УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Чан Дык Ван (Ханой)

В области $Q=(0,T)\times K^{\nu}$ с боковой поверхностью $S=[0,T]\times\partial K^{\nu}$ изучается уравнение

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+L(t,x,D)u(t,x)=h(t,x), \tag{1}$$

где

$$L(t,x,D)u=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}A_{\alpha}(t,x,u,\ldots,D^{\gamma}u),\ |\gamma|=|\alpha|,$$

- нелинейный дифференциальный оператор бесконечного порядка; R^{ν} – ν-мерное евклидово пространство;

$$x\in K^{\nu}=\{x\in R^{\nu},\ 0<x_i<T_i,\ i=1,\ldots,\nu\},\ t\in[0,T),\ D^{\alpha}=\partial^{\alpha_1}/\partial^{\alpha_1}x_1\ldots\partial^{\alpha_\nu}/\partial^{\alpha_\nu}x_\nu .$$

Смешанная задача для уравнения (1) с регулярной эллиптической частью $L(t,x,D)$ изучена в работе Ю.А.Дубинского [1].

В настоящей работе результаты, полученные в [2] для эллиптических вырождающихся уравнений бесконечного порядка, развиваются автором применительно к нелинейным гиперболическим вырождающимся уравнениям бесконечного порядка.

Допустим, что для уравнения (1) выполнены следующие условия:

а) Функции $A_{\alpha}(t,x,\xi)$, $(t,x)\in Q$, $\xi=(\xi_0,\ldots,\xi_\gamma)$, $\xi_\gamma\in C^1$) удовлетворяют условию Каратеодори и для любого N справедливо неравенство:

$$\Big|\sum_{|\alpha|=N}A_{\alpha}(t,x,\xi_0,\ldots,\xi_\gamma)\overline{\eta}_{\alpha}\Big|\le\sum_{|\alpha|=N}a_{\alpha}\rho_{\alpha}(x)|\xi_{\alpha}|^{p-1}|\eta_{\alpha}|+\delta_N ,$$

где $a_\alpha \geq 0$, $p \geq 2$, $\delta_N \geq 0$ - постоянные; $\delta_1+\delta_2+\ldots+<+\infty$, $\rho_\alpha(x)=x_1^{q_{\alpha_1}}\ldots x_\nu^{q_{\alpha_\nu}}$ - весовые множители, $q_{\alpha_i} \geq 0$ $(i=1,\ldots,\nu)$.

б) Для любой достаточно гладкой функции $u(t,x)$ ($u(0,x)=0$, $u'(0,x)=0$, где через u', u'' обозначаются производные первого и второго порядков функции $u(t,x)$ по переменной t) справедливо неравенство:

$$\operatorname{Re}\sum_{|\alpha|=N}\int_0^t < A_\alpha(\tau,x,u,\ldots,D^\gamma u), D^\alpha u' > d\tau \geq$$

$$\geq \sum_{|\alpha|=N} a_\alpha \int_{K^\nu} \rho_\alpha(x)|D^\alpha u(t,x)|^p dx - b_N,$$

где $t\in(0,T)$ произвольно, в $b_N \geq 0$ - постоянные, причем

$$b_1+b_2+\ldots+<+\infty, \quad <u,v> = \int_{K^\nu} u(x)v(x)dx.$$

в) Функция $h(t,x)$, по определению, имеет вид:

$$h(t,x) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha(\rho_\alpha(x)h_\alpha(t,x)),$$

где $h_\alpha^{(i)}(t,x)\in L_{p'}(Q)$, $p'=p/(p-1)$, $i=0,1$, причем

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \sup_t \int_{K^\nu} \rho_\alpha(x)|h_\alpha^{(i)}(t,x)|^{p'} dx < \infty, \quad h_\alpha^{(i)} \equiv \frac{\partial^i h_\alpha}{\partial t^i}.$$

Предположим для простоты, что для всех $i=1,\ldots,\nu$

$$\sup_{\alpha_i}\left\{\alpha_i - \left[\frac{q_{\alpha_i}+1}{p}\right]\right\} = +\infty. \tag{i}$$

(В случае, если

$$\sup\left\{\alpha_i - \left[\frac{q_{\alpha_i}+1}{p}\right]\right\} = s_i < +\infty,$$

то на части боковой поверхности $S\cap\{x_i=0\}$ надо задать s_i-1 краевых условий

$$D_{x_i}^m u(t,x)\Big|_{S\cap\{x_i=0\}} = 0, \quad m=0,1,\ldots,s_i-1.$$

По этому поводу см. [2].)

Основным предположением является следующее условие:

г) Эллиптической части уравнения (1) соответствует банахово пространство

$$\overset{0}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p, \rho_\alpha\}(K^\nu) \equiv \{u(x) : u(x) \in C_0^\infty(K^\nu),$$

$$\|u\|_\infty^p = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \int_{K^\nu} \rho_\alpha(x)\,|D^\alpha u(x)|^p dx < \infty\},$$

которое предполагается нетривиальным (критерии нетривиальности пространств $\overset{0}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p, \rho_\alpha\}(K^\nu)$ установлены в работе [2], см. также [3]).

Как видно из (i) , к уравнению (1) нужно присоединить бесконечное число краевых условий

$$D^\omega u\big|_S = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \ldots \; . \tag{2}$$

Поставим начальные условия

$$u(0, x) = 0, \quad u'(0, x) = 0. \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема о разрешимости задачи (1)-(3).

Теорема. *Пусть выполнены условия а)-г). Тогда для любой функции* $h(t, x)$ *вида в) существует по крайней мере одно решение задачи (1) -(3), т.е. существует функция* $u(t, x)$ *, удовлетворяющая следующим условиям:*

I) функция $u(t, x)$ *имеет конечный "интеграл энергии":*

$$I = \sup_t \Big\{ \int_{K^\nu} |u'(t,x)|^2 dx + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \int_{K^\nu} \rho_\alpha(x)\,|D^\alpha u(t,x)|^p dx \Big\} < +\infty;$$

II) справедливо тождество

$$\int_0^T \langle h, v\rangle dt = -\int_0^T \langle u', v'\rangle dt + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \int_0^T \langle A_\alpha(t, x, u, \ldots, D^\gamma u), D^\alpha v\rangle dt, \tag{4}$$

где $v(t, x)$ *- произвольная функция такая, что*

$$\int_Q |v'|^2 dt dx + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \int_Q \rho_\alpha(x) |D^\alpha v(t,x)|^p dt dx < +\infty,$$

причем $v(T,x)=0, \quad D^\omega v\Big|_S = 0, \quad |\omega| = 0,1,\dots;$

III) *справедливы условия* (2) *и* (3), *причем равенство* $u'(0,x)=0$ *выполнено в смысле теории распределений над пространством* $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha,p,\rho_\alpha\}(K^\nu)$.

Доказательство. Схема доказательства аналогична схеме доказательства в стационарном случае [2], поэтому мы изложим его кратко. Рассмотрим сначала семейство вспомогательных задач конечного порядка $2N+2$:

$$u_N'' + \sum_{|\alpha|=N+1} (-1)^{N+1} a_\alpha D^{2\alpha} u_N + L_{2N}(u_N) = h^N(t,x), \tag{1$_N$}$$

$$D^\omega u_N\Big|_S = 0, \quad |\omega| \le N, \tag{2$_N$}$$

$$u_N(0,x)=0, \quad u_N'(0,x)=0, \tag{3$_N$}$$

где

$$L_{2N}(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{N} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(t,x,u,\dots,D^\gamma u),$$

$$h^N(t,x) = \sum_{|\alpha|=0}^{N} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha(\rho_\alpha(x) h_\alpha(t,x)).$$

Задача $(1)_N$ - $(3)_N$, будучи слабо нелинейной гиперболической задачей, разрешима; решение $u_N(t,x)$ может быть получено, например, методом Галёркина - Фаэдо-Хопфа (см. [4]). При этом из условий б) и в) следует неравенство:

$$\sup_t \Big\{ \int_{K^\nu} |u_N'(t,x)|^2 dx + \sum_{|\alpha|=N+1} a_\alpha \int_{K^\nu} |D^\alpha u_N(t,x)|^2 dx +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=0}^{N} a_\alpha \int_{K^\nu} \rho_\alpha(x) |D^\alpha u_N(t,x)|^p dx \Big\} \le C, \tag{5}$$

где $C = C(h) \geq 0$ - не зависящая от N постоянная. Оценка (5) получается стандартным образом, т.е. умножением уравнения $(1)_N$ на $u'_N(t,x)$ и интегрированием полученного равенства по области K^ν (при этом используются условия б) и в)).

Из оценки (5) и теории вложения весовых пространств Соболева [5,6] вытекает, что существуют функция $u(t,x)$, имеющая конечный "интеграл энергии":

$$I = \sup_t \left\{ \int_{K^\nu} |u'(t,x)|^2 dx + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \int_{K^\nu} \rho_\alpha(x) |D^\alpha u(t,x)|^p dx \right\},$$

и подпоследовательность последовательности $u_N(t,x)$ (обозначим ее также через $u_N(t,x)$), которая сходится к $u(t,x)$ равномерно со всеми производными по переменным x и

$$\begin{aligned} D^\alpha u_N &\longrightarrow D^\alpha u && \text{сильно в } L_p(Q), \ |\alpha| = 0,1,\dots; \\ u'_N &\longrightarrow u' && \text{слабо в } L_2(Q). \end{aligned}$$

Ясно, что $u(0,x) = 0$ и $D^\omega u|_S = 0$, $|\omega| = 0,1,\dots$. Кроме того, повторяя рассуждения, проведенные в [2], убеждаемся, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет равенству (4).

Остается проверить, что $u'(0,x) = 0$. Действительно, в тождестве (4) положим $v(t,x) = \varphi(t)\psi(x)$, где $\varphi(t) \in C_0^\infty(0,T)$, $\psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p, \rho_\alpha\}(K^\nu)$. Тогда, интегрируя по частям, получаем равенство

$$\int_0^T \langle h, \psi(x) \rangle \varphi(t) dt = \int_0^T \langle u, \psi(x) \rangle \varphi''(t) dt +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \int_0^T \langle A_\alpha(t,x,u,\dots,D^\gamma u), D^\alpha \psi(x) \rangle \varphi(t) dt,$$

которое означает, что найденное решение $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (1) в смысле обобщенных функций над пространством $C_0^\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p, \rho_\alpha\}(K^\nu))$.

Так как $u(t,x) \in L_p(0,T; \overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p, \rho_\alpha\}(K^\nu))$, а $h(t,x) \in L_{p'}((0,T); W^{-\infty}\{a_\alpha, p', \rho_\alpha\}(K^\nu))$, то из уравнения (1) получаем, что

$u'' \in L_{p'}(0,T;\, W^{-\infty}\{a_\alpha, p', \rho_\alpha\}(K^\nu))$, где пространство $W^{-\infty}\{a_\alpha,p',\rho_\alpha\}(K^\nu)$ определяется следующим образом:

$$W^{-\infty}\{a_\alpha,p',\rho_\alpha\}(K^\nu) = \Big\{h(x),\ h(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\rho_\alpha h_\alpha(x)),$$

$$\|h\|_{-\infty}^{p'} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \int_{K^\nu} \rho_\alpha(x)|h_\alpha(x)|^{p'} dx < +\infty\Big\}.$$

Следовательно, уравнение (1) справедливо в смысле обобщенных функций над основным пространством $L_p(0,T;\, \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha,p,\rho_\nu\}(K^\nu))$, т.е.

$$\int_0^T \langle h, v\rangle dt = \int_0^T \langle u'', v\rangle dt + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \int_0^T \langle A_\alpha(t,x,u,\ldots,D^\gamma u), D^\alpha v\rangle dt \qquad (6)$$

для любой функции $v(t,x) \in L_p(0,T;\, \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha,p,\rho_\alpha\}(K^\nu))$, причем никаких априорных условий гладкости по t или условий обращения в нуль при $t=0$ или при $t=T$ от основных функций не требуется.

В частности, возьмем в тождестве (6) функцию $v(t,x)$, удовлетворяющую условию II) теоремы, т.е $v(T,x)=0$, $D^\omega v|_S = 0$, $|\omega| = 0,1,\ldots$. Тогда, интегрируя в (6) по частям, получаем, что

$$\int_0^T \langle h,v\rangle dt = -\int_0^T \langle u', v'\rangle dt + \langle u', v\rangle\Big|_{t=0} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \int_0^T \langle A_\alpha(t,x,u,\ldots,D^\gamma u), D^\alpha v\rangle dt.$$

Сравнивая последнее тождество с тождеством (4), имеем

$$\langle u', v\rangle\Big|_{t=0} = 0.$$

Следовательно, $u'(0,x) = 0$, поскольку значение $v(0,x)$ произвольно. Теорема полностью доказана.

Пример. Рассматривается в Q смешанная задача:

$$u'' + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_\alpha \rho_\alpha(x) |D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u(t,x)) = h(t,x), (t,x) \in Q; \quad (7)$$

$$u(0,x) = u'(0,x) = 0; \quad (8)$$

$$D^{\omega} u(t,x) \Big|_S = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \ldots, \quad (9)$$

где $a_\alpha \geqslant 0, p \geqslant 2, q \geqslant 0$ - постоянные, $\rho_\alpha(x) = x_1^q \ldots x_\nu^q$. Предположим, что пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p, \rho_\alpha\}(K^\nu)$ нетривиально (это будет, например, при $a_\alpha = (|\alpha|!)^{-pk}$, $k > 1$). Тогда задача (7)-(9) разрешима в смысле доказанной теоремы и имеет нетривиальное решение.

Автор благодарит профессора Ю.А.Дубинского за обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения.- В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.М., 1976, т.9, с.5-125.
2. Чан Дык Ван. О разрешимости краевых задач для нелинейных вырождающихся дифференциальных уравнений бесконечного порядка.- Дифференц. уравнения, 1980, т.16, № 10, с. 1850-1863.
3. Чан Дык Ван. Нелинейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка и соответствующие функциональные пространства.- Автореф.докт.дис.- Новосибирск, Институт математики СО АН СССР, 1980.- 23 с.
4. Лионс Ж. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.- М.: Мир, 1972.-587 с.
5. Успенский С.В. О теоремах вложения для весовых классов.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1961, т.60, с.283-303.
6. Triebel H. Boundary values for Sobolev spaces with weights. Density of $D(\Omega)$ in $W^s_{p,\gamma_0,\ldots,\gamma_r}(\Omega)$ and in $H^s_{p,\gamma_0,\ldots,\gamma_r}(\Omega)$ for $s>0$ and $r = [s - 1/p]$. - Ann.scuola norm.super., Pisa, 1973, v.27,f.1, p. 72-96.