выше, убеждаемся, что матрицы (1.14) удовлетворяют уравнению (1.1).

Лемма доказана.

Следствие леммы 1. *Для матричного уравнения (1.2) имеют место явные формулы решения обратной задачи рассеяния:*

$$S_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{T_{12}(z)}{T_{22}(z)} z^{2n-1} C_{1,11}(n,t,z) e^{t(z-z^{-1})} dz,$$

(1.18)

$$R_n^* = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{T_{12}(z)}{T_{22}(z)} z^{2n} \frac{C_{1,11}(n,t,z)}{\overline{C}(n,t)} e^{t(z-z^{-1})} dz,$$

где $\overline{C} = \int\limits_{|z|=1} C_{1,11} dz$, $C_{1,ij}$ *- элементы* i *-й строки,* j *-го столбца матрицы* C_1 *, определенной факторизацией (1.10) по приведенной матрице рассеяния (1.11). Функции* R_n *,* S_n *удовлетворяют нелинейной системе (0.1) при* $t > 0$ *.*

Доказательство. Вычислив коэффициент Фурье при z^{-1} в равенстве $Q^+ = C_2(n+1,t,z) Z C_2^{-1}(n,t,z)$, вытекающем из (1.16), получим первую из формул (1.18). Для получения второй формулы вычислим коэффициент Фурье при z^0 в равенстве $Q^+(n,t,z) = C_1(n+1,t,z) Z C_1^{-1}(n,t,z)$. По лемме 1, существует совместное решение уравнений (1.1), (1.2) при $t > 0$, так что найденные R_n , S_n являются решением (0.1).

Что и требовалось.

Доказанные утверждения позволяют использовать следующий алгоритм решения задачи Коши для нелинейной системы (0.1).

По заданным начальным условиям (0.2) вычисляется матрица рассеяния $T(z)$ путем решения задачи Коши для разностного уравнения (1.2) с асимптотикой (1.5) при $n \to \infty, t = 0$. По формуле (1.11) составляется приведенная матрица рассеяния $G(n,t,z)$ для произвольного $t > 0$ и решается задача Римана (1.10) , (1.12) , (1.13). Определив матрицы C_1 , C_2 , находим решение нелинейной системы (0.1) по формуле (1.18). В этом состоит метод обратной задачи рассеяния. Из теоремы 1, леммы 1 и ее следствия вытекает

Теорема 2. *Пусть начальные условия (0.2) системы (0.1) таковы, что для матрицы рассеяния* $T(z)$ *выполнены условия* 1^0-3^0. *Тогда существует единственное решение задачи Коши (0.1), (0.2), принадлежащее классу* ℓ_1 *при любом* $t > 0$ *.*

Условия 1^0,3^0 на элементы матрицы $T(z)$ налагают некоторые дополнительные условия на начальные данные (0.2).

Теорема 3. *Для того чтобы элементы матрицы рассеяния* $T(z)$ *были бесконечно дифференцируемыми функциями на окружности* $|z| = 1$ *, достаточно, чтобы функции* $R_n(0)$, $S_n(0)$ *убывали при* $|n| \to \infty$ *быстрее любой степени* n*.*

Для того чтобы диагональный элемент $T_{22}(z)$ не обращался в нуль в круге $|z| \leq 1$, достаточно, чтобы ℓ_1-нормы $R_0(0), S_n(0)$ были бы меньше некоторой заданной постоянной.

Доказательство. Поскольку элементы матрицы $T(z)$ выражаются через специальные решения (1.5) системы уравнений (1.2), докажем сначала дифференцируемость по z функций Ψ_i, Φ_i, $i=1,2$, (1.5), когда спектральный параметр изменяется на окружности $|z| = 1$.

Построим функцию Ψ_1 методом последовательных приближений. Замена зависимой переменной

$$U_n = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \Psi_1(n,t,z) z^n e^{\frac{t}{2}(z-z^{-1})} - \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

приводит уравнение (1.2) к виду

$$U_{n+1} = XU_n + \tilde{Q}_n U_n + \tilde{Q}_n V, \tag{1.20}$$

где X и $\tilde{Q}_n$ - квадратные матрицы, V - вектор:

$$X = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q}_n = \begin{pmatrix} R_n S_n z & S_n - R_n^* z \\ R_n z - S_n^* z^2 & R_n^* S_n^* z \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}.$$

Ищем решение системы (1.20) с нулевыми граничными условиями при $n \to -\infty$, используя следующий итерационный процесс:

$$U_{n+1}^j - XU_n^j = \tilde{Q}_n U_n^{j-1} + \tilde{Q}_n V.$$

Разрешая его относительно j-й итерации, получаем

$$U_{n+1}^j = \sum_{k=-\infty}^{n} X^{n-k} \tilde{Q}_k U_k^{j-1} + \sum_{k=-\infty}^{n} X^{n-k} \tilde{Q}_k V. \tag{1.21}$$

Все U_n^j лежат в пространстве W^2 двумерных векторов с координатами из банаховой алгебры W и

$$U_n^0 \equiv 0, \quad U_n^1 = \sum_{k=-\infty}^{n} X^{n-k} \tilde{Q}_k V, \ldots .$$

Обозначим $N(j,n) = \max_{m<n} \| U_m^j - U_m^{j-1} \|_{W^2}$. Вычислив норму от обеих частей равенства (1.21), получаем следующее неравенство:

$$N(j,n+1) \leq N(j-1,n)\sum_{K=-\infty}^{n} \| X^{n-K}\tilde{\alpha}_K \| \leq N(j-1,n) C \sum_{K=-\infty}^{n} (|R_K|+|S_K|),$$

где C - некоторая константа.

Решение этого неравенства дает при всех $n<n_0$ оценку $N(j,n)\leq \rho^j$. Здесь $n_0 \ll 0$ выбрано так, чтобы выполнялось условие

$$\rho = C\sum_{K=-\infty}^{n_0} (|R_K|+|S_K|) < 1.$$

Следовательно, итерационный ряд

$$U_n = U_n^0 + (U_n^1 - U_n^0) + (U_n^2 - U_n^1) + \ldots$$

мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем $\rho<1$. Его сумма U_n при всех n принадлежит W^2, причем имеет место неравенство

$$\| U_n \|_{W^2} \leq C^2(\| R_n \|_{\ell_1} + \| S_n \|_{\ell_1}). \tag{1.22}$$

Покажем, что $\partial U_n/\partial z \in W^2$. Продифференцировав по z равенство (1.21), имеем

$$\frac{\partial U_n^j}{\partial z} = \sum_{K=-\infty}^{n} X^{n-K}\tilde{Q}_K \frac{\partial U_K^{j-1}}{\partial z} + F, \tag{1.23}$$

где

$$F = \sum_{K=-\infty}^{n}\left[(n-K)X^{n-K-1}\frac{\partial X}{\partial z}\tilde{Q}_K + X^{n-K}\frac{\partial \tilde{Q}_K}{\partial z}\right]\left[U_K^{j-1}+V\right]. \tag{1.24}$$

Заметим, что $F \in W^2$, так как ряды в (1.24) абсолютно сходятся в силу быстрого убывания R_n, S_n.

Полностью повторяя рассуждения предыдущего этапа доказательства, получаем сходимость итерации (1.23). Тем самым доказана дифференцируемость U_n.

Индукцией легко показать, что $\frac{\partial^p}{\partial z^p} U_n \in W^2$ при любом целом $p>0$.

Итак, U_n, а следовательно, и ψ_1 бесконечно дифференцируемы. Дифференцируемость остальных решений задачи Коши (1.2), (1.5) доказывается аналогично. Элементы матрицы рассеяния получаются взятием вронскиана в разложении (1.6), поэтому они бесконечно дифференцируемы.

Осталось доказать утверждение теоремы об условии отсутствия дискретного спектра.

Для тривиального случая (1.2) $R_n \equiv 0$, $S_n \equiv 0$ матрица рассеяния равна единичной. В силу непрерывности в прямой задаче рассеяния (см. (1.22)) имеем

$$\| 1 - T_{22} \|_W < C\left(\| R_n \|_{\ell_1} + \| S_n \|_{\ell_1} \right).$$

Ясно, что при достаточно малых $\| R_n \|_{\ell_1}$, $\| S_n \|_{\ell_1}$ из теоремы Руше о сравнении нулей регулярных функций следует, что $T_{22} \neq 0$ при $|z| < 1$.

Теорема доказана.

3. Перейдем к доказательству одного из вариантов теоремы о непрерывной зависимости потенциала R_n, S_n от матрицы рассеяния T. Эта теорема будет использована ниже, в § 5, для оценки остаточного члена разложений (0.4).

Положим

$$\| T \|_{L_2} = \max_{1 \le i,j \le 2} \| T_{ij} \|_{L_2}, \quad \| f \|^2_{L_2} = \int_{|z|=1} |f(z)|^2 dz.$$

Пусть имеется приближенная матрица рассеяния $\hat{T}(z,t)$, удовлетворяющая условиям 1°-3°, такая что

$$\begin{aligned} &\| T_{22}(z) - \hat{T}_{22}(z,t) \|_{L_2} < Mt^{-\delta}, \quad \delta > 0, \\ &\| T_{12}(z) e^{-t(z-z^{-1})} - \hat{T}_{12}(z,t) \|_{L_2} < Mt^{-\delta}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

где постоянные M, δ не зависят от t.

По матрице $\hat{T}$ построим приведенную матрицу рассеяния $\hat{G}$ по формуле (1.11) и найдем решение регулярной задачи Римана

$$\hat{C}_1 \hat{G} = \hat{C}_2. \tag{1.26}$$

Теорема 4. *Если матрицы T и $\hat{T}$ удовлетворяют условиям 1°-3° и выполнены оценки (1.25), то для множителей факторизации $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$ задачи Римана (1.26) выполнены оценки*

$$\| C_1 - \hat{C}_1 \|_{L_2} < M_1 t^{-\delta}, \quad \| C_2 - \hat{C}_2 \|_{L_2} < Mt^{-\delta}, \quad \delta > 0, \tag{1.27}$$

причем постоянные M_1, δ не зависят от t.

Доказательство. В силу невырожденности матриц G, $\hat{G}$ и их множителей факторизации, достаточно показать, что из

$$G\hat{G}^{-1} = I + t^{-\delta}A, \quad \|A\|_{L_2} < const, \tag{1.28}$$

следует $C_1\hat{C}_1^{-1} = I + t^{-\delta}B_1, \ \|B_1\|_{L_2} < const$, и аналогичное соотношение для C_2 .

Из эрмитовой сопряженности матриц T и $\hat{T}$ (условие 2°) следуют оценки (1.25) для матричных элементов T_{21} , T_{11} . Пользуясь тем, что T_{22} , T_{11} не обращаются в нуль при $|z| = 1$ и норма множителей вида $z^n e^{t(z-z^{-1})}$ равна 1, получаем $\|G - \hat{G}\|_{L_2} < Mt^{-\delta}$ равномерно по n . Отсюда следует представление (1.28).

Будем искать решение задачи (1.26)

$$I + t^{-\delta}\hat{C}_1 A \hat{C}_1^{-1} = (I + t^{-\delta}B_1)(I + t^{-\delta}B_2) \tag{1.29}$$

в виде

$$B_1 = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\delta k} A_k^+(n,t,z), \quad B_2 = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-\delta k} A_k^-(n,t,z),$$

где коэффициенты A_k^+ аналитичны по z во внешности единичного круга $|z| \le 1$ и ограничены, а A_k^- аналитичны внутри этого круга. Найдем $A_k^\pm$ из следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
A_0^+ + A_0^- &= \hat{C}_1 A \hat{C}_1^{-1}, \\
A_1^+ + A_1^- &= -A_0^+ A_0^-, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_k^+ + A_k^- &= -A_0^+ A_{k-1}^- - \ldots - A_{k-1}^+ A_0^- .
\end{aligned}$$

Из условия 1° для матриц T , $\hat{T}$ и теоремы 1 следует $\hat{C}_1 A \hat{C}_1^{-1} \in W$, поэтому

$$A_0^\pm = \Pi^\pm \hat{C}_1 A \hat{C}_1^{-1}, \quad A_k^\pm = -\Pi^\pm (A_0^+ A_{k-1}^- + \ldots + A_{k-1}^+ A_0^-).$$

Здесь $\Pi^+(\Pi^-)$ - проектор на подпространство $W^+(W^-)$:

$$\Pi^+\left(\sum_n c_n z^n\right) \stackrel{def}{=} \sum_{n \ge 0} c_n z^n, \quad \Pi^+ + \Pi^- = I.$$

Норма оператора $\Pi^{\pm}$, как оператора $L_2 \to L_2$, равна единице, следовательно,

$$\|A_0^{\pm}\|_{L_2} \leqslant \|\hat{C}_1 A \hat{C}_1^{-1}\|_{L_2} \leqslant M, \quad \|A_1^{\pm}\|_{L_2} \leqslant M^2, \dots,$$

$$\|A_k^{\pm}\|_{L_2} \leqslant k M^{k+1}, \dots .$$

В силу оценки (1.28), постоянная M не зависит от n, t. Следовательно, ряды (1.29) сходятся в норме L_2, и нормы B_1, B_2 ограничены постоянной, не зависящей от n, t. Из (1.10), (1.28), (1.29) имеем

$$\hat{C}_1 C_1^{-1} C_2 C_2^{-1} = \hat{C}_1 G \hat{C}_2^{-1} = \hat{C}_1 (\hat{G} + t^{-\delta} A \hat{G}) C_2^{-1} = I + t^{-\delta} \hat{C}_1 A \hat{C}_1^{-1} = (I + t^{-\delta} B_1)(I + t^{-\delta} B_2),$$

откуда следует оценка (1.27). Теорема доказана.

§ 2. Внешнее разложение в задаче рассеяния

В этом параграфе будет формально вычислен главный при $t \to \infty$ член а.р. решения прямой задачи рассеяния (1.4) с потенциалом (0.4) вне особой точки $x = \cos\theta$. Из явных формул будет найдена его асимптотика при $x \to \cos\theta$. Все выкладки по-прежнему ведутся только для нелинейной системы (0.1) со знаком "+".

1. В систему (1.2) подставим потенциал (0.4) и произведем замену:

$$V_1 = z^n \prod_{k=-\infty}^{n-1} (1 + \hat{R}_k \hat{S}_k z^{-1}) v_1,$$

$$V_2 = z^{-n} \prod_{k=-\infty}^{n-1} (1 + \hat{R}_k^* \hat{S}_k^* z) v_2, \tag{2.1}$$

$$A_n = \frac{\hat{R}_n - z \hat{S}_n^*}{1 + \hat{R}_n^* \hat{S}_n^* z} z^{2n+1} \prod_{k=-\infty}^{n-1} \frac{1 + \hat{R}_k \hat{S}_k z^{-1}}{1 + \hat{R}_k^* \hat{S}_k^* z}.$$

Написанные бесконечные произведения в действительности конечны, поскольку функции $\hat{R}_n$, $\hat{S}_n$ финитны.

Всюду в дальнейшем в § 2,3 спектральный параметр z считается фиксированным, $z = e^{i\theta}$, $0 < |\theta| < \pi$.

Система (1.2) примет вид:

$$\begin{cases} v_1(n+1) = v_1(n) - A_n^* v_2(n), \\ v_2(n+1) = v_2(n) + A_n v_1(n). \end{cases} \tag{2.2}$$

Поставим краевые условия для системы (2.2) при $n \to \pm\infty$, исходя из асимптотик (1.5):

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}, \; n \to -\infty, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} s_{12}(z,t)e^{-t(z-z^{-1})} \\ s_{22}(z,t) \end{pmatrix}, \; n \to +\infty. \tag{2.3}$$

Здесь постоянная K определена формулой (1.8) при $R_n = R_n(0), S_n = S_n(0)$,

$$s_{12}(z,t) = T_{12}(z)\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+\hat{R}_n\hat{S}_n z^{-1}\right)^{-1}, \; s_{22}(z,t) = T_{22}(z)\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+\hat{R}_n^*\hat{S}_n^* z\right)^{-1}. \tag{2.4}$$

Элементы матрицы рассеяния T_{12} , T_{22} заданы формулами (1.5), (1.6) из решения уравнения (1.2) при $t=0$ с начальными условиями $R_n(0), S_n(0)$.

Предложение 1. *Если функции* $\hat{R}_n$, $\hat{S}_n$ *удовлетворяют условиям* (0.4) , *то матричные элементы* (2.4) *имеют следующее а.р. при* $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} s_{12}(z,t) &= T_{12}(z)\exp\int_{-1}^{1}\left[r^2(x)e^{i(\xi-\theta)} + s^2(x)e^{-i(\xi+\theta)}\right]dx + O(t^{-\frac{1}{4}}), \\ s_{22}(z,t) &= T_{22}(z)\exp\int_{-1}^{1}\left[r^2(x)e^{-i(\xi-\theta)} + s^2(x)e^{i(\xi+\theta)}\right]dx + O(t^{-\frac{1}{4}}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Доказательство. Преобразуем произведения в формулах (2.4), учитывая финитность амплитуд r , s функций $\hat{R}_n$, $\hat{S}_n$:

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+\hat{R}_n\hat{S}_n z^{-1}\right) = \exp\sum_{n=-t}^{t}\ln\left(1+\hat{R}_n\hat{S}_n z^{-1}\right) =$$

$$= \exp t^{-1}\sum_{n=-t}^{t}\left\{-r^2(x)\cdot e^{i(\xi-\theta)} - s^2(x)e^{-i(\xi+\theta)} + 2rs\cos\left[t(\Phi_1+\Phi_2)+\xi\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_{-1}^{1}\left[r^2(x)e^{i(\xi-\theta)} + s^2(x)e^{-i(\xi+\theta)}\right]dx + O(t^{-\frac{1}{4}})\right\}.$$

Последнее равенство получено предельным переходом от суммы к интегралу при $t \to \infty$, $x = \frac{n}{t}$. Остаточный член обусловлен интегралом от быстроосциллирующего косинуса, главный член фазы которого $\Phi_1 + \Phi_2$ имеет стационарные точки при $x = \pm 1$, а амплитуда $r(x)s(x)$ в силу формул (0.5) имеет особенность $O\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ при $|x| \to 1$. Второе произведение (2.4) комплексно сопряжено первому. Предложение доказано.

Чтобы избавиться от бесконечного произведения в системе (2.2), перейдем к уравнению для v_2 :

$$B_n\left[v_2(n+2)-v_2(n+1)\right]=B_{n+1}z^2\left[v_2(n+1)-v_2(n)\right]-t^{-1}z^2B_{n+1}|B_n|^2v_2(n), \tag{2.6}$$

где $B_n = \sqrt{t}(\hat{R}_n - z\hat{S}_n^*) = r(x)(1+e^{i(\theta-\xi)})e^{-it\Phi_1} -$

$$-s(x)\left(1+e^{i(\theta+\xi)}\right)e^{it\Phi_2}, \quad x=\frac{n}{t}, \quad z=e^{i\theta}, \quad \xi = \arccos x.$$

В уравнении (2.6) мы пренебрегаем членами вида $\hat{R}_n\hat{S}_n = O(t^{-1})$, возникающими при разложении множителя $(1+\hat{R}_n\hat{S}_n z)^{-1}$. Здесь так же, как и выше, амплитуды r, s и фазы Φ_1, Φ_2 являются гладкими в интервале (-1, 1), $r(x)=s(x)=0$ при $|x|>1$.

2. Будем искать формальное а.р. решения уравнения (2.6) в виде

$$v_2 = \hat{v}_2 + O(t^{-2}), \quad t \to \infty,$$

$$\hat{v}_2 = w_0(x,z) + t^{-1}w_1(x,z)e^{-it(\Phi_1+\Phi_2)} + t^{-1}w_2(x,z)e^{it(\Phi_1+\Phi_2)}. \tag{2.7}$$

Предположим, что функции w_0, w_1, w_2 гладкие по x в интервалах (-1, $\cos\theta$), ($\cos\theta$, 1), тогда, разлагая при $t \to \infty$ по формуле Тейлора, имеем

$$v_2(n+1, t, z) = w_0(x,z) + t^{-1}\left[w_1(x,z)e^{-4i\xi}e^{-it(\Phi_1+\Phi_2)} + \right.$$

$$\left. + w_2(x,z)e^{4i\xi}e^{it(\Phi_1+\Phi_2)} + \frac{\partial w_0(x,z)}{\partial x}\right] + O(t^{-2}), \quad x \neq \cos\theta.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.6), приравняем члены с одинаковыми степенями t и одинаковыми быстроосциллирующими экспонентами. Из соотношений для членов при степенях $t^{-1}e^{\pm it(\Phi_1+\Phi_2)}$ находим коэффициенты

w_1, w_2 :

$$w_1 = -rs w_0 \frac{1+e^{i(\theta-\xi)}}{(e^{-4i\xi}-1)(1-e^{-i(\theta+\xi)})},$$
$$w_2 = -rs w_0 \frac{1+e^{i(\theta+\xi)}}{(e^{4i\xi}-1)(1-e^{-i(\theta-\xi)})}. \tag{2.8}$$

Используя эти соотношения в равенствах при степенях $t^{-1}e^{it\Phi_1}, t^{-1}e^{it\Phi_2}$, получаем два тождественных уравнения для функции w_0 :

$$\frac{dw_0}{dx} = z^2\left[r^2(x)\frac{z^{-1}+e^{-i\xi}}{z-e^{i\xi}} + s^2(x)\frac{z^{-1}+e^{i\xi}}{z-e^{-i\xi}}\right] w_0 . \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.9) должно удовлетворять краевым условиям (2.3), откуда

$$w_0(-1,z) = K, \quad w_0(1,z) = S_{22}(z,\infty).$$

Эти равенства вытекают из а.р. (2.7) , (2.5) с учетом того, что $\mathcal{S}_n = 0$ при $|x| > 1$.

Краевые условия однозначно определяют решение w_0 в областях $[-1, \cos\theta)$, $(\cos\theta, 1]$:

$$w_0^- = K\exp z^2 \int_{-1}^{x}\left[r^2(p)F(z,\zeta) + s^2(p)F(z,-\zeta)\right]dp, \quad -1 \le x < \cos\theta,$$
$$w_0^+ = S_{22}(z,\infty)\exp\left\{-z^2\int_x^1\left[r^2(p)F(z,\zeta) + s^2(p)F(z,-\zeta)\right]dp\right\}, \quad \cos\theta < x < 1, \tag{2.10}$$

где

$$F(z,\zeta) = \frac{z^{-1}+e^{-i\zeta}}{z-e^{i\zeta}}, \quad \zeta = \arccos p, \quad 0 < \zeta < \pi.$$

Из формул (2.10) следует, что функции $w_0^{\pm}$ в интервалах $(-1, \cos\theta$), $(\cos\theta, 1$) гладкие. Формулы (2.8) показывают, что функции w_1 , w_2 являются гладкими в интервалах (-1,0),(0,1) всюду, за исключением окрестности точки $x = \cos\theta$.

Асимптотики функций $w_0^{\pm}$ при $x \to \cos\theta$ исследуются ниже, в п.4.

3. Определим теперь главные члены а.р. решения v_1 системы (2.1). Для этого так же, как в п.2, перейдем к одному уравнению для v_1 :

$$B_n^*\left[v_1(n+2)-v_1(n+1)\right]=B_{n+1}^* z^{-2}\left[v_1(n+1)-v_1(n)\right]-t^{-1}z^{-2}B_{n+1}^*|B_n|^2 v_1(n), \tag{2.11}$$

которое комплексно сопряжено уравнению (2.6). Ищем его решение в виде

$$v_1=\hat{v}_1+O(t^{-2}),\quad t\to\infty,$$

где

$$\hat{v}_1=u_0(x,z)+t^{-1}u_1(x,z)e^{-it(\varphi_1+\varphi_2)}+t^{-1}u_2(x,z)e^{it(\varphi_1+\varphi_2)}. \tag{2.12}$$

Действуя так же, как и выше, находим выражения для u_1, u_2 :

$$u_1=-rsu_0\frac{1+e^{-i(\theta+\xi)}}{(e^{-4i\xi}-1)(1-e^{i(\theta-\xi)})},$$

$$u_2=-rsu_0\frac{1+e^{-i(\theta-\xi)}}{(e^{4i\xi}-1)(1-e^{i(\theta+\xi)})}$$

и уравнение первого порядка для u_0 :

$$\frac{du_0}{dx}=z^{-2}\left[r^2(x)\frac{z+e^{i\xi}}{z^{-1}-e^{-i\xi}}+s^2(x)\frac{z+e^{-i\xi}}{z^{-1}-e^{i\xi}}\right]u_0. \tag{2.13}$$

В силу (2.12) и (2.5) краевыми условиями для функции u_0 служат условия (2.3)

$$u_0(-1,z)=0,\quad u_0(1,z)=s_{12}(z,\infty)e^{-t(z-z^{-1})}.$$

Отсюда однозначно определяются решения

$$u_0^-=0,\quad -1\leqslant x<\cos\theta,$$

$$u_0^+=s_{12}(z,\infty)e^{-t(z-z^{-1})}\exp\left\{-z^{-2}\int_x^1\left[r^2(\rho)\frac{z+e^{i\xi}}{z^{-1}-e^{-i\xi}}+s^2(\rho)\frac{z+e^{-i\xi}}{z^{-1}-e^{i\xi}}\right]d\rho\right\},$$

$$\cos\theta<x\leqslant 1. \tag{2.14}$$

Из последних формул также следует гладкость функций $u_0^{\pm}$ в интервалах $(-1, \cos\theta)$, $(\cos\theta, 1)$.

Составим следующие функции из а.р.(2.7), (2.12):

$$U(n) = \hat{v}_1(n) + A_n^{-1}\left[\hat{v}_2(n+1) - \hat{v}_2(n)\right], \tag{2.15}$$

$$W(n) = \hat{v}_2(n) - \left(A_n^*\right)^{-1}\left[\hat{v}_1(n+1) - \hat{v}_1(n)\right],$$

и покажем, что они являются асимптотическим решением при $t \to \infty$ системы (2.2).

Предложение 2. Функции (2.15) $v_1 \sim U$, $v_2 \sim W$ удовлетворяют системе (2.2) с остаточным членом $O(t^{-3/2}\cdot(1-x^2)^{-1}|x-\cos\theta|^{-2})$ при $t\to\infty$.

Доказательство. Подставляя (2.15) в систему (2.2), получаем из первого уравнения:

$$U(n+1) - U(n) + A_n^* W(n) = A_{n+1}^{-1}\left[\hat{v}_2(n+2) - \hat{v}_2(n+1) - A_n^{-1}(\hat{v}_2(n+1) - \hat{v}_2(n)) + \right.$$

$$\left. + A_n^*\hat{v}_2(n) = A_{n+1}^{-1}\left[\hat{v}_2(n+2) - \hat{v}_2(n+1) - (B_{n+1}B_n^{-1}z^2 + O(|R_n|^2))(\hat{v}_2(n+1) - \hat{v}_2(n))\right] + \right.$$

$$+ A_n^*\hat{v}_2(n) = A_{n+1}^{-1}B_n^{-1}G_n - \left[A_n^*\hat{v}_2(n) + A_{n+1}^{-1}(\hat{v}_2(n+1) - \hat{v}_2(n)\right]O(|R_n|^2), \tag{2.16}$$

где G_n - левая часть уравнения (2.6) при $v_2 = \hat{v}_2$. Разность $\hat{v}_2(n+1) - \hat{v}_2(n)$ по формуле Лагранжа имеет вид:

$$\hat{v}_2(n+1) - \hat{v}_2(n) = t^{-1}\left[\frac{dw_0}{dx} + w_1\left(e^{-4i\xi} - 1\right)e^{-it(\varphi_1+\varphi_2)} + \right.$$

$$\left.\left. + w_2\left(e^{4i\xi} - 1\right)e^{it(\varphi_1+\varphi_2)}\right]\right|_{x=x_1}, \quad x_1 \in (-1, 1). \tag{2.17}$$

Отсюда и из формул (0.5),(2.1),(2.8) следует, что последние слагаемые (2.16) имеют оценку $O(t^{-3/2}(1-x^2)^{-3/4}|e^{i\theta} - e^{\pm i\xi}|^{-1})$.

Функция $\hat{v}_2$ удовлетворяет уравнению (2.6) с точностью до членов порядка $B_n\Delta_n^2(\hat{v}_2)$ и $t^{-1}(\Delta_n B_n)(\Delta v_n)$, где Δ_n и Δ_n^2 - соответственно первая и вторая разности.

Учитывая особенности B_n и $\hat{v}_2$ в точках $x = \pm 1$, $\cos\theta$, из явных формул (2.8), (2.10), (0.5), получаем оценку

$$G_n = O\left(t^{-2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\left|e^{i\theta}-e^{\pm i\xi}\right|^{-2}\right), \quad t \to \infty.$$

Умножая это выражение на $A^{-1}_{n+1}B^{-1}_n \sim t^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ и заменяя множитель $|e^{i\theta}-e^{\pm i\xi}|$ на $|x-\cos\theta|$, приходим к требуемому утверждению. Оценка правой части второго уравнения (2.2) производится аналогично. Предложение доказано.

4. Для того чтобы выбором неизвестных функций потенциала $\hat{R}_n$, $\hat{S}_n$ согласовать асимптотические решения $\hat{U}_1$ и $\hat{U}_2$ слева и справа от особой точки $x=\cos\theta$, необходимо вычислить а.р. этих решений при $x \to \cos\theta$.

Лемма 2. *Пусть вещественная функция g такова, что $g \in C^{\infty}(-1,1)$, и функция $g(x)\sqrt{1-x^2}$ ограничена на отрезке $[-1,1]$ вместе со своими производными. Положим $z=e^{i\theta}$, $\zeta=\arccos p$, $0<\zeta\leqslant\pi$, тогда интеграл*

$$I_1(x,z) = -\, z^2\int_x^1 g(p)\frac{z^{-1}+e^{-i\zeta}}{z-e^{i\zeta}}\,dp \tag{2.18}$$

имеет следующую асимптотику при $x \to \cos\theta+0$:

$$I_1(x,z) = -i\alpha(\theta)\ln(x-\cos\theta)+L_1(\theta)+O(x-\cos\theta),\quad 0<\theta<\pi,$$

$$I_1(x,z) = I_1(\cos\theta,z)+O(x-\cos\theta),\quad -\pi<\theta<0, \tag{2.19}$$

где $\alpha(\theta)=2g(\cos\theta)\sin\theta$,

$$L_1(\theta)=\frac{i\alpha(0)}{2}z(1+z)\ln(z-1)+\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\alpha(\theta)+i\alpha(\theta)\ln\sin\theta -$$

$$-\,i\int_\theta^0\left[\frac{\alpha(\zeta)}{2}z^2(z^{-1}+e^{-i\zeta})e^{-i\zeta}\right]_\zeta'\ln(z-e^{i\zeta})\,d\zeta.$$

Доказательство. Вторая формула (2.19) очевидна, поскольку при $-\pi<\theta<0$ интеграл (2.18) не имеет особенности и является аналитической функцией θ.

В случае $0<\theta<\pi$ произведем замену переменной $p=\cos\zeta$, $x=\cos\xi$ в интеграле (2.18) и проинтегрируем по частям. Имеем

$$I_1(x,z) = -\int_\xi^0 g(\cos\zeta)\sin\zeta\,\frac{z+z^2e^{-i\zeta}}{z-e^{i\zeta}}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\xi}^{0} \frac{\alpha(\zeta)(z+z^2 e^{-i\zeta})}{i e^{i\zeta}}\, d\ln(z-e^{i\zeta}) = -\frac{i\alpha(0)}{2} z(1+z)\ln(z-1) +$$

$$+ \frac{i\alpha(\xi)}{2e^{i\xi}}(z+z^2 e^{-i\xi})\cdot \ln(z-e^{i\xi}) + \int_{\xi}^{0}\left[\frac{\alpha(\zeta)}{2} z e^{-i\zeta}(1+ze^{-i\zeta})\right]'_{\zeta} \ln(z-e^{i\zeta})d\zeta.$$

В последнем выражении перейдем к пределу при $\xi \to \theta$, используя следующее легко проверяемое соотношение:

$$z - e^{i\xi} = \frac{ie^{i\theta}}{\sin\theta}(x-\cos\theta) + O(x-\cos\theta)^2, \quad x \to \cos\theta.$$

В результате получится первая формула (2.19) с остаточным членом $O[(x-\cos\theta)\ln(x-\cos\theta)]$. Однако остаток в действительности не содержит логарифмического члена, поскольку из (2.18) следует

$$\frac{\partial}{\partial x} I_1(x,z) = \frac{C_1}{x-\cos\theta} + C_2 + O(x-\cos\theta), \quad x \to \cos\theta.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда интегралы*

$$I_2(x,z) = z^2 \int_{-1}^{x} g(p)\frac{z^{-1}+e^{-i\zeta}}{z-e^{i\zeta}}\,dp,$$

$$I_3(x,z) = z^2 \int_{-1}^{x} g(p)\frac{z^{-1}+e^{i\zeta}}{z-e^{-i\zeta}}\,dp$$

имеют следующие асимптотики при $x \to \cos\theta - 0$:

$$I_2(x,z) = \begin{cases} -i\alpha(\theta)\ln(\cos\theta - x) + L_2(\theta) + O(\cos\theta - x), & 0<\theta<\pi, \\ I_2(\cos\theta, z) + O(\cos\theta - x), & -\pi<\theta<0, \end{cases}$$

$$I_3(x,z) = \begin{cases} i\alpha(\theta)\ln(\cos\theta - x) + L_3(\theta) + O(\cos\theta - x), & -\pi<\theta<0, \\ I_3(\cos\theta, z) + O(\cos\theta - x), & 0<\theta<\pi, \end{cases} \qquad (2.20)$$

где

$$\alpha(\theta) = 2g(\cos\theta)\sin\theta,$$

$$L_2(\theta) = \frac{i\alpha(\pi)}{2} z(z-1)\ln(z+1) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\alpha'(\theta) + i\alpha(\theta)\ln\sin\theta +$$

$$+i\int_{\pi}^{\theta}\left[\frac{\alpha(\xi)}{2}ze^{-i\xi}(1+ze^{-i\xi})\right]_{\xi}\ln(z-e^{i\xi})d\xi,$$

$$L_3(\theta)=-\frac{i\alpha(\pi)}{2}z(z-1)\ln(z+1)+(\theta-\frac{\pi}{2})\alpha(\theta)-i\alpha(\theta)\ln\sin\theta-$$

$$-i\int_{\pi}^{\theta}\left[\frac{\alpha(\xi)}{2}ze^{i\xi}(1-ze^{i\xi})\right]_{\xi}\ln(z-e^{-i\xi})d\xi.$$

Лемма 3. *Пусть функция* $\hat{v}_1$ *определена формулой* (2.12). *Тогда второе слагаемое в решении* (2.15) $W(n)$ *имеет следующую асимптотику при* $x\to\cos\theta$:

$$-(A_n^*)^{-1}\left[\hat{v}_1(n+1)-\hat{v}_1(n)\right]=(2t)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha(\theta)\sin\theta}\,(x-\cos\theta)^{i\alpha-1}\times$$

$$\times e^{it(x-\cos\theta)^2\sin^{-1}\theta}\exp\left\{i\left[\theta-\frac{\pi}{2}+L_4+L_3-\gamma\ln 2t-\beta\right]\right\}\times$$

$$\times S_{12}(z,\infty)\left[1+O(x-\cos\theta+t(x-\cos\theta)^3\sin^{-1}\theta)\right], \qquad (2.21)$$

где

$$\alpha(\theta)=2\sin\theta\begin{cases}r^2(\cos\theta),\\-s^2(\cos\theta),\end{cases}\quad \gamma=\begin{cases}\gamma_1(\cos\theta),\\-\gamma_2(\cos\theta),\end{cases}\quad \beta=\begin{cases}\beta_1(\cos\theta), & 0<\theta<\pi,\\-\beta_2(\cos\theta), & -\pi<\theta<0,\end{cases}$$

$$L_3=\begin{cases}L_1^*(\theta)-z^2\int_{\cos\theta}^{1}s^2(\rho)\frac{z+e^{-i\xi}}{z^{-1}-e^{i\xi}}d\rho, & 0<\theta<\pi,\quad g=r^2,\\ L_1(\theta)-z^2\int_{\cos\theta}^{1}r^2(\rho)\frac{z+e^{i\xi}}{z^{-1}-e^{-i\xi}}d\rho, & -\pi<\theta<0,\quad g=s^2,\end{cases}$$

$$L_4=2\int_{-1}^{\cos\theta}\left[r^2(\rho)\sin(\theta-\xi)+s^2(\rho)\sin(\theta+\xi)\right]d\rho,$$

а функция $L_1(\theta)$ *определена в лемме 2.*

Доказательство. Рассмотрим случай $0<\theta<\pi$. Используя формулу (2.12), запишем главный член при $t\to\infty$ интересующего нас выражения:

$$-(A_n^*)^{-1}\left[\hat{v}_1(n+1)-\hat{v}_1(n)\right](\mathrm{mod}\,t^{-\frac{3}{2}})=-(A_n^*)^{-1}t^{-1}\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+(e^{-4i\xi}-1)u_1e^{-it(\varphi_1+\varphi_2)}+(e^{4i\xi}-1)u_2e^{it(\varphi_1+\varphi_2)}\right]=W_0(n,t,z).$$

Подставляя в последнюю формулу выражения (2.1), (2.13) для A_n, u_K, $K=0,1,2$, получаем

$$W_0(n,t,z) = -\frac{P(x,z,\theta)s_{12}(z,\infty)z^{2n+1}\exp\left[-it\Phi_1+t(z^{-1}-z)\right]}{\sqrt{t}\,r(x)(1-ze^{-i\xi})}\times$$

$$\times\left[r^2(x)+\left(s^2(x)\frac{1+z^{-1}e^{-i\xi}}{1-ze^{i\xi}}-r(x)s(x)\frac{1+z^{-1}e^{i\xi}}{1-ze^{i\xi}}e^{it(\Phi_1+\Phi_2)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1+z^{-1}e^{i\xi}}{1-ze^{-i\xi}}-\frac{s(x)}{r(x)}\frac{1+z^{-1}e^{-i\xi}}{1-ze^{-i\xi}}e^{-it(\Phi_1+\Phi_2)}\right)^{-1}\right]u_0^+, \qquad (2.22)$$

где u_0^+ определен формулой (2.14), а $P(x,z,t)$ обозначает бесконечное произведение в выражении (2.1) для A_n. В силу предложения 1,

$$P=\prod_{K=-\infty}^{n-1}\frac{1+\hat{R}_K\hat{S}_Kz^{-1}}{1+\hat{R}_K^*\hat{S}_K^*z}=\exp 2i\int_{-1}^{\cos\theta}\left[r^2(\rho)\sin(\theta-\chi)+\right.$$

$$\left.+s^2(\rho)\sin(\theta+\chi)\right]d\rho+O(t^{-\frac{1}{4}})=e^{iL_4}+O(t^{-\frac{1}{4}}). \qquad (2.23)$$

Разлагая фазу Φ_1 (см. формулу (0.4))в ряд Тейлора в окрестности точки $x=\cos\theta$, имеем

$$\exp\left[-it\Phi_1+t(z^{-1}-z)+2n\ln z\right]=\exp\left\{\left[it\frac{(x-\cos\theta)^2}{\sin\theta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-i\gamma_1(\cos\theta)\ln 2t-i\beta_1(\cos\theta)\right](1+O(x-\cos\theta))\right\}. \qquad (2.24)$$

Подставляя выражения (2.23), (2.24) в формулу (2.22), получаем

$$W_0(n,t,z)=-\frac{r(\cos\theta)s_{12}(z,\infty)z\exp i\left[L_4-\gamma_1\ln 2t\ \beta_1\right]}{\sqrt{t}\,(1-ze^{-i\xi})}\times$$

$$\times u_0^+(x,z)\exp\left[it\frac{(x-\cos\theta)^2}{\sin\theta}\right]\left\{1+O\left(x-\cos\theta+\frac{t(x-\cos\theta)^3}{\sin\theta}\right)\right\}.$$

Сингулярный интеграл в множителе u_0^+ разлагается при $x\to\cos\theta+0$ по первой формуле (2.19) для $g = \tau^2$, регулярный интеграл с плотностью $g = s^2$ - по второй формуле (2.19). Заменяя окончательно $1 - ze^{-i\xi} = -i(x - \cos\theta)\sin^{-1}\theta$, $\alpha = 2\tau(\cos\theta)\sin\theta$, приходим к разложению (2.21) при $0 < \theta < \pi$. Для $-\pi < \theta < 0$ формула (2.21) доказывается аналогично. Лемма 3 доказана.

§3. Внутреннее разложение

В окрестности особой точки (точки поворота) $x = \cos\theta$ внешнее разложение, построенное в §2, имеет особенности. Для более подробного изучения свойств решения системы (2.2) в окрестности этой точки, введем новую (внутреннюю) независимую переменную $y = (x - \cos\theta)\sqrt{t}$. Рассмотрим сначала уравнение (2.6) для функции U_2.

Вычислим коэффициенты уравнения (2.6) в переменной y с точностью $O(t^{-1})$. Положив для определенности $0 < \theta < \pi$, имеем:

$$\xi = \arccos x = \theta - \frac{y}{\sqrt{t}\sin\theta} + O(t^{-1}y^2),$$

$$\frac{1}{2}\Phi_{1,2} = \Phi = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + O(t^{-1}\ln t) =$$

$$= \theta\cos\theta - \sin\theta + \frac{\theta y}{\sqrt{t}} + O(t^{-1}\ln t + t^{-1}y^2), \qquad (3.1)$$

$$B_n = 2\tau(\cos\theta)e^{-2it\Phi} - (1 + e^{2i\theta})s(\cos\theta)e^{2it\Phi} + t^{-\frac{1}{2}}\Big[\Big(\frac{iy}{\sin\theta}\tau(\cos\theta) +$$
$$+ \tau'(\cos\theta)\Big)e^{-2it\varphi} + \Big(\frac{iy}{\sin\theta}s(\cos\theta) + s'(\cos\theta)\Big)e^{2it\varphi}\Big] + O(t^{-1}\ln t + t^{-1}y^2).$$

Решение ищется в виде

$$U_2 = \hat{W} + O(t^{-3/2}), \qquad (3.2)$$

где

$$\hat{W} = W_0 + t^{-1/2}W_1^+e^{4it\Phi} + t^{-1/2}W_1^-e^{-4it\Phi} + t^{-1}W_2^+e^{4it\Phi} + t^{-1}W_2^-e^{-4it\Phi}.$$

Функции W_0, $W_i^{\pm}$, $i = 1,2$, зависят от y и θ и предполагаются гладкими по y. Подставим (3.2) в уравнение (2.6) и приравняем члены при одинаковых степенях t и одинаковых осциллирующих экспонентах. При этом получается восемь линейных дифференциальных уравнений для неизвестных функций

W_0, $W_i^{\pm}$. Эта система оказывается совместной, причем $W_i^{\pm}$ явно выражаются через W_0 и ее первую производную:

$$W_1^- \equiv 0, \quad W_1^+ = -\frac{s}{2\tau}\,\frac{W_0'}{e^{2i\theta}-1},$$

$$W_2^- = \frac{2\tau s W_0}{(e^{-2i\theta}-1)(e^{-4i\theta}-1)}, \quad W_2^+ = \left[2\tau(e^{4i\theta}-1)^2\right]^{-1} \times \tag{3.3}$$

$$\times\left[\frac{iy}{\sin\theta}(e^{4i\theta}+1)(3e^{4i\theta}-1)W_0' + \left\{2\tau^2(e^{4i\theta}+1)+s^2 e^{4i\theta}(e^{2i\theta}+1)^2\right\}W_0\right],$$

где $\tau=\tau(\cos\theta)$, $s=s(\cos\theta)$, а W_0 является решением дифференциального уравнения второго порядка:

$$W_0'' - \frac{2iy}{\sin\theta}W_0' + 4\tau^2 W_0 = 0. \tag{3.4}$$

При $-\pi<\theta<0$ соотношения для коэффициентов W_0, $W_i^{\pm}$ получаются из формул (3.3), (3.4) комплексным сопряжением и заменой τ на s и W_i^+ на W_i^-. Определим функцию $\hat{U}$, соответствующую решению U_1 с переменной y, равенством

$$\hat{U}(n) = A_n^{-1}\left[\hat{W}(n+1) - \hat{W}(n)\right]. \tag{3.5}$$

Предложение 3. *Функции (3.2), (3.5), $\hat{W}\sim U_2$ и $\hat{U}\sim U_1$ удовлетворяют системе (2.2) с остаточным членом*

$$O(t^{-1}y + t^{-\frac{3}{2}}y^2)\sin^{-2}2\theta, \quad t, y\to\infty.$$

Доказательство. Второе уравнение (2.2) в силу (3.5) выполняется тождественно. Первое уравнение (2.2) преобразуем по формуле (2.16) и оценим члены, стоящие в правой части. Из соотношений (3.3), (3.2), (3.1) заключаем, что разность $\hat{W}(n+1) - \hat{W}(n)$ оценивается как $O(t^{-\frac{1}{2}}y+t^{-1}y^2)\sin^{-2}2\theta$, поэтому для последних слагаемых правой части (2.16) требуемая оценка выполняется.

По построению, $\hat{W}$ удовлетворяет уравнению (2.6) с точностью до членов вида $B_n t^{-\frac{3}{2}}\left[W_0''' + (W_1^{\pm})'' + (W_2^{\pm})'\right]$, $\Delta_n \hat{W} O(t^{-1}y^2)$ и $\hat{W} O(t^{-2}y^2)$. Оценивая их согласно явным формулам (3.3), (3.4) и умножая на $A_{n+1}^{-1} B_n^{-1}$, приходим к нужной оценке. Предложение доказано.

Для дальнейшего удобно переписать уравнение (3.4) в новой переменной $\sigma = y\sqrt{2}\,|\sin\theta|^{-1/2}$. Имеем

$$W_0'' - i\sigma W_0' + \alpha W_0 = 0, \tag{3.6}$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 2r^2(\cos\theta)\sin\theta, & 0<\theta<\pi, \\ -2s^2(\cos\theta)\sin\theta, & -\pi<\theta<0. \end{cases}$$

Лемма 4. *Существует решение уравнения (3.6):*

$$W_0 = Ce^{\frac{i\sigma^2}{4}} D_{-i\alpha}(-\sigma\sqrt{i}), \tag{3.7}$$

где D_ν *- функция параболического цилиндра [8], $\arg\sqrt{i} = \frac{\pi}{4}$. Решение (3.7) имеет следующие асимптотики при $\sigma \to \pm\infty$:*

$$W_0 = C|\sigma|^{-i\alpha} e^{\frac{\pi\alpha}{4}}\left(1 + O(\sigma^{-2})\right), \quad \sigma \to -\infty, \tag{3.8}$$

$$W_0 = C\left[\sigma^{-i\alpha}e^{-\frac{3\pi\alpha}{4}} - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(i\alpha)} e^{-\frac{\pi\alpha}{4} + \frac{3\pi i}{4}} \sigma^{i\alpha-1} e^{\frac{i\sigma^2}{2}}\right] \times$$

$$\times\left(1 + O(\sigma^{-2})\right), \quad \sigma \to +\infty. \tag{3.9}$$

Доказательство. Заменой $\rho = \sigma\sqrt{i}$, $w = e^{-\frac{i\sigma^2}{4}} W_0$ уравнение (3.6) сводится к уравнению параболического цилиндра:

$$\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{\rho^2}{4}\right)w = 0,$$

где $\nu = -i\alpha$, решениями которого являются функции $w = D_\nu(\pm\rho)$. Асимптотики (3.8), (3.9) следуют из а.р. функций D_ν (см. [8. с.129]).

§4. Согласование асимптотических разложений и определение функций $r, s, f_{1,2}, \beta_{1,2}$

В предыдущих параграфах подготовлено все необходимое для построения двухмасштабного а.р. решения задачи рассеяния (2.2), (2.3), справедливого как вне, так и в окрестности особой точки $x=\cos\theta$. Согласование внешнего и внутреннего а.р. слева от особой точки достигается выбором произвольного коэффициента при решении W_0 однородного уравнения (3.4) внутреннего разложения. Внешнее разложение справа от особой точки однозначно определено данными рассеяния при $x=1$ $(n\to+\infty)$, так что условие согласования справа, при $x\to\cos\theta+0$ дает уравнения для неопределенных коэффициентов $r, s, \gamma_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ потенциала A_n в точке $x=\cos\theta$. Явно решая эти уравнения при почти всех $\theta\in(-\pi,\pi)$, мы найдем выражения для коэффициентов $r, s, \gamma_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ через элементы матрицы рассеяния $T(e^{i\theta})$.

Для упрощения записи продемонстрируем метод согласования а.р. только для случая $0<\theta<\pi$. Случай $-\pi<\theta<0$ получается немедленно, если во всех формулах выполнить замену

$$s\mapsto r,\ \theta\mapsto-\theta,\ \xi\mapsto-\xi,\ \gamma_2\mapsto-\gamma_1,\ \beta_2\mapsto-\beta_1. \tag{4.1}$$

Процедуру согласования а.р. удобно проводить во внутренней переменной $\sigma=\sqrt{2t}\,(x-\cos\theta)\sin^{-\frac{1}{2}}\theta$. Перепишем асимптотики членов внешнего разложения, найденные в § 1, в переменной σ.

Предложение 4. *А.р. решения $U_2\sim W(n,t,z)$, определенного формулой (2.15), в окрестности точки $x=\cos\theta$ имеют вид:*

$$W(n,t,z)=KC_1|\sigma|^{-i\alpha}(2t)^{\frac{i\alpha}{2}}\left(1+O\left(t^{-\frac{1}{2}}\sigma\sin^{-2}2\theta\right)\right),\quad \sigma<0, \tag{4.2}$$

$$W(n,t,z)=\left[C_2 s_{22}(z,\infty)\sigma^{-i\alpha}(2t)^{\frac{i\alpha}{2}}-C_3 s_{12}(z,\infty)\,i\sqrt{\alpha}\,(2t)^{-i\gamma_1-\frac{i\alpha}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\, e^{-i\beta_1+iL_4+i\theta}\sigma^{i\alpha-1}e^{\frac{i\sigma^2}{2}}\right]\left[1+O\left(t^{-\frac{1}{2}}\sigma+t^{-\frac{1}{2}}\sigma^3\right)\sin^{-2}2\theta\right],\quad \sigma>0, \tag{4.3}$$

где $\alpha=2r^2(\cos\theta)\sin\theta$, $0<\theta<\pi$, постоянная K задана условиями (2.3),

$$C_1=\exp\left[L_2(\theta)+\int_{-1}^{\cos\theta}s^2(\rho)\,\frac{z^{-1}+e^{i\xi}}{z-e^{-i\xi}}\,z^2\,d\rho-\frac{i\alpha}{2}\ln\sin\theta\right],$$

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= \exp\left[L_1(\theta) - \int\limits_{\cos\theta}^{1} s^2(p)\,\frac{z^{-1}+e^{i\xi}}{z-e^{-i\xi}}\,z^2dp - \frac{i\alpha}{2}\ln\sin\theta\right], \\ C_3 &= \exp\left[L_1^*(\theta) - \int\limits_{\cos\theta}^{1} s^2(p)\,\frac{z+e^{-i\xi}}{z^{-1}-e^{i\xi}}\,z^{-2}dp + \frac{i\alpha}{2}\ln\sin\theta\right], \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

а функции L_1, L_2 *определены в лемме 2 и ее следствии при* $g = \tau^2$.

Доказательство. Формула (4.2) с коэффициентом (4.4) получается непосредственно из а.р. (2.18), (2.7) и формул (2.8). Множитель $\sin^{-2}2\theta$ возникает в остаточном члене из учета особенностей функций ω_1, ω_2 в формулах (2.8) при $|x| \to 1$. Аналогичным образом получается первое слагаемое в формуле (4.3). Второе слагаемое (4.3) следует из формулы (2.21) в лемме 3. Предложение доказано.

Сравним а.р. (4.2) при $\sigma < 0$ $(x \to \cos\theta - 0)$ и а.р. (3.8) при $\sigma \to -\infty$. Поскольку функции W и $\hat{W}$ представляют собой асимптотические решения U_2 одной и той же системы (2.2), их асимптотики должны совпадать при $x \to \cos\theta$ (при $\sigma \to -\infty$ в переменной $\sigma \sim \sqrt{t}\,(x - \cos\theta)$). В этом состоит принцип согласования а.р.

Таким образом, коэффициент C при главном члене внутреннего разложения (3.7) следует определить из условия совпадения а.р. (3.8) и (4.2):

$$Ce^{\frac{\pi\alpha}{4}} = KC_1(2t)^{\frac{i\alpha}{2}},$$

Отсюда и из (4.4) находим

$$C = K(2t)^{\frac{i\alpha}{2}}\exp\left[-\frac{\pi\alpha}{4} + L_2(\theta) - \frac{i\alpha}{2}\ln\sin\theta + \int\limits_{-1}^{\cos\theta} s^2(p)\,\frac{z^{-1}+e^{i\xi}}{z-e^{-i\xi}}\,z^2dp\right]. \qquad (4.5)$$

Условия согласования справа от особой точки состоят в совпадении асимптотик (3.9) и (4.3) при $\sigma \to +\infty$:

$$Ce^{-\frac{3}{4}\pi\alpha} = s_{22}(z,\infty)\,C_2\,(2t)^{\frac{i\alpha}{2}}, \qquad (4.6)$$

$$C\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(i\alpha)}e^{-\frac{\pi\alpha}{4}+\frac{3\pi i}{4}}=iC_3(2t)^{-i\gamma_1-\frac{i\alpha}{2}}\sqrt{\alpha}\,s_{12}(z,\infty)e^{-i\beta_1+i\theta+iL_4}. \qquad (4.7)$$

Приравнивая в последнем равенстве члены, содержащие t, получаем

$$\gamma_1=\gamma_1(\cos\theta)=-\alpha=-2\tau^2(\cos\theta)\sin\theta,\quad 0<\theta<\pi. \qquad (4.8)$$

Аналогично, из равенства (4.7) и замены (4.1) для γ_2 следует

$$\gamma_2=\gamma_2(\cos\theta)=-2s^2(\cos\theta)\sin\theta,\quad 0<\theta<\pi. \qquad (4.9)$$

Для определения функции $\alpha(\theta)$ вычислим модули правой и левой частей равенств (4.6), (4.7). Из формул (4.6), (4.5) имеем

$$|s_{22}(z,\infty)|^2=K^2\exp 2(J-\pi\alpha), \qquad (4.10)$$

где

$$J=\mathrm{Re}\int_{-1}^{1}\left[\tau^2(p)z^2\frac{z^{-1}+e^{-i\xi}}{z-e^{i\xi}}+s^2(p)z^2\frac{z^{-1}+e^{i\xi}}{z-e^{-i\xi}}\right]dp,$$

поскольку, в силу леммы 2 и ее следствия (§2), справедливы соотношения:

$$-\mathrm{Re}L_1(\theta)=\mathrm{Re}\int_{x}^{1}\tau^2(p)z^2\frac{z^{-1}+e^{-i\xi}}{z-e^{i\xi}}dp+\alpha(\theta)\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathrm{Re}L_2(\theta)=\mathrm{Re}\int_{-1}^{x}\tau^2(p)z^2\frac{z^{-1}+e^{-i\xi}}{z-e^{i\xi}}dp-\alpha(\theta)\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right).$$

Сингулярный интеграл в формуле для J понимается в смысле главного значения.

Используя эти соотношения, из равенства (4.7) получаем

$$K^2\frac{2\pi}{|\Gamma(i\alpha)|^2}\exp 2\left(J-\frac{\pi\alpha}{2}\right)=\alpha|s_{12}(z,\infty)|^2.$$

Применяя далее соотношение $|\Gamma(i\alpha)|^2=\dfrac{\pi}{\alpha\,\mathrm{sh}\,\pi\alpha}$, из (4.10) получаем

$$e^{2\pi\alpha}|s_{22}|^2=|s_{22}|^2+|s_{12}|^2.$$

Из предложения 1 (§2) следует $|S_{22}|^2 = |T_{22}|^2 e^{2I}$,

$$|S_{12}|^2 = |T_{12}|^2 \cdot e^{2I}, \quad I = Re\int_{-1}^{1}\left[r^2(p)e^{i(\xi-\theta)} + s^2(p)e^{-i(\xi+\theta)}\right]dp.$$

Учитывая равенство $|T_{12}|^2 + |T_{22}|^2 = 1$ (формула (1.8′)),

имеем $e^{2\pi\alpha} = |T_{22}|^{-2}$ или

$$\alpha(\theta) = 2r^2(\cos\theta)\sin\theta = -\frac{1}{\pi}\ln|T_{22}(e^{i\theta})|. \tag{4.11}$$

Отсюда немедленно следует первая формула (0.5). С помощью замены (4.1) получаем вторую формулу (0.5) для функции s^2. Тем самым доказана

Теорема 5. *Пусть матрица рассеяния $T(z)$ удовлетворяет условиям 1^0-3^0 из §1, а функции (2.15), (3.2), (3.5) представляют собой а.р. при $t\to\infty$ решения задачи рассеяния (2.2), (2.3). Тогда амплитуды r, s а.р. решения системы (0.1) с начальными данными (0.2) вычисляются по формулам (0.5), причем $g(x)\sqrt{1-x^2}\in C^\infty[-1,1]$, где $g=r^2, s^2$. Коэффициенты γ_1, γ_2 при логарифмическом члене в фазе вычисляются по формулам (0.6), $\gamma_1, \gamma_2 \in C^\infty[-1,1]$.*

Приступим к вычислению β_1, β_2. Для этого в равенстве (4.7) достаточно приравнять аргументы комплекснозначных функций в правой и левой частях:

$$-\arg\Gamma(i\alpha) + \frac{\pi}{4} + Im\left[L_2(\theta) + \int_{-1}^{\cos\theta} G(p,\theta)dp\right] - \alpha\ln\sin\theta +$$

$$+ Im\left[-L_1^*(\theta) - \int_{\cos\theta}^{1} G^*(p,\theta)dp\right] = \arg s_{12}(e^{i\theta}, \infty) - \beta_1 + L_4(\theta) + \theta. \tag{4.12}$$

Справедлива следующая

Теорема 6. *Для функций β_1, β_2 имеют место формулы:*

$$\beta_1(\cos\theta) = \arg T_{12}(e^{i\theta}) + \arg\Gamma(i\alpha_1) + \theta - \frac{\pi}{4} - \alpha_1\ln\sin\theta +$$

$$+ L_5(\theta,\alpha_1) + Im\left[L_1^*(\theta,\alpha_1) - L_2(\theta,\alpha_1) - \int_{-1}^{\cos\theta} G_1(\theta,\rho)d\rho + \int_{\cos\theta}^{1} G_1^*(\theta,\rho)d\rho\right],$$

$$\beta_2(\cos\theta) = -\arg T_{12}(e^{-i\theta}) + \arg\Gamma(i\alpha_2) + \theta - \frac{\pi}{4} - \tag{4.13}$$

$$-\alpha_2 \ln\sin\theta + L_5(\theta,\alpha_2) + Im\left[L_1(\theta,\alpha_2) - L_2(\theta,\alpha_2) - \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^{\cos\theta} G_2^*(\theta,\rho)d\rho + \int_{\cos\theta}^{1} G_2(\theta,\rho)d\rho\right], \quad 0<\theta<\pi,$$

где $T_{12}(z)$ - элемент матрицы рассеяния $T(z)$,

$$\alpha_1 = 2r^2(\cos\theta)\sin\theta, \quad \alpha_2 = 2s^2(\cos\theta)\sin\theta,$$

$$L_1^*(\theta,\alpha_j) = -\frac{i\alpha_j(0)}{2} e^{-i\theta}(1+e^{-i\theta})\ln(e^{-i\theta}-1) + \left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\alpha_j(\theta) -$$

$$-\frac{i}{2}\int_{2}^{\theta}\left[\alpha_j(\zeta)e^{i(\zeta-\theta)}(1+e^{i(\zeta-\theta)})\right]_\zeta \ln(e^{-i\theta}-e^{-i\zeta})d\zeta, \quad j=1,2,$$

$$L_2(\theta,\alpha_j) = \frac{i\alpha_j(\pi)}{2} e^{i\theta}(e^{i\theta}-1)\ln(e^{i\theta}+1) + \left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\times$$

$$\times\alpha_j(\theta) - \frac{i}{2}\int_{\theta}^{\pi}\left[\alpha_j(\zeta)e^{-i(\zeta-\theta)}(1+e^{-i(\zeta-\theta)})\right]_\zeta \ln(e^{i\theta}-e^{i\zeta})d\zeta, \tag{4.14}$$

$$L_5(\theta,\alpha_j) = z\int_{-1}^{\cos\theta}\Lambda_j(\rho,\theta)d\rho + \int_{-1}^{1}\Lambda_j(\rho,\theta)d\rho,$$

$$\Lambda_j(\rho,\theta) = \begin{cases} r^2(\rho)\sin(\theta-\zeta) + s^2(\rho)\sin(\theta+\zeta), & j=1,\\ s^2(\rho)\sin(\theta-\zeta) + r^2(\rho)\sin(\theta+\zeta), & j=2,\end{cases}$$

$$G_1(\theta,\rho) = s^2(\rho)e^{2i\theta}\frac{e^{-i\theta}+e^{i\zeta}}{e^{i\theta}-e^{-i\zeta}},$$

$$G_2(\theta,\rho) = r^2(\rho)e^{-2i\theta}\,\frac{e^{i\theta}+e^{-i\zeta}}{e^{-i\theta}-e^{i\zeta}}\ .$$

Доказательство. Формулы (4.13), (4.14) непосредственно следуют из условия согласования (4.12) и замены (4.1).

Следствие. *Функции* (0.4) $\hat{R}_n$, $\hat{S}_n$ *принадлежат классу* ℓ_1 *при фиксированном* t *и бесконечно дифференцируемы по* $x=\frac{n}{t}$ *при* $|x|\neq 1$.

Доказательство. Амплитуды $r(x)$, $s(x)$ в формуле (0.4) являются, по определению, финитными функциями, гладкими в интервале (-1,1) и имеющими на его концах особенность вида $O\left[(1-x^2)^{-1/4}\right]$. Отсюда следует конечность ℓ_1-норм функций $\hat{R}_n$, $\hat{S}_n$ при фиксированном t . В силу формул (4.13), (0.4), (0.5) бесконечная дифференцируемость $\hat{R}_n$, $\hat{S}_n$ следует из условия 1° (§1) о бесконечной дифференцируемости данных рассеяния. Что и требовалось.

Для согласования асимптотик решения первого уравнения (1.2), а также получения необходимых оценок разности внешнего и внутреннего разложений потребуется

Лемма 5. *Внешнее и внутреннее разложения, определенные формулами* (2.15), (3.2), (3.5), *согласованы в точке поворота* $x=\cos\theta$ *и выполняются оценки:*

$$|\hat{W}-W|<\left(M_1|\sigma|^{-1}+M_2t^{-\frac{1}{2}}\sigma^2\right)\sin^{-2}2\theta,\quad \sigma=\frac{\sqrt{2}(x-\cos\theta)}{\sqrt{t\sin\theta}},$$
$$|\hat{U}-U|<\left(M_1|\sigma|^{-1}+M_2t^{-\frac{1}{2}}\sigma^2+M_3t^{-1}\sigma^4\right)\sin^{-2}2\theta,\quad \sigma\gg 1, \tag{4.15}$$

где постоянные M_1, M_2, M_3 *не зависят от* t, θ .

Доказательство. Первая оценка (4.15) для $\hat{W}-W$ вытекает непосредственно из условий согласования (4.6), (4.7) и формул остаточных членов (4.2), (3.8), (3.9).

Для оценки $\hat{U}-U$ разобьем функцию $\hat{W}$ на два слагаемых $\hat{W}=\hat{W}^{+}+\hat{W}^{-}$, где $\hat{W}^{+}$ имеет вид (3.2) с главным членом $W_0^{+}(\sigma)$, обладающим асимптотикой

$$W_0^{+}(\sigma)=\begin{cases}0\ , & \sigma\to-\infty,\\ -C\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(i\alpha)}\,e^{-\frac{\pi\alpha}{4}+\frac{3\pi i}{4}}\,\sigma^{i\alpha-1}e^{\frac{i\sigma^2}{2}}\left(1+O(\sigma^{-2})\right), & \sigma\to+\infty,\end{cases}$$

где постоянная C определена формулой (4.5).

По определению U, $\hat{U}$, из формул (3.5), (2.15) имеем

$$\hat{U}-U = A_n^{-1}\left[\hat{W}^-(n+1)-\hat{W}^-(n)-\hat{v}_2(n+1)+\hat{v}_2(n)\right]+$$
$$+A_n^{-1}\left[\hat{W}^+(n+1)-\hat{W}^+(n)\right]-\hat{v}_1(n). \tag{4.16}$$

Из а.р. (3.8) и выражений (3.3) вытекает оценка

$$|\hat{W}^-(n+1)-\hat{W}^-(n)|<M_0t^{-\frac{1}{2}}\frac{dW_0^-}{d\sigma}+M_1t^{-1}\sigma\sin^{-2}2\theta<$$
$$<M_1t^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}+M_2t^{-1}\sigma\sin^{-2}2\theta.$$

Для разности $\hat{v}_2(n+1)-\hat{v}_2(n)$ из формул (2.17), (2.8) следует оценка

$$|\hat{v}_2(n+1)-\hat{v}_2(n)|<M_0t^{-1}|x-\cos\theta|^{-1}\sin^{-\frac{3}{2}}\theta=M_0t^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}\sin^{-1}\theta.$$

Умножая эти неравенства на $A_n^{-1}\sim t^{-\frac{1}{2}}$, приходим к оценке (4.15) для членов, заключенных в квадратной скобке (4.16).

Вычислим асимптотику при $\sigma\to\infty$ оставшихся членов формулы (4.16). Для простоты проведем выкладки в случае $0<\theta<\pi$.

По построению $\hat{W}^+$ из формул (3.2), (3.3) имеем

$$\hat{W}^+(n+1)-\hat{W}^+(n)=t^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\theta}}\frac{d}{d\sigma}W_0^+(\sigma)\Big[1-$$
$$-\frac{s}{2\tau}\left(e^{2i\theta}+1\right)e^{4it\Phi}\Big]+O\left(t^{-1}\sigma\sin^{-2}2\theta\right),\quad t\to\infty. \tag{4.17}$$

Учитывая соотношения (2.23), (2.24), преобразуем A_n^{-1}:

$$A_n^{-1}=\frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-iL_4}\tau^{-2n-1}e^{2it\Phi}}{2\tau-s\left(1+e^{2i\theta}\right)e^{4it\Phi}}=\left[1-\frac{s}{2\tau}\left(1+e^{2i\theta}\right)e^{4it\Phi}\right]^{-1}\times$$
$$\times t^{\frac{1}{2}}(2\tau)^{-1}\tau^{-1}e^{i\gamma_1\ln 2t+i\beta+t(\tau^{-1}-\tau)}e^{\frac{i\sigma^2}{2}}\left[1+O\left(t^{-\frac{1}{2}}\sigma^3\sin^{-1}\theta\right)\right].$$

Умножая это соотношение на (4.17) и пользуясь а.р. (3.9) и условием согласования 4.7, получаем

$$A_n^{-1}\left[\hat{W}^{+}(n+1)-\hat{W}^{+}(n)\right]=C_3(2t)^{-\frac{i\alpha}{2}}\sigma^{i\alpha}s_{12}(z,\infty)e^{t(z^{-1}-z)}\times$$

$$\times\left[1+O(\sigma^{-2}+t^{-\frac{1}{2}}\sigma+t^{-1}\sigma^{4})\sin^{-2}2\theta\right],\quad t,\sigma\to\infty. \qquad (4.18)$$

Вычислим асимптотику $\hat{U}_1$ при $x\to\cos\theta$ в переменной σ. Пользуясь а.р. (2.12), (2.14) и леммой 2, имеем

$$\hat{U}_1=C_3(2t)^{-\frac{i\alpha}{2}}\sigma^{i\alpha}s_{12}(z,\infty)e^{t(z^{-1}-z)}\left[1+O(t^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1}\sin^{-2}2\theta)\right].$$

Сравнивая последнее разложение с (4.18) и учитывая предыдущие оценки для слагаемых (4.16), приходим к требуемой оценке (4.15). Лемма доказана.

§5. Оценки остаточных членов асимптотических разложений

Перейдем к доказательству того факта, что приближенные решения U, W и $\hat{U}$, $\hat{W}$ с определенными выше коэффициентами $\tau, S, \gamma_{1,2}, \beta_{1,2}$ аппроксимируют при $t\to\infty$ точное решение системы (2.2) с краевыми условиями (2.3).

Положим

$$f_1(x,\theta)=\begin{cases}0, & x<0,\\ s_{12}(z,\infty)e^{t(z^{-1}-z)}, & x>0,\end{cases}\qquad f_2(x,\theta)=\begin{cases}K, & x<0,\\ s_{22}(z,\infty), & x>0,\ z=e^{i\theta}.\end{cases}$$

Введем срезающие функции $\chi(x,\theta)$, $\chi_1(x)$, бесконечно дифференцируемые по x, θ, такие, что

$$\chi(x,\theta)=\begin{cases}0, & |x-\cos\theta|<t^{-\varkappa},\\ 1, & |x-\cos\theta|>2t^{-\varkappa},\end{cases}\qquad \chi_1(x)=\begin{cases}1, & 1-x^2<t^{-\frac{2}{3}},\\ 0, & 1-x^2>2t^{-\frac{2}{3}},\end{cases}$$

где $0<\varkappa<\frac{2}{3}$, $\varkappa$ - постоянная, определяемая ниже и не зависящая от x, t, θ.

Определим приближенное решение системы (2.2):

$$\begin{aligned}\bar{U}_1&=U\chi+(1-\chi)\hat{U}-(U-f_1)\chi_1,\\ \bar{U}_2&=W\chi+(1-\chi)\hat{W}-(\hat{W}-f_2)\chi_1,\end{aligned}\qquad (5.1)$$

где U, W - внешнее разложение решения задачи (2.2), (2.3), заданное формулами (2.15), $\hat{U}$, $\hat{W}$ - внутреннее разложение, заданное формулами (3.2), (3.5).

Отметим, что последние слагаемые в формуле (5.1) введены для компенсации особенностей внешнего разложения вблизи границы $|x|=1$ (см. ниже а.р. (5.7)).

Подставим функции (5.1) в систему (2.2):

$$\begin{aligned} \bar{v}_1(n+1) - \bar{v}_1(n) + A_n^* \bar{v}_2(n) &= \Omega_1(n,t,\theta), \\ \bar{v}_2(n+1) - \bar{v}_2(n) - A_n \bar{v}_1(n) &= \Omega_2(n,t,\theta). \end{aligned} \tag{5.2}$$

По построению внешнего и внутреннего разложений, правая часть (5.2) мала при $t \to \infty$, а именно имеет место

Теорема 7. *Существуют положительные постоянные, не зависящие от t, θ, такие, что правая часть системы (5.2) удовлетворяет оценке*

$$\|\Omega\|_{\ell_1} = \|\Omega_1\|_{\ell_1} + \|\Omega_2\|_{\ell_1} < Mt^{-\nu} \tag{5.3}$$

при $|\cos 2\theta| < 1 - t^{-2\nu'}$.

Доказательство. Зафиксируем $\theta \in (-\pi,\pi)$ такое, что $|\cos 2\theta| < 1 - t^{-2\nu}$, $\nu < \frac{æ}{2}$. По построению внешнего разложения, $\bar{v}_{1,2}(n,t,\theta) \equiv 0$ при $|n| > t$ или $|x| > 1$. Оценим сначала норму правой части при $1 - x^2 > 2t^{-\frac{2}{3}}$, т.е. при $\chi_1 = 0$.

Рассмотрим область $|x - \cos 2\theta| > 2t^{-æ}$ вне точки поворота, где $\chi = 1$ и $\bar{v}_1 = U$, $\bar{v}_2 = W$. В силу предложения 2 (§2) имеем

$$\|\Omega\|_{\ell_1}^{out} = \sum_{\left|\frac{n}{t} - \cos\theta\right| > 2t^{-æ}} |\Omega(n,t,\theta)| \le t\left[\int_{-1+t^{-\frac{2}{3}}}^{\cos\theta - 2t^{-æ}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\cos\theta + 2t^{-æ}}^{1-t^{-\frac{2}{3}}}\right]\left[M_1 t^{-\frac{3}{2}} (1-x^2)^{-1} |x - \cos\theta|^{-2} dx\right] < Mt^{-\frac{1}{2}+æ} \sin^{-2}\theta. \tag{5.4}$$

Во внутренней области, где $|x - \cos\theta| < t^{-æ}$, $\chi = 0$, $\bar{v}_1 = \hat{U}$, $\bar{v}_2 = \hat{W}$, используя предложение 3 (§3), получаем

$$\|\Omega\|^{in}_{\ell_1} = \sum_{\left|\frac{n}{t}-\cos\theta\right|<t^{-\varkappa}} |\Omega(n,t,\theta)| \leqslant M_1 t^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1}{2}}\theta \times$$

$$\times \int\limits_{|\sigma|<t^{\frac{1}{2}-\varkappa}\sin^{-\frac{1}{2}}\theta} \left(t^{-1}\sigma + t^{-\frac{3}{2}}\sigma^2\right)\sin^{-2}2\theta d\sigma < M\sin^{-3}2\theta t^{\frac{1}{2}-2\varkappa}. \qquad (5.5)$$

В промежуточной области $t^{-\varkappa} < |x-\cos\theta| < 2t^{-\varkappa}$ следует использовать условия согласования внутреннего и внешнего разложений. Из оценок леммы 5 имеем

$$\|\Omega\|^{trans}_{\ell_1} \leqslant \|\Omega\|^{in}_{\ell_1} + \sum'_{t^{-\varkappa}<\left|\frac{n}{t}-\cos\theta\right|<2t^{-\varkappa}} \left|\chi\left(\frac{n+1}{t},\theta\right)-\chi\left(\frac{n}{t},\theta\right)\right| \sup\left\{|U-\hat{U}|+\right.$$

$$\left.+|W-\hat{W}|\right\}+\|\Omega\|^{out}_{\ell_1} < M\left(t^{-\frac{1}{2}+\varkappa}+t^{\frac{1}{2}-2\varkappa}+t^{-\varkappa}+t^{1-4\varkappa}\right)\sin^{-3}2\theta. \qquad (5.6)$$

Нам осталось оценить норму Ω при $1-x^2 < 2t^{-\frac{2}{3}}$. Рассмотрим окрестность точки $x=-1$. В промежуточной области $t^{-\frac{2}{3}} < 1+x < 2t^{-\frac{2}{3}}$ из а.р. (2.7), (2.17), (2.15) следуют оценки

$$\begin{aligned} W-1 &= O\left\{(1+x)^{\frac{1}{2}}\ln(1+x) + t^{-1}(1+x)^{-1}|x-\cos\theta|^{-1}\right\}, \\ U &= A_n^{-1}\left[\hat{v}_2(n+1)-\hat{v}_2(n)\right] = O\left\{t^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{4}}|x-\cos\theta|^{-1}\right\}, \quad x\to -1. \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Действуя так же, как при оценке $\|\Omega\|^{trans}_{\ell_1}$ в формуле (5.6), и используя последние асимптотики, получаем

$$\sum_{t^{-\frac{2}{3}}<\frac{n}{t}+1<2t^{-\frac{2}{3}}} |\Omega(n,t,\theta)| < Mt^{-\frac{1}{3}+2\nu}\sin^{-3}2\theta. \qquad (5.8)$$

При $1+x < t^{-\frac{2}{3}}$, $\chi_1 = 1$, $\chi = 1$ из второго уравнения (5.2), применяя (5.7), получаем

$$\sum_{\frac{n}{t}+1<t^{-\frac{2}{3}}} |\Omega_2(n,t,\theta)| < \sum_{\frac{n}{t}+1<t^{-\frac{2}{3}}} |A_n||U(n,t,\theta)| < Mt^{-\nu-\frac{1}{6}}\sin^{-2}\theta.$$

Из первого уравнения (5.2) и оценки (5.7) имеем

$$\sum_{\frac{n}{t}+1<t^{-\frac{1}{3}}} |\Omega_1(n,t,\theta)| < \|\Omega_1\|_{\ell_1}^{out} + \sum_{\frac{n}{t}+1<t^{-\frac{2}{2}}} |A_n| |W(n,t,\theta)-1| <$$

$$< M\left(t^{-\frac{1}{2}+2\nu} + t^{-\frac{1}{2}+\varkappa}\right)\sin^{-2}\theta.$$

Оценки нормы Ω вблизи правой границы $x=1$ проводятся аналогично.

Объединяя все полученные выше оценки $\|\Omega\|$, выберем $\varkappa=\frac{1}{3}$. Тогда

$$\|\Omega\|_{\ell_1} < Mt^{-\frac{1}{6}}\sin^{-3}2\theta\left(1+t^{-\frac{1}{3}+2\nu}+t^{-\frac{1}{6}-2\nu}\right). \tag{5.9}$$

При $|\cos 2\theta| < 1-t^{-2\nu}$, полагая $\nu>0$ достаточно малым, получаем из (5.9) требуемую оценку. Теорема доказана.

Теорема 7 позволяет оценить разность точного и приближенного решений системы (2.2). Пусть V_1, V_2 - точное решение системы (1.2) с финитным потенциалом (0.4) $\hat{R}_n$, $\hat{S}_n$, удовлетворяющее начальным условиям

$$V_1\Big|_{n\to-\infty} = 0, \qquad V_2\Big|_{n\to-\infty} = K. \tag{5.10}$$

Тогда, по определению матрицы рассеяния, имеем

$$V_1\Big|_{n\to+\infty} = \hat{T}_{12}(z,t), \quad V_2\Big|_{n\to+\infty} = \hat{T}_{22}(z,t), \tag{5.11}$$

и, по теореме 3 для матрицы $\hat{T}(z,t)$, выполняются условия 1°-3° из §1.

Составим по формулам (2.1) функции U_1, U_2 - решения системы (2.2), удовлетворяющие условиям (5.10). Разности $\bar{U}_1-U_1$, $\bar{U}_2-U_2$ удовлетворяют нулевым начальным условиям при $n\to-\infty$ в силу конструкции приближенного решения (5.1). Кроме того, для этих функций выполняются уравнения (5.2).

Лемма 6. *Для решений* $\mathring{U}_0=\bar{U}_1-U_1$, $\mathring{U}_2=\bar{U}_2-U_2$ *системы* (5.2) *с нулевыми условиями при* $n\to-\infty$ *справедлива оценка*

$$|\mathring{U}_1|+|\mathring{U}_2|\Big|_{n\to+\infty} < Ct^{-\nu}, \quad |\cos 2\theta| < 1-t^{-2\nu}, \tag{5.12}$$

где положительные постоянные C, ν *не зависят от* t, θ.

Доказательство. Запишем систему (5.2) в матричной форме

$$\overset{\circ}{v}(n+1) - L_n \overset{\circ}{v}(n) = \Omega(n), \tag{5.13}$$

где

$$\overset{\circ}{v} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{v}_1 \\ \overset{\circ}{v}_2 \end{pmatrix}, \quad L_n = \begin{pmatrix} 1 & -A_n^* \\ A_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}.$$

Решение (5.13) с нулевыми начальными условиями при $n \to -\infty$ можно записать в виде

$$\overset{\circ}{v}(n) = \sum_{K=-\infty}^{n} \left(\prod_{m=K}^{n} L_m \right) \Omega(K),$$

где $\omega(n) = \prod_{m=-\infty}^{n} L_m$ - фундаментальное решение однородного уравнения (5.13) с условием $\omega(-\infty) = E$, E - единичная матрица. Переходя к пределу при $n \to +\infty$ в последней формуле для $\overset{\circ}{v}(n)$ и используя оценки теоремы 7, имеем

$$|\overset{\circ}{v}_1(+\infty)| + |\overset{\circ}{v}_2(+\infty)| \le \sum_{K=-\infty}^{\infty} \max_{1\le i,j\le 2} |w_{ij}(K)| \left(|\Omega_1(K)| + |\Omega_2(K)| \right) <$$

$$\le M_1 \|\Omega\|_{\ell_1} + M_2 t^{-\nu} \le C t^{-\nu}, \quad |\cos 2\theta| < 1 - t^{-2\nu}, \tag{5.14}$$

где $w(n) = \prod_{m=K}^{\infty} L_m$ - решение однородного уравнения (5.13) с условием $w(+\infty) = E$. При выводе оценки (5.14) использовался тот факт, что компоненты решений $\omega(n)$, $w(n)$ равномерно ограничены постоянной, не зависящей от t, θ Последнее следует из закона изменения вронскиана системы (1.2) с абсолютно суммируемым потенциалом (формула (1.7)). Лемма доказана.

Следствие. *Приближенная матрица рассеяния $\hat{T}(z,t)$, соответствующая потенциалу (0.4) $\hat{R}_n$, $\hat{S}_n$, аппроксимирует в L_2-норме по z, $|z| = 1$, точную матрицу рассеяния $T(z,t) = \exp Zt T(z) \exp(-Zt)$:*

$$\|\hat{T} - T\|_{L_2} \le M t^{-\nu}, \quad |z| = 1, \tag{5.15}$$

где постоянные M, ν не зависят от t.

Доказательство. По определению точного и приближенного решений системы (2.2) и в силу предложения 1 (§2) имеем при $n \to +\infty$:

$$\overset{\circ}{v}_1 = \bar{v}_1 - v_1 \to \left[T_{12}(z)e^{-t(z-z^{-1})} - \hat{T}_{12}(z,t)\right]L(z) + O(t^{-\frac{1}{4}}),$$

$$\overset{\circ}{v}_2 = \bar{v}_2 - v_2 \to \left[T_{22}(z) - \hat{T}_{22}(z,t)\right]L^*(z) + O(t^{-\frac{1}{4}}),$$

где множитель $L(z)$ определен формулой (2.5). Используя оценку (5.12) и ограниченность $\hat{T}$, T при $t \to \infty$, $|z|=1$ (условие 1° (§1)), получаем оценку (5.15) для T_{12}, T_{22}. В силу симметрии матрицы рассеяния относительно эрмитова сопряжения (условие 2°, §1), приходим к требуемой оценке и для остальных матричных элементов. Следствие доказано.

Теорема 8. *Приближенное решение (0.4) аппроксимирует в среднем при $t \to \infty$ точное решение задачи Коши (0.1), (0.2)*

$$\| R_n - \hat{R}_n \|_{\ell_2}, \quad \| S_n - \hat{S}_n \|_{\ell_2} \leq C t^{-\nu},$$

и постоянные C, ν не зависят от t.

Доказательство. Из оценки (5.15) и теоремы 4 (§1) имеем для матричных элементов множителей факторизации (1.10):

$$\hat{C}_{ij}(n,t,z) = C_{ij}(n,t,z) + t^{-\nu}\ell_{ij}(n,t,z), \tag{5.16}$$

где норма $\|\ell_{ij}\|_{L_2}$ ограничена по n, t.

Из первой формулы (1.18) для S_{n-1} получаем

$$\hat{S}_{n-1}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\left[C_{1,11}(n,t,z) + t^{-\nu}\ell_{11}(n,t,z)\right] z^{2n-1} e^{t(z-z^{-1})} \times$$

$$\times \frac{T_{12}(z) + t^{-\nu}P_{12}(n,t,z)}{T_{22}(z) + t^{-\nu}P_{22}(n,t,z)}\,dz = S_{n-1}(t) + t^{-\nu}\int\limits_{|z|=1} z^{2n-1}P(n,t,z)\,dz,$$

где $\|P\|_{L_2}$ ограничена константой, не зависящей от n, t. По формуле Парсеваля получим отсюда требуемую оценку для S_{n-1}. Оценка для R_n следует из второй формулы (1.18). Теорема доказана.

§6. Формулы для асимптотики решения уравнения (0.1) со знаком "-"

Уравнение (0.1) со знаком "-" интегрируется с помощью разностной системы (1.1), (1.2) с нижней парой знаков. Проводя рассуждения §1 для этой системы, получаем соотношения для матрицы рассеяния:

$$T_{12}^* = T_{21}, \quad T_{11}^* = T_{22}, \quad \det T = |T_{22}|^2 + |T_{12}|^2 = 1 \tag{6.1}$$

при $|z| = 1$.

Зависимость матрицы рассеяния от времени выражается соотношениями

$$T_{12}(z,t) = T_{12}(z,0)\exp t\,(z^{-1} - z), \quad T_{22}(z,t) = T_{22}(z,0). \tag{6.2}$$

Условия 1°-3° на матрицу T сохраняются, и справедливы теоремы 1-4.

Приближенное решение уравнения (0.1) со знаком "-" ищем в виде (0.4).

Процедура построения асимптотических решений, выполненная для уравнения (0.1) со знаком "+" в §2,3, аналогично выполняется и для второго уравнения (0.1). Уравнения (2.9) и (3.6) для главных членов внешнего и внутреннего разложений будут иметь вид:

$$w_0' = \left[r^2(x)\frac{z^{-1} - e^{-i\xi}}{z + e^{i\xi}} + s^2(x)\frac{z^{-1} - e^{i\xi}}{z + e^{-i\xi}} \right] w_0, \tag{6.3}$$

$$W_0'' - i\sigma W_0' - \alpha W_0 = 0, \tag{6.4}$$

где

$$\alpha = \begin{cases} 2r^2(-\cos\theta)\sin\theta, & 0 < \theta < \pi, \quad x + \cos\theta = \dfrac{\sigma\sqrt{2}\,\mathrm{sgn}\,\theta}{\sqrt{|\sin\theta|}}, \\ -2s^2(-\cos\theta)\sin\theta, & -\pi < \theta < 0, \quad z = e^{-i\theta}. \end{cases}$$

Отсюда видно, что точкой поворота в данном случае является точка $x = -\cos\theta$. Соответствующие асимптотики внешнего разложения при $x \to -\cos\theta$ получаются применением лемм 2 и 3 к решению уравнения (6.3):

$$w_0^+(x,z) = s_{22}(z,\infty)(x + \cos\theta)^{i\alpha} e^{L_2^*(\theta)}\left(1 + O(x + \cos\theta)\right), \quad x \to -\cos\theta + 0,$$

$$w_0^-(x,z) = K(-x - \cos\theta)^{i\alpha} e^{L_1^*(\theta)}\left(1 + O(-x - \cos\theta)\right), \quad x \to -\cos\theta - 0,$$

$$(A_n^*)^{-1}\left[\hat{v}(n+1)-\hat{v}(n)\right] = it^{-\frac{1}{2}} s_{12}(z,\infty)e^{t(z-z^{-1})}(x+\cos\theta)^{-i\alpha-1}\times \tag{6.5}$$

$$\times\exp\left[\frac{it(x+\cos\theta)^2}{\sin\theta} - i\gamma_1(-\cos\theta)\ln 2t - i\beta_1(-\cos\theta) + L_2(\theta) + iL_4(-\theta) - \right.$$

$$\left. - i\theta\right]\frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{2}}\left(1+O(x+\cos\theta)\right), \quad x\to -\cos\theta+0, \quad 0<\theta<\pi,$$

где коэффициенты s_{12}, s_{22} определены в предложении 1, а функции L_1, L_2, L_4 - в лемме 2, ее следствии и в лемме 3 (§2).

Асимптотика внутреннего разложения дается леммой 4 (§3), где следует заменить α на $-\alpha$, учитывая вид уравнения (6.4).

Согласование внешнего и внутреннего разложений осуществляется так же, как и в §4. В асимптотиках (6.5) следует перейти к внутренней переменной σ и записать условия согласования (4.5) - (4.7). Используя соотношения (6.1), для амплитуд r, s получаем формулы:

$$\begin{aligned} r^2(\cos\theta) &= \frac{1}{2\pi\sin\theta}\ln\left|T_{22}(-e^{i\theta})\right|, \\ s^2(\cos\theta) &= \frac{1}{2\pi\sin\theta}\ln\left|T_{22}(-e^{i\theta})\right|. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Для фазовых функций $\gamma_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ имеем:

$$\begin{aligned} &\gamma_1(\cos\theta) = 2r^2(\cos\theta)\sin\theta, \quad \gamma_2(\cos\theta) = 2s^2(\cos\theta)\sin\theta, \\ &\beta_j(-\cos\theta) = (-1)^{j-1}\arg T_{12}(e^{-i\theta(1-j)}) - \arg\Gamma(i\alpha) - \\ &-\theta+\pi\left(j-\frac{1}{4}\right) - \alpha_j\ln\sin\theta - \mathrm{Im}\left[L_1(\theta,\alpha_j) - L_2(\theta,\alpha_j)\right] + \\ &+ L_5(\theta,\alpha_j), \quad j=1,2, \quad 0<\theta<\pi, \end{aligned} \tag{6.7}$$

где $\alpha_1 = 2r^2(-\cos\theta)\sin\theta$, $\alpha_2 = 2s^2(-\cos\theta)\sin\theta$,

$$, \ L_5(\theta,\alpha_j) = 2\int_{-1}^{-\cos\theta}\Lambda_j(-\theta,p)\,dp + \int_{-1}^{1}\Lambda_j(-\theta,p)\,dp.$$

а функции L_1, L_2, Λ_j заданы равенствами (4.14). Полученный результат позволяет вычислить асимптотику решения нелинейной цепочки Тода:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_n = \alpha_n(\beta_{n+1} - \beta_n), \\ \dot{\beta}_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} \end{cases} \tag{6.8}$$

при некоторых ограничениях на начальные данные:

$$\alpha_n(0) = \alpha_n^0, \quad \beta_n(0) = \beta_n^0, \quad 1 - \alpha_n^0, \ \beta_n^0 \in \ell_1. \tag{6.9}$$

Здесь α_n, β_n - вещественные и функции $1-\alpha_n^0$, β_n убывают при $|n| \to \infty$ быстрее любой степени n.

Система (6.8) интегрируется с помощью задачи рассеяния для разностного уравнения [9]

$$\alpha_n v(n+1) + \beta_n v(n) + v(n-1) = (z + z^{-1}) v(n), \tag{6.10}$$

для решений которого ставятся граничные условия при $n \to \infty$, аналогичные условиям (1.5) для уравнения (1.2).

При произвольных начальных данных β_n^0, $1-\alpha_n^0 \in \ell_1$ матрица рассеяния уравнения (6.10) имеет особенности в точках $z = \pm 1$ (см. [10]). Матрица рассеяния подчиняется симметриям (6.1), и зависимость ее от t выражается формулами (6.2). Если предположить, что матрица рассеяния не имеет особенностей всюду на окружности $|z| = 1$, то класс таких матриц совпадет с классом W, рассмотренным в §1. Точнее, справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть начальные данные (6.9) цепочки Тода таковы, что соответствующая матрица рассеяния T уравнения (6.10) удовлетворяет условиям 1^0-3^0 из §1. Тогда существует пара вещественных функций $R_n^0, S_n^0 \in \ell_1$, таких, что решение задачи Коши (0.1), (0.2)*

$$\begin{cases} \dot{R}_n = (1 - R_n^2)(S_n - S_{n-1}), \\ \dot{S}_n = (1 - S_n^2)(R_{n+1} - R_n), \end{cases} \tag{0.1}$$

$$R_0(0) = R_n^0, \quad S_n(0) = S_n^0, \tag{0.2}$$

дает решение задачи Коши (6.8), (6.9) при помощи нелинейного преобразования:

$$\alpha_n = (1 + R_{n+1})(1 - R_n)(1 - S_{n-1}^2),$$

$$\beta_n = (1 + R_n) S_{n-1} - (1 - R_{n-1}) S_{n-2}.$$

Формулы (0.4), (6.6), (6.7) позволяют получить отсюда асимптотику при $t \to \infty$ решения задачи (6.8), (6.9).

Литература

1. Ablowitz M.J., Ladik J.F. Nonlinear differential-difference equations. - J.Math.Phys., 1975, v.16, N 3, p. 598-603.
2. Ablowitz M.J. Nonlinear evolution equations - continuous and discrete. - SIAM Review, 1977, v.19, N 4, p. 663-684.
3. Хабибуллин И.Т. Обратная задача рассеяния для разностных уравнений.- Докл. АН СССР, 1979, т.249, №1, с.67-70.
4. Новокшенов В.Ю. Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера.- Докл.АН СССР, 1980, т.251, №4, с.799-802.
5. Шабат А.Б. Обратная задача рассеяния.-Дифференц.уравнения, 1979, т.15, № 10, с.1824-1834.
6. Захаров В.Е., Манаков С.В. Асимптотическое поведение нелинейных волновых систем, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния.-ЖЭТФ, 1976, т.71, вып.1, с.201-215.
7. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.-М.: Наука, 1971.- 352 с.
8. Бейтмен Г.,Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2.-М.: Наука, 1974.- 295 с.