УДК 517.947

О РЕГУЛЯРНОСТИ ГРАНИЦЫ В L_p-ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. II

В.Г..Мазья, Т.О.Шапошникова (Ленинград)

Настоящая работа является второй частью статьи, опубликованной в [1] под одноименным заглавием, там же введены основные определения и обозначения.

§4. Свойства пространств W_p^{-k}

В этом параграфе приводятся вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем при изучении условий разрешимости задачи Дирихле в $W_p^l(\Omega)$.

Пусть, как и ранее, $G=\{z=(x,y): x\in R^{n-1},\ y>\varphi(x)\}$ - специальная липшицева область, $\zeta=\varkappa(z)=(\xi(z),\eta(z))$.

Будем говорить, что обобщенная функция f в G принадлежит пространству $W_p^{-k}(G)$, где k - целое положительное число, если

$$f(z)=\sum_{|\alpha|\le k} D^\alpha f_\alpha(z), \tag{4.1}$$

где f_α - функции, удовлетворяющие условию

$$\left(\frac{\eta(z)}{1+\eta(z)}\right)^{k-|\alpha|} f_\alpha\in L_p(G).$$

Норма в пространстве $W_p^{-k}(G)$ определяется равенством

$$\|f;G\|_{p,-k}=\inf_{\{f_\alpha\}}\sum_{|\alpha|\le k}\left\|\left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{k-|\alpha|} f_\alpha;G\right\|_p .$$

Если $f\in W_p^{-k}(G)$, то, как нетрудно проверить, $D^\beta f\in W_p^{-k-|\beta|}(G)$

и справедливо неравенство

$$\| D^{\beta} f ; G \|_{p,-k-|\beta|} \leq c \| f ; G \|_{p,-k} .$$

Лемма 4.1. *Если* $f \in W_p^{-k}(G)$, *то* $f \circ \lambda \in W_p^{-k}(R_+^n)$ *и справедлива оценка*

$$\| f \circ \lambda ; R_+^n \|_{p,-k} \leq c \| f ; G \|_{p,-k} . \tag{4.2}$$

Доказательство. Если $|\alpha| > 0$, то

$$(D^{\alpha} f_{\alpha})(\lambda(\zeta)) = \sum_{1 \leq |\beta| \leq |\alpha|} D_{\zeta}^{\beta} \left[f_{\alpha}(\lambda(\zeta)) \right] \pi_{\alpha\beta}(\zeta),$$

где

$$\pi_{\alpha\beta}(\zeta) = \sum_{s} c_s \prod_{i,j} (D^{s_{ij}} x_i)(\lambda(\zeta)),$$

суммирование распространено на все наборы $s = (s_{ij})$, удовлетворяющие условию (2.2) (см. [1]). Поэтому

$$(D^{\alpha} f_{\alpha})(\lambda(\zeta)) = \sum_{1 \leq |\beta| \leq |\alpha|} \sum_{0 \leq |\gamma| \leq |\beta|} c_{\alpha\beta\gamma} D_{\zeta}^{\gamma} \{ f_{\alpha}(\lambda(\zeta)) D_{\zeta}^{\beta-\gamma} \pi_{\alpha\beta}(\zeta) \} =$$

$$= \sum_{0 \leq |\gamma| \leq |\alpha|} D_{\zeta}^{\gamma} \sum_{\substack{|\gamma| \leq |\beta| \leq |\alpha|, \\ |\beta| \geq 1}} c_{\alpha\beta\gamma} f_{\alpha}(\lambda(\zeta)) D_{\zeta}^{\beta-\gamma} \pi_{\alpha\beta}(\zeta).$$

Обозначим последнюю сумму через $F_{\gamma}(\zeta)$.

Рассмотрим выражение

$$\left(\frac{\eta}{1+\eta} \right)^{k-|\alpha|} f_{\alpha} \circ \lambda \times \frac{1}{(1+\eta)^{|\alpha|-|\gamma|}} \times \eta^{|\alpha|-|\gamma|} D_{\zeta}^{\beta-\gamma} \pi_{\alpha\beta}(\zeta).$$

Из следствия 2.2 (см. [1]) вытекает, что последний множитель ограничен в R_+^n. Ясно, что ограничен и второй множитель, а первый принадлежит $L_p(R_+^n)$ согласно определению пространства $W_p^{-k}(R_+^n)$. Поэтому

$$\eta^{k-|\gamma|}(1+\eta)^{|\gamma|-k} F_{\gamma} \in L_p(R_+^n)$$

и справедлива оценка

$$\left\| \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{\kappa-|\gamma|} F_\gamma ; R^n_+ \right\|_p \leq c \sum_{|\alpha|\leq\kappa} \left\| \left(\frac{\eta}{1+\eta}\circ\varkappa\right)^{\kappa-|\alpha|} f_\alpha ; G \right\|_p .$$

Лемма доказана.

Точно так же, меняя ролями $\varkappa$ и λ, G и R^n_+ и т.д., получаем оценку, обратную к (4.2). Именно, имеет место

Лемма 4.2. *Если* $f\in W^{-\kappa}_p(R^n_+)$, $\kappa>0$, *то* $f\circ\varkappa\in W^{-\kappa}_p(G)$ *и справедлива оценка*

$$\| f\circ\varkappa ; G\|_{p,\kappa} \leq c\| f ; R^n_+\|_{p,-\kappa} . \qquad (4.3)$$

Пусть $[\overset{\circ}{W}{}^\kappa_{p'}(R^n_+)]^*$ - пространство, сопряженное с $\overset{\circ}{W}{}^\kappa_p(R^n_+)$. Как известно (см.[2]), оператор

$$(-\Delta)^\kappa+E : \overset{\circ}{W}{}^\kappa_p(R^n_+) \longrightarrow [\overset{\circ}{W}{}^\kappa_{p'}(R^n_+)]^*$$

осуществляет изоморфизм. Поэтому произвольный элемент g пространства $[\overset{\circ}{W}{}^\kappa_{p'}(R^n_+)]^*$ представляется в виде

$$g=\sum_{|\alpha|=\kappa} D^\alpha g_\alpha+g_0 , \quad g_\alpha, g_0\in L_p(R^n_+),$$

и, следовательно, принадлежит пространству $W^{-\kappa}_p(R^n_+)$. С другой стороны, в силу неравенства Харди, любая обобщенная функция из $W^{-\kappa}_p(R^n_+)$ порождает непрерывный функционал на $\overset{\circ}{W}{}^\kappa_p(R^n_+)$. Значит, $[\overset{\circ}{W}{}^\kappa_{p'}(R^n_+)]^*=W^{-\kappa}_p(R^n_+)$ Отсюда и из лемм 4.1, 4.2. получаем

Следствие 4.1. *Пространство* $W^{-\kappa}_p(G)$ *является сопряженным с* $\overset{\circ}{W}{}^\kappa_{p'}(G)$.

В дальнейшем в этом разделе предполагается, что область G принадлежит классу $M^{l-h+1/p'}_p$, где l и h - целые числа, $l\geq h\geq 1$. Иначе говоря, $\nabla\varphi\in MW^{l-h-1/p}_p(R^{n-1})$, если $l-h>1$ и $\varphi\in C^{0,1}(R^{n-1})$, если $l-h=1$ Обозначим через λ отображение $R^n_+\ni(\xi,\eta)\longrightarrow(x,y)\in G$, определенное равенством (2.9) (см.[1]) и через $\varkappa$ обратное отображение.

Лемма 4.3. *Пусть* $v\in(\overset{\circ}{W}{}^\kappa_p\cap W^{t+\kappa}_p)(G)$, $0\leq t\leq l-h$. *Тогда*

$$\left\| \left(\frac{1+\eta}{\eta}\right)^{\kappa} v ; G \right\|_{p,t} \leq c \, \| v ; G \|_{p,t+\kappa} .$$

Доказательство. Достаточно получить оценку

$$\| \eta^{-\kappa} v ; G \|_{p,t} \leq c \, \| v ; G \|_{p,t+\kappa} . \tag{4.4}$$

Так как $\eta(z) \sim y - \varphi(x)$, то при $t = 0$ оценка (4.4) следует из неравенства Харди

$$\int_{\varphi(x)}^{\infty} |v(x,y)|^p \frac{dy}{(y-\varphi(x))^{p\kappa}} \leq c \int_{\varphi(x)}^{\infty} \left| \frac{\partial^{\kappa} v}{\partial y^{\kappa}}(x,y) \right|^p dy \tag{4.5}$$

для п.в. $x \in R^{n-1}$. Пусть лемма доказана для всех $t < T$ и $\kappa > K$. Имеем

$$\| \eta^{-K} v ; G \|_{p,T} \leq \| \nabla (\eta^{-K} v) ; G \|_{p,T-1} + \| \eta^{-K} v ; G \|_{p} .$$

Второе слагаемое справа оценивается с помощью (4.5), а первое не превосходит

$$\| \eta^{-K} \nabla v ; G \|_{p,T-1} + K \| \eta^{-K-1} v \nabla \eta ; G \|_{p,T-1} . \tag{4.6}$$

Так как $G \subset M_p^{\ell-h+1/p'}$, то $\nabla \eta \in MW_p^{\ell-h}(G) \subset MW_p^{T-1}(G)$. Поэтому сумма (4.6) не больше, чем

$$\| \eta^{-K} \nabla v ; G \|_{p,T-1} + c \, \| \eta^{-K-1} v ; G \|_{p,T-1} .$$

Используя предположение индукции, заканчиваем доказательство.

Предложение 4.1 *Если* $\left(\frac{\eta(z)}{1+\eta(z)}\right)^{n-|\beta|} a_{\alpha\beta}(z) \in M\left(W_p^{\ell-h}(G) \to W_p^{\ell-2h+|\alpha|}(G)\right)$, $\ell \geq h$, *то дифференциальный оператор*

$$\mathcal{P}u = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq h} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta}(z) D^{\beta} u)$$

непрерывен, как оператор из $(W_p^{\ell} \cap \overset{\circ}{W}{}_p^{h})(G)$ *в* $W_p^{\ell-2h}(G)$ *и его норма не превосходит*

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le h} \left\| \left(\frac{\eta}{1+\eta}\right)^{h-|\beta|} a_{\alpha\beta};\, G \right\|_{\ell-h\to\ell-2h+|\alpha|}.$$

Доказательство. Согласно лемме 4.3, $\left(\frac{\eta(z)}{1+\eta(z)}\right)^{|\beta|-h} (D^{\beta}u)(z) \in W_p^{\ell-h}(G)$. Следовательно, $a_{\alpha\beta} D^{\beta} u \in W_p^{\ell-2h+|\alpha|}(G)$ и $D^{\alpha}(a_{\alpha\beta} D^{\beta} u) \in W_p^{\ell-2h}(G)$. Предложение доказано.

Лемма 4.4. *Для всех* $u \in W_p^{\ell}(G) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^{h}(G)$ *справедлива оценка*

$$\| u\circ\lambda;\, R_+^n \|_{p,\ell} \le c \| u;\, G\|_{p,\ell}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{R_+^n} |D_{\zeta}^{\alpha}[u(\lambda(\zeta))]|^p d\zeta \le c \sum_{1\le|\beta|\le\ell} \int_{R_+^n} \Big|(D^{\beta}u)(\lambda(\zeta)) \sum_{s} c_s \prod_{i,j} D_{\zeta}^{s_{ij}} \lambda_i(\zeta)\Big|^p d\zeta,$$

где α - любой положительный мультииндекс порядка ℓ, а $s=(s_{ij})$- набор мультииндексов, подчиненных условиям (2.2) (см.[1]). Следовательно,

$$\int_{R_+^n} |D_{\zeta}^{\alpha}[u(\lambda(\zeta))]|^p d\zeta \le c \sum_{1\le|\beta|\le\ell} \int_{G} \Big|(D^{\beta}u)(z) \sum_{s} c_s \prod_{i,j} (D^{s_{ij}}\lambda_i)(\varkappa(z))\Big|^p dz \|\varkappa';G\|_{\infty}^p. \tag{4.8}$$

Пусть $|\beta| \ge h$ или, что то же, $\ell-|\beta| \le \ell-h$. Так как $\nabla\lambda_i \in MW_p^{\kappa}(R_+^n)$ при $\kappa\le\ell-h$, то $D^{s_{ij}}\lambda_i \in M(W_p^{\kappa}(R_+^n) \to W_p^{\kappa-|s_{ij}|+1}(R_+^n))$ при $|s_{ij}|-1\le\kappa\le\ell-h$. Поэтому

$$\prod_{i,j} D^{s_{ij}}\lambda_i \in M\big(W_p^{\sum_{i,j}(|s_{ij}|-1)}(R_+^n) \to L_p(R_+^n)\big) = M\big(W_p^{\ell-|\beta|}(R_+^n) \to L_p(R_+^n)\big).$$

Поскольку $\varkappa$ — $(p,\ell-h)$ - диффеоморфизм, то

$$\prod_{i,j} D^{s_{ij}}\lambda_i\circ\varkappa \in M\big(W_p^{\ell-|\beta|}(G) \to L_p(G)\big).$$

Следовательно, слагаемые в правой части (4.8), соответствующие мультииндексу β порядка $|\beta| \geq h$, не превосходят $c\,\|u;G\|^p_{p,\ell}$.

Допустим теперь, что $|\beta| \leq h-1$. В силу (4.4) функция $z \longrightarrow \eta(z)^{|\beta|-h}(D^\beta u)(z)$ принадлежит пространству $W_p^{\ell-h}(G)$.

Обозначим через σ_{ij} целые числа, удовлетворяющие условиям $1 \leq \sigma_{ij} \leq |\gamma_{ij}|$, $\sum_{i,j}(\sigma_{ij}-1) = h - |\beta|$. Такие числа существуют, поскольку $\sum_{i,j}(|\gamma_{ij}|-1) = \ell - |\beta|$ и $\ell \geq h$. По следствию 2.2 (см. [1]) функция $\xi \longrightarrow \eta^{\sigma_{ij}-1}(D^{\gamma_{ij}}\lambda_i)(\xi)$ является элементом пространства $M(W_p^\kappa(R^n_+) \longrightarrow W_p^{\kappa-|\gamma_{ij}|+\sigma_{ij}}(R^n_+))$. Замечая, что

$$\prod_{i,j}(D^{\gamma_{ij}}\lambda_i)(\xi) = \eta^{|\beta|-h}\prod_{i,j}\eta^{\sigma_{ij}-1}(D^{\gamma_{ij}}\lambda_i)(\xi),$$

получаем, что функция $\xi \longrightarrow \eta^{h-|\beta|}\prod(D^{\gamma_{ij}}\lambda_i)(\xi)$ принадлежит пространству

$$M(W_p^{\ell-h}(R^n_+) \longrightarrow L_p(R^n_+)).$$

Так как $\varkappa$ – $(p,\ell-h)$-диффеоморфизм, то функция $z \longrightarrow \eta(z)^{h-|\beta|}(\prod D^{\gamma_{ij}}\lambda_i)(\varkappa(z))$ – элемент пространства $M(W_p^{\ell-h}(G) \longrightarrow L_p(G))$.

Значит, слагаемые в правой части (4.8), соответствующие мультииндексу β порядка $|\beta| \leq h-1$ не превосходят $c\,\|u;G\|^p_{p,\ell}$.

Поскольку λ – билипшицево отображение, то

$$\|u;G\|_p \sim \|u\circ\lambda;R^n_+\|_p.$$

Отсюда и из (4.8) получаем оценку (4.7). Лемма доказана.

Докажем обратное утверждение.

Лемма 4.5. *Для всех* $v \in W_p^\ell(R^n_+) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^h(R^n_+)$ *справедлива оценка*

$$\|v\circ\varkappa;G\|_{p,\ell} \leq c\,\|v;R^n_+\|_{p,\ell}. \tag{4.9}$$

Доказательство. Достаточно установить неравенство

$$\int_G |D_z^\alpha[v(\varkappa(z))]|^p dz \leq c\,\|v;R^n_+\|^p_{p,\ell}.$$

Левая часть не превосходит

$$c\sum_{1\le|\beta|\le l}\int_{R^n_+}|(D^\beta_\zeta v)(\zeta)\sum_s c_s\prod_{i,j}(D^{s_{ij}}\varkappa_i)(\lambda(\zeta))|^p d\zeta\,\|\lambda';R^n_+\|^p_\infty \quad (4.10)$$

(ср.с (4.8)) . Пусть $|\beta|\ge h$. Рассуждая дословно так же, как при доказательстве леммы 4.4 и при этом меняя ролями R^n_+ и G, λ и $\varkappa$, u и v, получим, что слагаемые в (4.10) соответствующие мультииндексу β порядка $|\beta|\ge h$, не превосходят $c\|v;R^n_+\|^p_{p,l}$.

Пусть теперь $|\beta|\le h-1$. Так как $v\in W^l_p(R^n_+)\cap \mathring{W}^h_p(R^n_+)$, то функция $\varrho^{h-|\beta|}(D^\beta v)(\zeta)$ принадлежит пространству $W^{l-h}_p(R^n_+)$ и ее норма не превосходит $c\|v;R^n_+\|_{p,l}$. Согласно лемме 2.4 (см. [1]), $\varrho^{|s_{ij}|-1}(D^{s_{ij}}\varkappa_i)(\lambda(\zeta))$ - мультипликатор в $W^{l-h}_p(R^n_+)$. Значит, функция $\varrho^{|\beta|-h}\prod(D^{s_{ij}}\varkappa_i)(\lambda(\zeta))$ - мультипликатор в том же пространстве. Лемма доказана.

§5. Разрешимость задачи Дирихле в $W^l_p(\Omega)$

1°. Нётеровость задачи Дирихле. В следующих двух леммах, которые доказываются так же, как леммы 2.3 и 2.4 (см.[1]), R - дифференциальный оператор порядка $2h$ с постоянными коэффициентами, имеющий вид

$$R(D)=\sum_{|\alpha|,|\beta|=h}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(r_{\alpha\beta}D^\beta),$$

и S - оператор, определенный равенством (2.2) (см.[1]).

Лемма 5.1. *Для всех* $v\in(W^l_p\cap\mathring{W}^h_p)(R^n_+)$, $l\ge h$, *справедлива оценка*

$$\|(S-R)v;R^n_+\|_{p,l-2h}\le c\|E-\lambda';R^n_+\|_{l-h\to l-h}\|v;R^n_+\|_{p,l},$$

где c *- непрерывная функция нормы* λ' *в* $MW^{l-h}_p(R^n_+)$, *не зависящая от* v.

Лемма 5.2. *Для всех* $v\in(W^l_p\cap\mathring{W}^h_p)(R^n_+)$, $l\ge h$, *с носителями в*

$B_r \cap R^n_+$ справедливо неравенство

$$\|(S-R)v;\ R^n_+\|_{p,\ell-2h} \leqslant c\|E-\lambda';\ B_r \cap R^n_+\|_{\ell-h\to\ell-h}\|v;R^n_+\|_{p,\ell} \quad (5.1)$$

При $p(\ell-h)>n$ из (1.4) (см. [1]) следует, что неравенство (5.1) эквивалентно следующему:

$$\|(S-R)v;R^n_+\|_{p,\ell-2h} \leqslant cr^{\ell-h-n/p}\|E-\lambda';B_r \cap R^n_+\|_{p,\ell-h}\|v;R^n_+\|_{p,\ell}. \quad (5.2)$$

Пусть

$$\mathcal{P}u = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant h}(-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^\alpha(a_{\alpha\beta}(z)\mathcal{D}^\beta u),$$

где $a_{\alpha\beta}\in C^{\ell-h}(\bar\Omega)$, $\ell\geqslant h$, и пусть для всех $u\in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство Гординга .

$$Re\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=h} a_{\alpha\beta}\mathcal{D}^\alpha u\overline{\mathcal{D}^\beta u}dz \geqslant c\|u;\Omega\|^2_{2,h}. \quad (5.3)$$

Обозначим через $W_p^{-k}(\Omega)$, $k=1,2,\ldots$, пространство обобщенных функций в Ω, допускающих представление

$$f=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\mathcal{D}^\alpha f_\alpha, \quad \text{где } f_\alpha\in L_p(\Omega).$$

Пусть норма в $W_p^{-k}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|f;\Omega\|_{p,-k} = \inf\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|f_\alpha;\Omega\|_p,$$

где infimum берется по всем наборам функций f_α . Известно (см.,например, [3 , теорема 3.8]), что $W_p^{-k}(\Omega)$ является сопряженным с $\overset{\circ}{W}{}^k_{p'}(\Omega)$.

Решением задачи Дирихле из пространства $W^\ell_p(\Omega)$ назовем функцию

$u \in W_p^{\ell}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\mathcal{P}u = f, \quad u - g \in W_p^{\ell}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^{h}(\Omega), \tag{5.4}$$

где f и g - заданные функции из пространств $W_p^{\ell-2h}(\Omega)$ и $W_p^{\ell}(\Omega)$ соответственно.

Повторяя доказательство теоремы 3.1 из [1] и используя при этом лемму 5.1 вместо леммы 2.1, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.1. *Если* $p(\ell-h) \leq n$, $1<p<\infty$, *и область* Ω *удовлетворяет условию* $N_p^{\ell-h+1/p'}$ *, то для любой функции* $u \in (W_p^{\ell} \cap \overset{\circ}{W}{}_p^{h})(\Omega)$ *имеет место оценка*

$$\| u; \Omega \|_{p,\ell} \leq c\left(\| \mathcal{P}u; \Omega \|_{p,\ell-2h} + \| u; \Omega \|_1\right) \tag{5.5}$$

и оператор

$$\mathcal{P}: (W_p^{\ell} \cap \overset{\circ}{W}{}_p^{h})(\Omega) \longrightarrow W_p^{\ell-2h}(\Omega) \tag{5.6}$$

нётеров.

Следуя доказательству теоремы 3.2 из [1] и ссылаясь в нем на оценку (5.2)вместо (2.6), получаем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Если* $p(\ell-h)>n$, $1<p<\infty$, *и* $\Omega \in W_p^{\ell-h+1/p'}$ *, то справедливы утверждения теоремы 5.1.*

Сформулируем еще два следствия оценки (5.5), аналогичные следствиям 3.1 и 3.2 из [1].

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия любой из теорем 5.1 или 5.2. Если ядро оператора (5.6) тривиально, то норму* $\| u; \Omega \|_1$ *в (5.5) можно опустить.*

Следствие 5.2. *Пусть выполнены условия любой из теорем 5.1 или 5.2. Пусть еще* $\mathcal{U}$ *и* V *- открытые подмножества* R^n, $\overline{\mathcal{U}} \subset V$ *и* $u \in (W_p^{\ell} \cap \overset{\circ}{W}{}_p^{h})(\Omega)$ *. Тогда справедлива оценка*

$$\| u; \mathcal{U} \cap \Omega \|_{p,\ell} \leq c\left(\| \mathcal{P}u; V \cap \Omega \|_{p,\ell-2h} + \| u; V \cap \Omega \|_1\right).$$

2°. Разрешимость задачи Дирихле. Пусть для всех $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ имеет место неравенство Гординга

$$\operatorname{Re}(\mathcal{P}u, u) \geq c \| u; \Omega \|^2_{2,h} . \tag{5.7}$$

Тогда, как известно, уравнение $\mathcal{P}u = f$, где $f \in W_2^{-h}(\Omega)$ однозначно разрешимо в $\overset{\circ}{W}{}_2^h(\Omega)$.

Теорема 5.3. *Пусть* Ω *удовлетворяет условию* $N_p^{\ell-h+1/p'}$ *при* $p(\ell-h) \leq n$ *и принадлежит классу* $W_p^{\ell-h+1/p'}$ *при* $p(\ell-h) > n$.

1) *Если* $f \in W_p^{\ell-2h}(\Omega) \cap W_2^{-h}(\Omega)$, $g \in W_p^{\ell}(\Omega) \cap W_2^{h}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, *и* u - *функция из* $W_2^h(\Omega)$ *такая, что* $\mathcal{P}u = f$, $u - g \in \overset{\circ}{W}{}_2^h(\Omega)$, *то* $u \in W_p^{\ell}(\Omega)$ *и* $u - g \in \overset{\circ}{W}{}_p^h(\Omega)$.

2) *Задача* (5.4) *имеет одно и только одно решение* $u \in W_p^{\ell}(\Omega)$.

Доказательство. Достаточно предположить, что $g = 0$.

1) Пусть сначала $p(\ell-h) \leq n$. Положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon + \Phi(x, \varepsilon)$, где Φ - продолжение функции φ, определенное равенством $\Phi = T\varphi$ (см. [1, п.2 §2]). Введем область $G_\varepsilon = \{z = (x, y) : x \in R^{n-1}, y > \varphi_\varepsilon(x)\}$. Так как $1 + \partial\Phi/\partial\eta > 0$, то $\{G_\varepsilon\}$ - монотонное семейство областей; $\bar{G}_\varepsilon \subset G$, $G_\varepsilon \to G$ при $\varepsilon \to +0$. В силу неравенства (2.3) (см. [1]) и теорем 2.1 и 2.3 из [4], имеет место оценка

$$\| \nabla \varphi_\varepsilon ; R^{n-1} \|_{\ell-h+1/p' \to \ell+h+1/p'} \leq c \| \nabla \varphi ; R^{n-1} \|_{\ell-h+1/p' \to \ell-h+1/p'} \tag{5.8}$$

с постоянной c, не зависящей от ε.

Пусть $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (\bar{U} \setminus G_\varepsilon)$ и u_ε - решение уравнения $\mathcal{P}u = f$ в Ω_ε, принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^h(\Omega_\varepsilon)$. Как известно [5], $u_\varepsilon \to u$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^h(\Omega)$. Так как $\varphi_\varepsilon \in C^{\infty}(R^{n-1})$, то по известной теореме о гладкости обобщенных решений эллиптических краевых задач вблизи гладкого участка границы $u_\varepsilon \in W_p^{\ell}(U_1 \cap \Omega_\varepsilon)$, где U_1 - открытое множество, расположенное в U вместе со своим замыканием. Отсюда и из следствия 5.2 получаем оценку

$$\|u_\varepsilon; \mathcal{U}_2 \cap \Omega_\varepsilon\|_{p,\ell} \leq c\left(\|f; \mathcal{U}_1 \cap \Omega_\varepsilon\|_{p,\ell-2h} + \|u_\varepsilon; \mathcal{U}_1 \cap \Omega_\varepsilon\|_1\right),$$

где $\mathcal{U}_2$ - открытое множество, $\overline{\mathcal{U}}_2 \subset \mathcal{U}_1$ и постоянная c не зависит от ε. Поэтому левая часть ограничена равномерно относительно ε.

Зафиксируем область ω такую, что $\overline{\omega} \subset \Omega$. Из только что сказанного вытекает, что верхний предел $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to+0}} \|u_\varepsilon; \omega\|_{p,\ell}$ не превосходит постоянной, не зависящей от ω. Выделим из семейства $\{u_\varepsilon\}$ последовательность, слабо сходящуюся в $W_p^\ell(\omega)$. Так как эта последовательность сходится в $W_2^h(\omega)$, то ее слабый предел в $W_p^\ell(\omega)$ совпадает с u. Следовательно, $u \in W_p^\ell(\omega)$, и норма u в $W_p^\ell(\omega)$ ограничена равномерно относительно ω. Итак, $u \in W_p^\ell(\Omega)$. Совпадение пространств $W_p^h(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^h(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^h(\Omega)$ для области Ω из $C^{0,1}$ известно.

В случае $p(\ell-1)>n$ доказательство проводится аналогично, только вместо оценки (5.8) следует использовать оценку

$$\|\varphi_\varepsilon; R^{n-1}\|_{p,\ell-h+1/p'} \leq c\|\varphi; R^{n-1}\|_{p,\ell-h+1/p'}.$$

2) При $p>2$ утверждение следует из однозначной разрешимости задачи в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^h(\Omega)$ и первой части теоремы.

Рассмотрим случай $p<2$. Обозначим через $\mathcal{P}^t$ оператор, формально сопряженный с $\mathcal{P}$. Коэффициенты $\mathcal{P}^t$ принадлежат пространству $C^{\ell-2h}(\overline{\Omega})$ и для него, так же как и для $\mathcal{P}$, имеет место неравенство Гординга (5.3). Так как область Ω удовлетворяет условию $N_{p'}^{1/p}$ (константы Липшица функций φ, локально задающих границу, малы), то задача $\mathcal{P}^t v = F \in W_{p'}^{-h}(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{W}{}_{p'}^h(\Omega)$, однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_{p'}^h(\Omega)$. Пусть u - решение однородной задачи (5.4) и $\{v_m\}_{m\geq 1}$ - последовательность функций из $C_0^\infty(\Omega)$, сходящаяся к v в $\overset{\circ}{W}{}_{p'}^h(\Omega)$. Тогда

$$0 = \lim \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq h} (a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta v_m) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq h} (a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta v) = (u,F),$$

что доказывает единственность решения задачи (5.4).

пусть $f_m \in C^{\ell}(\overline{\Omega})$ $(m=1,2,\dots)$, $f_m \to f$ в $W_p^{\ell-2h}(\Omega)$.

Обозначим через u_m функцию из $\overset{\circ}{W}{}_2^h(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению $\mathcal{P}u_m = f_m$. Согласно первой части теоремы, $u_m \in W_p^{\ell}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^h(\Omega)$. В силу следствия 5.1,

$$\| u_m - u_k ; \Omega \|_{p,\ell} \leq c \| f_m - f_k ; \Omega \|_{p,\ell-2h} .$$

Поэтому последовательность $\{u_m\}$ сходится в $W_p^{\ell}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^h(\Omega)$, и ее предел удовлетворяет уравнению $\mathcal{P}u = f$. Теорема доказана.

3°. Задача Дирихле в терминах следов. Первая краевая задача (5.4) не является частным случаем общей краевой задачи из §3 (см. [1]). В этом разделе изучается задача Дирихле в другой постановке, аналогичной рассмотренной в §3.

Пусть $\mathcal{P}$ - эллиптический оператор из 1° §5 и Ω - область класса $C^{0,1}$.

Обозначим через $\{\mathcal{U}\}$ достаточно мелкое конечное открытое покрытие множества $\overline{\Omega}$ и $\{\zeta_{\mathcal{U}}\}$ - подчиненное этому покрытию разбиение единицы. Пусть еще $P_{j\mathcal{U}} = \partial^{j-1}/\partial y^{j-1}$ $(j=1,\dots,h)$, если $\mathcal{U} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ и $P_{j\mathcal{U}} = 0$, если $\mathcal{U} \cap \partial\Omega = \emptyset$. Краевые условия задачи Дирихле будем задавать с помощью операторов $\mathcal{P}_j = \sum_{\mathcal{U}} \zeta_{\mathcal{U}} P_{j\mathcal{U}}$.

Новая постановка задачи Дирихле заключается в следующем. Требуется найти такую функцию $u \in W_p^{\ell}(\Omega)$, что

$$\mathcal{P}u = f \quad \text{в } \Omega, \qquad tr\,\mathcal{P}_j u = f_j \quad \text{на } \partial\Omega, \quad j=1,\dots,h, \tag{5.9}$$

где f и f_j - заданные функции из пространств $W_p^{\ell-2h}(\Omega)$ и $W_p^{\ell-j+1/p'}(\partial\Omega)$ соответственно.

Очевидно, решение задачи (5.4) является решением задачи (5.9) при $f_j = tr\,\mathcal{P}_j g$. Следующая лемма показывает, что при условии $\Omega \in M_p^{\ell-1/p}$ верно и обратное утверждение.

Лемма 5.3. *Пусть* $G = \{z : y > \varphi(x)\}$ *- область класса* $M_p^{\ell-1/p}$ *и* $f_1,\dots,f_h$ *- произвольные функции из пространств* $W_p^{\ell-1/p}(\partial G), \dots$

$\ldots, W_p^{\ell-h+1/p'}(\partial G)$. *Тогда существует функция* $g \in W_p^{\ell}(G)$ *такая, что* $tr(\partial^{j-1} g/\partial y^{j-1}) = f_j$.

Доказательство. Будем использовать обозначения $\Phi, \lambda, \mathscr{X}$, введенные в §2 (см. [1]). Имеем

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-1} g\right]\circ\lambda = \left[\left(K+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}\right]^{j-1}(g\circ\lambda).$$

Так как $\nabla\Phi \in MW_p^{\ell}(R_+^n)$, то

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-1} g\right]\circ\lambda = \sum_{\nu=1}^{j} a_{\nu j}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{\nu-1}(g\circ\lambda)\ , \quad j=1,\ldots,h, \tag{5.10}$$

где $a_{\nu j} \in M(W_p^{\ell-\nu+1}(R_+^n)),\ a_{jj} = (K+\partial\Phi/\partial\eta)^{-1}$. Замечая, что (5.10) - треугольная алгебраическая система относительно $(\partial/\partial\eta)^{\nu-1}(u\circ\lambda)$, приходим к равенствам

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\nu-1}(g\circ\lambda) = \sum_{\nu=1}^{j} b_{j\nu}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{j-1} g\right]\circ\lambda\ , \quad \nu=1,\ldots,h,$$

где $b_{j\nu} \in MW_p^{\ell-j+1}(R_+^n)$. Поскольку $tr\, b_{j\nu} \in MW_p^{\ell-j+1/p'}(R^{n-1})$, то $(tr\, b_{j\nu})f_j\circ\lambda \in W_p^{\ell-\nu+1/p'}(R^{n-1})$ и существует такая функция $H \in W_p^{\ell}(R_+^n)$, что

$$tr\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{\nu-1} H = \sum_{\nu=1}^{j}(tr\, b_{j\nu})f_j\circ\lambda\ .$$

Остается положить $g = H\circ\lambda$. Лемма доказана.

Так как для области класса $M_p^{\ell-1/p}$ обе рассмотренные постановки (5.4) и(5.9) задачи Дирихле эквивалентны, то из теоремы 5.3 получается следующее утверждение.

Теорема 5.4. *Пусть выполнено одно из требований:* α) $h=1,\ p(\ell-1)<n$; *область* Ω *удовлетворяет условию* $N_p^{\ell-1/p}$; β) $h=1,\ p(\ell-1)>n;\ \Omega\in W_p^{\ell-1/p}$; γ) $h>1$, $\Omega \in M_p^{\ell-1/p}$ *и поверхность* $\partial\Omega$ *локально задается уравнениями вида* $y=\varphi(x)$, *где* φ *- функция с малой константой Липшица(при*

$p(\ell-1)>n$ *это равносильно принадлежности* Ω *классу* $W_p^{\ell-1/p}$).

Тогда оператор

$$\{\mathcal{P};\ \mathcal{P}_j\} : W_p^{\ell}(\Omega) \longrightarrow W_p^{\ell-2h}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{h} W_p^{\ell-j+1/p'}(\partial\Omega)$$

осуществляет изоморфизм.

Доказательство. При $h=1$ утверждение следует из теоремы 5.3. Пусть $h>1$. Согласно [4], справедливо неравенство

$$\|\nabla\varphi; R^{n-1}\|_{MW_p^{\ell-h-1/p}} \leq c\|\nabla\varphi; R^{n-1}\|^{\alpha}_{MW_p^{\ell-1-1/p}} \|\nabla\varphi; R^{n-1}\|^{1-\alpha}_{L_\infty},$$

где $\alpha = \dfrac{p(\ell-h)-1}{p(\ell-1)-1}$. Поэтому из γ) следует, что область Ω удовлетворяет условию $N_p^{\ell-h+1/p'}$ при $p(\ell-h)\leq n$ и принадлежит классу $W_p^{\ell-h+1/p'}$ при $p(\ell-h)>n$. Остается сослаться на теорему 5.3.

Итак, усилив постановку задачи Дирихле, мы получили ее разрешимость в $W_p^{\ell}(\Omega)$ при более жестких требованиях к области (ср. теоремы 5.3 и 5.4). Исключение составляет случай операторов $\mathcal{P}$ второго порядка $(h=1)$, когда классы совпадают.

В следующем параграфе обсуждается необходимость условий теоремы 5.4.

§6. О необходимости требований к области

Приведем пример, показывающий, что при $p(\ell-1)\leq n$ и $h=1$ условие $N_p^{\ell-1/p}$ в п. α) теоремы 5.4 нельзя заменить требованием принадлежности области классу $M_p^{\ell-1/p} \cap C^{\ell-1}$.

Пример 6.1. Рассмотрим область Ω, граница которой представляет собой бесконечно дифференцируемую поверхность всюду вне точки O. Пусть в окрестности этой точки область задана неравенством $y>-C\varphi(x)$, где C - положительная постоянная и

$$\varphi(x) = \eta(x,0)|x_1| / \log(1/|x_1|).$$

Здесь и далее в этом примере через η обозначена функция из $C_0^\infty(B_{1/2})$, равная единице на шаре $B_{1/4}$. Из 4° статьи [6] следует, что краевая задача $-\Delta u=f$ в Ω, $tr\, u=0$, разрешима в пространстве $W_2^2(\Omega)$ в том и только том случае, если $C < \pi/4$.

Наконец, покажем, что $\nabla\varphi \in MW_2^{1/2}(R^{n-1})$. Для этого достаточно проверить, что градиент функции Ψ, определенной равенством

$$\Psi(z) = \eta(z)r/\log r, \text{ где } r = (x_1^2 + y^2)^{1/2},$$

принадлежит пространству $MW_2^1(R^n)$ (см. теорему 2.1 из [4]). Ясно, что $\nabla\Psi \in L_\infty(R^n)$, и остается только доказать, что $\nabla_2\Psi \in M(W_2^1(R^n) \longrightarrow L_2(R^n))$. Действительно, для всех $u \in W_2^1(R^n)$ имеет место

$$\| u\nabla_2\Psi; R^n \|_2^2 \le c \int_{B_{1/2}} \left| \frac{u}{r\log r} \right|^2 dz \le c \| u; B_1 \|_{2,1}^2 .$$

Итак, $\Omega \in M_2^{3/2}$. Принадлежность поверхности Ω классу C^1 очевидна.

Сформулируем теорему о неявной функции, доказанную в [7].

Теорема 6.1. *Пусть* G *- специальная липшицева область* $\{(x,y): x \in R^{n-1}, y > \varphi(x)\}$, ω *- $(n-1)$-мерная область и* U *- цилиндр* $\omega \times R^1$. *Пусть еще* u *- функция в* $G \cap U$, *удовлетворяющая условиям:*

(i) $\operatorname{grad} u \in MW_p^{\ell-1}(U \cap \bar{G}, loc)$, *где* ℓ *- целое число,* $\ell \ge 0$;

(ii) $tr\, u = 0$ *на* $U \cap \partial G$;

(iii) *функция* $tr(\partial u / \partial y)$ *отделена от нуля на любом компактном подмножестве множества* $U \cap \partial G$.

Тогда $\nabla\varphi \in MW_p^{\ell-1-1/p}(\omega, loc)$.

Следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 6.1, показывает, что в случае $p(\ell-1) > n$ условие $\Omega \in W_p^{\ell-1/p}$ является необходимым для разрешимости в $W_p^\ell(\Omega)$ задачи Дирихле (5.9) при $ord\, \mathcal{P} > 2$.

Теорема 6.2. *Пусть* Ω *- ограниченная область класса* $C^{0,1}$ *и существует решение* $u \in W_p^\ell(\Omega)$ $(p(\ell-1)>n$, ℓ *- целое число,* $\ell \ge 2h$, $1<p<\infty$ *и* $h>1$) *задачи*

$$\mathcal{P}u = 0 \quad \Omega, \; tr u = 0, \; tr\mathcal{P}_2 u = 1, \; tr\mathcal{P}_j u = 0, \; j = 3, \dots, h. \tag{6.1}$$

Тогда область Ω принадлежит классу $W_p^{\ell-1/p}$.

При дополнительном условии $\partial\Omega \in C^{\ell-2,1}$ можно доказать необходимость принадлежности области Ω классу $W_p^{\ell-1/p}$ и в случае $p(\ell-1)\leq n$, а именно: справедлива

Теорема 6.3. *Пусть $\partial\Omega$ - поверхность класса $C^{\ell-2,1}$ и существует решение $u\in W_p^{\ell}(\Omega)$ ($p(\ell-1)\leq n$, ℓ - целое число, $\ell\geq 2h$, $1<p<\infty$ и $h>1$) задачи (6.1). Тогда область Ω принадлежит классу $W_p^{\ell-1/p}$.*

Доказательство. Будем использовать те же обозначения, что и в формулировке теоремы 6.1. Так как $grad_x u,\ u_y\in W_p^{\ell-1}(U\cap\bar G,\ loc)$ и $\varphi\in C^{\ell-2,1}(R^{n-1})$, то $grad_x u\circ\lambda,\ u\circ\lambda\in W_p^{\ell-1}(\varkappa(U\cap\bar G),\ loc)$. Следовательно, $tr(grad_x u\circ\lambda),\ tr(u_y\circ\lambda)\in W_p^{\ell-1-1/p}(\omega.\ loc)$.

Заметим теперь, что $\partial\Omega$ - поверхность класса C^h, и поэтому в силу известной коэрцитивной оценки решений эллиптических краевых задач в вариационной форме (см. [2]), $u\in W_q^h(\Omega)$ при любом $q<\infty$. Отсюда, в частности, следует, что $grad\, u\in C(\bar\Omega)$.

Как известно, пространство $(W_p^{\ell-1-1/p}\cap L_\infty)(\omega,\ loc)$ является кольцом. Поэтому вектор-функция $grad\,\varphi=tr(grad_x u\circ\lambda)/tr(u_y\circ\lambda)$ принадлежит пространству $W_p^{\ell-1-1/p}(\omega,\ loc)$. Теорема доказана.

Остановимся в той же связи на случае оператора $\mathcal{P}$ второго порядка.

Теорема 6.4. *Пусть $h=1$ и $P(1)\leq 0$. Пусть еще Ω -область с границей класса C^1, причем вектор нормали к $\partial\Omega$ удовлетворяет условию Дини. Если для некоторой неположительной функции f из $C_0^\infty(\Omega)$ существует решение $u\in W_p^{\ell}(\Omega)$ (ℓ - целое число, $\ell\geq 2$, $1<p<\infty$) задачи*

$$Pu=f \quad \text{в } \Omega,\quad tr\,u=0, \tag{6.2}$$

то область Ω принадлежит классу $W_p^{\ell-1/p}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что производная в направлении внутренней нормали к $\partial\Omega$ положительна, и провести доказательство предыдущей теоремы.

§7. Об областях, удовлетворяющих условию $N_p^{\ell-1/p}$

Пусть, как и в § 5,6, Ω - ограниченная область класса $C^{0,1}$. Обозначим через O произвольную точку границы $\partial\Omega$ и через U- такую окрестность этой точки, что $\Omega \cap U = G \cap U$, где $G=\{(x,y):\ x \in R^{n-1}$, $y > \varphi(x)\}$.

По теореме 1.1 из [4], норма вектор-функции $\nabla\varphi$ в пространстве $MW_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1})$ эквивалента норме

$$\sup_{e \subset R^{n-1}} \frac{\| D_{\ell-1/p}\varphi; e\|_p}{[cap(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))]^{1/p}} + \|\nabla\varphi; R^{n-1}\|_\infty . \tag{7.1}$$

(Здесь можно ограничиться только компактами e_4 , диаметры которых не превосходят единицы, - см. следствие 1.3 [4].) Поэтому условие $N_p^{\ell-1/p}$ означает, что выражение (7.1) достаточно мало.

Следующее утверждение, доказательство которого вынесено в приложение, дает локальную формулировку условия $N_p^{\ell-1/p}$ в терминах емкости.

Теорема 7.1. *Пусть* $p(\ell-1) \leq n$. *Условие* $N_p^{\ell-1/p}$ *эквивалентно требованию: для каждой точки* $O \in \partial\Omega$ *найдутся окрестность* U *и специальная липшицева область* $G = \{z = (x,y) \ :\ x \in R^{n-1},\ y > \varphi(x)\}$ *такие, что* $U \cap \Omega = U \cap G$ *и*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sup_{e \subset B_\varepsilon} \frac{\| D_{\ell-1/p}(\varphi; B_\varepsilon); e\|_p}{[cap(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1})]^{1/p}} + \|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|_\infty \right) \leq c\delta. \tag{7.2}$$

Здесь B_ε *-* $(n-1)$ *-мерный шар с центром в точке* O *и радиусом* ε ;

C *- постоянная, зависящая только от* ℓ, p, n ; δ *- постоянная из условия* $N_p^{\ell-1/p}$ *и*

$$D_{j-1/p}(\varphi; B_\varepsilon)(x) = \left(\int_{B_\varepsilon} |\nabla_{j-1}\varphi(x) - \nabla_{j-1}\varphi(y)|^p |x-y|^{-n+2-p} dy \right)^{1/p}.$$

Из теоремы 7.1 и свойств емкости (v),(vi) из § 1 (см. [1]) непосредственно получаем

Следствие 7.1. 1) *Если* $n > p(\ell-1)$ *и*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{e\subset B_\varepsilon}\frac{\|D_{\ell-1/p}(\varphi;B_\varepsilon);e\|_p}{(\operatorname{mes}_{n-1}e)^{[n-p(\ell-1)]/(n-1)p}}+\|\nabla\varphi;B_\varepsilon\|_\infty\right)<c\delta,$$

то выполнено условие $N_p^{\ell-1/p}$.

2) Если $n=p(\ell-1)$ *и*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{e\subset B_\varepsilon}\|D_{\ell-1/p}(\varphi;B_\varepsilon);e\|_p\,|\log(\operatorname{mes}_{n-1}e)|^{(1-p)/p}+\|\nabla\varphi;B_\varepsilon\|_\infty\right)<c\delta,$$

то выполнено условие $N_p^{\ell-1/p}$.

Из этого утверждения можно получить другое достаточное условие, формулируемое в терминах пространства $B^m_{q,p}$ (см. далее следствие 7.2).

Будем говорить, что ограниченная область $\Omega\in C^{0,1}$ принадлежит классу $B^{\ell-1/p}_{q,p}$, $\ell=1,2,\ldots$, если для каждой точки границы $\partial\Omega$ найдется окрестность, в которой $\partial\Omega$ допускает задание (в декартовой системе координат) с помощью функции φ , удовлетворяющей условию

$$\int_{R^{n-1}}\left(\int_{R^{n-1}}|\nabla_{\ell-1}\varphi(x+h)-\nabla_{\ell-1}\varphi(x)|^q dx\right)^{p/q}|h|^{2-h-p}dh<\infty.$$

Следствие 7.2. *Пусть* $p(\ell-1)\le n$ *и* Ω *- ограниченная липшицева область из класса* $B^{\ell-1/p}_{q,p}$ *, где* q *- любое число интервала* $[p(n-1)/(p(\ell-1)-1),\infty]$ *при* $p(\ell-1)<n$ *или из интервала* $(p,\infty]$ *при* $p(\ell-1)=n$ *.*

Пусть еще граница области Ω *может быть локально задана в декартовой системе координат уравнением* $y=\varphi(x)$ *, где* φ *- функция с константой Липшица, не превосходящей* $c\delta$ *.*

Тогда выполнено условие $N_p^{\ell-1/p}$ *.*

Доказательство. Имеем

$$\|D_{\ell-1/p}(\varphi;B_\varepsilon);e\|_p^p\le\int_{B_\varepsilon}|h|^{-n+2-p}dh\int_e|\nabla_{\ell-1}\varphi(x+h)-\nabla_{\ell-1}\varphi(x)|^p dx\le$$

$$\leqslant (mes_{n-1} e)^{1-p/q} \int_{B_\varepsilon} |h|^{-n+2-p} dh \left(\int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1} \varphi(x+h) - \nabla_{\ell-1} \varphi(x)|^q dx \right)^{p/q}.$$

Остается воспользоваться первой частью следствия 7.1.

Из второй части следствия 7.1 нетрудно получить утверждение, уточняющее следствие 7.2 в случае $p(\ell-1) = n$, в котором роль пространства L_q играет пространство Орлича $L_{t^p(\log_+ t)^{p-1}}$. На этом останавливаться мы не будем.

Полагая $q = \infty$ в следствии 7.2, получаем простой признак выполнения условия $N_p^{\ell - 1/p}$ в терминах модуля непрерывности $\omega(t)$ градиента функции φ порядка $\ell - 1$:

$$\int_0 \left(\frac{\omega(t)}{t} \right)^p dt < \infty. \tag{7.3}$$

Так как $B_{\infty,p}^{\ell-1/p} \subset W_p^{\ell-1/p}$, то из (7.3) следует, что $\Omega \in W_p^{\ell-1/p}$.

Используя идею, примененную в аналогичной ситуации в работе [8], покажем, что неравенство (7.3) является в некотором смысле точным достаточным условием разрешимости задачи Дирихле (6.1) и(6.2) в $W_p^\ell(\Omega)$.

Пусть ω - непрерывная возрастающая функция на отрезке $[0.1]$, удовлетворяющая неравенствам

$$\delta \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt + \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt \leqslant c\omega(\delta), \quad 1 > \omega(\delta) \geqslant c\delta. \tag{7.4}$$

По функции ω, дополнительно удовлетворяющей условию

$$\int_0^1 \left(\frac{\omega(t)}{t} \right)^p dt = \infty,$$

построим такую функцию φ на R^{n-1}, что

1) модуль непрерывности любой производной порядка $\ell-1$ функции φ не превосходит $c\omega$, где $c = const$;

2) $supp\, \varphi \subset Q_{2\pi}$, где $Q_d = \{ x \in R^{n-1} : |x_i| < d \}$;

3) $\varphi \in W_p^{\ell-1/p}(R^{n-1})$.

Допустим, что функция φ определена. Обозначим через Ω ограниченную область в R^n такую, что

$$\Omega \cap \{z : x \in Q_{3\pi}, |y| < 1\} = \{z : x \in Q_{3\pi}, \varphi(x) < y < 1\}.$$

Предположим еще, что $\partial\Omega$ является поверхностью класса C^∞ вне множества $\{z : x \in Q_{2\pi},\ y = \varphi(x)\}$. Для области Ω, в силу теорем 6.4, 6.5, задачи (6.1) и (6.2) не имеют решения в пространстве $W_p^\ell(\Omega)$.

Перейдем к построению функции φ. Положим

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n-1} \eta(x_i) \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{-(\ell-1)\kappa}\omega(e^{-\kappa})\sin(e^{\kappa}x_1),$$

где $\eta \in C_0^\infty(-2\pi, 2\pi)$, $\eta = 1$, на $(-\pi, \pi)$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

При достаточно малом $|h|$ имеем

$$|\nabla_{\ell-1}\varphi(x+h) - \nabla_{\ell-1}\varphi(x)| \leqslant c\Big(|h| \sum_{\kappa=1}^{\infty} \omega(e^{-\kappa}) +$$

$$+ |h| \sum_{\kappa \leqslant \log|h|^{-1}} \omega(e^{-\kappa})e^{\kappa} + \sum_{\kappa > \log|h|^{-1}} \omega(e^{-\kappa}),$$

что вместе с (7.4) дает оценку

$$|\nabla_{\ell-1}\varphi(x+h) - \nabla_{\ell-1}\varphi(x)| \leqslant c\,\omega(|h|).$$

Далее,

$$\|\varphi; R^{n-1}\|_{p,\ell-1/p}^p \geqslant c \int_{R^1} \dots \int_{R^1} dx_2 \dots dx_{n-1} \times$$

$$\times \int_{R^1} \int_{R^1} \left| \frac{\partial^{\ell-1}\varphi(x_1+h, x_2, \dots, x_{n-1})}{\partial x_1^{\ell-1}} - \frac{\partial^{\ell-1}\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial x_1^{\ell-1}} \right|^p \frac{dh}{|h|^p} dx_1. \tag{7.5}$$

Положим

$$f(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\ell-1)k} \omega(e^{-k}) e^{ie^k x_1}.$$

В силу (7.5), имеет место

$$\|\varphi; R^{n-1}\|^p_{p,\ell-1/p} \geq c\|Im f^{(\ell-1)}; (-\pi,\pi)\|^p_{p,1-1/p} \geq c\|f^{(\ell-1)}; (-\pi,\pi)\|^p_{p,1-1/p}.$$

Поскольку правая часть в силу теоремы Пэли-Литтлвуда (см.[9]) не меньше чем

$$c\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\omega(e^{-k}))^2 \sin^2\left(\frac{e^k h}{2}\right)\right)^{p/2} \frac{dh}{|h|^p} \geq$$

$$\geq c\int_0^{\pi} \left[\omega(e^{-k(h)}) \sin\left(\frac{e^{k(h)} h}{2}\right)\right]^p \frac{dh}{h^p},$$

где $k(h) = [\log 2h^{-1}]$, то

$$\|\varphi; R^{n-1}\|^p_{p,\ell-1/p} \geq c\int_0^1 (\omega(h)/h)^p dh = \infty.$$

В заключение параграфа сделаем два замечания.

Замечание 7.1. Допустим, что для каждой точки $0 \in \partial\Omega$ найдется такая окрестность U, что множество $U \cap \Omega$ C^ℓ-диффеоморфно области $\{(x,y): y > \varphi(x_1,\ldots,x_{n-s})\}$, $2 \leq s \leq n-1$ ("размерности особенностей границы не меньше $s-1$"). Тогда все сказанное в этом параграфе о свойствах областей, удовлетворяющих условию $N_p^{\ell-1/p}$, остается верным после замены $n-1$ на $n-s$. Это утверждение вытекает из формулировки условия $N_p^{\ell-1/p}$ и следующего легко проверяемого факта: если ψ - функция в R^{n-1}, зависящая только от $n-s$ переменных, то нормы

$$\|\psi; R^{n-1}\|_{k\to k} \quad \text{и} \quad \|\psi; R^{n-s}\|_{k\to k}$$

эквивалентны.

Замечание 7.2. Условие $\Omega \in W_p^{\ell-1/p}$ при $p(\ell-1) > n$ не допускает ребер или конических точек. Однако при $p(\ell-1)<n$ такие особенности условием $N_p^{\ell-1/p}$ не исключаются. Рассмотрим, например, область $G=\{z: y>cr_s\}$, где $r_s^2=x_{s+1}^2+\ldots+x_{n-1}^2$, $c=const$. Из неравенства Харди следует, что если $p(\ell-1)<n-s$, то первые производные функции $R^n\ni z \longrightarrow (y^2+r_s^2)^{1/2}$ принадлежат пространству $MW_p^{\ell-1}(R^n)$. Поэтому первые производные функции $R^{n-1}\ni x\longrightarrow r_s$ являются элементами пространства $MW_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1})$, и малость константы c обеспечивает выполнение условия $N_p^{\ell-1/p}$.

§8. Доказательство теоремы 7.1

1°. Локальная форма условия $N_p^{\ell-1/p}$. Пусть η - четная функция из пространства $C_0^\infty(-1,1)$, равная единице на промежутке $(-1/2, 1/2)$. Положим

$$\eta_\varepsilon(z) = \begin{cases} \eta(|z|/\varepsilon), & \text{если } p(\ell-1)<n; \\ \eta\left(\dfrac{\log\varepsilon}{\log|z|}\right), & \text{если } p(\ell-1)=n, \end{cases}$$

где $\varepsilon\in(0,1/4)$. Ясно, что $supp\,\eta_\varepsilon\subset B_\varepsilon$ и

$$|\nabla_j \eta_\varepsilon(z)| \leq \begin{cases} c\varepsilon^{-j}, & \text{если } p(\ell-1)<n; \\ c|\log|z||^{-1}|z|^{-j}, & \text{если } p(\ell-1)=n. \end{cases} \tag{8.1}$$

Лемма 8.1. *Пусть* $p(\ell-1)=n$. *Справедлива оценка*

$$\int_{B_\varepsilon} \frac{|\nabla_j\eta_\varepsilon(x)-\nabla_j\eta_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}\,dy \leq c_j\,|\log|x||^{-p}\,|x|^{1-p-pj}, \tag{8.2}$$

где $x\in B_\varepsilon$, $j=0,1,\ldots$.

Доказательство. Поскольку

$$|D^{\alpha}\eta_{\varepsilon}(x)| \leq |x|^{-|\alpha|}\sum_{k=1}^{|\alpha|}\sigma_k\left(\frac{\log\varepsilon}{\log|x|}\right)(\log\varepsilon)^{-k},$$

где $\sigma_k \in C_0^{\infty}(-1,1)$, то справедливы оценки

$$|\nabla_j\eta_{\varepsilon}(x)-\nabla_j\eta_{\varepsilon}(y)| \leq \begin{cases} c_j|\log\varepsilon|^{-1}|x-y||x|^{-j-1}, & \text{если } |x|/2 \leq |y| \leq 2|x|; \\ c_j|\log\varepsilon|^{-1}(\max\{|x|,|y|\})^{-j}, & \text{если } j>0 \text{ и } |y|<|x|/2 \text{ или } |x|<|y|/2; \\ c_j|\log\varepsilon|^{-1}\left|\log\frac{|x|}{|y|}\right|, & \text{если } j=0 \text{ и } |y|<|x|/2 \text{ или } |x|<|y|/2. \end{cases}$$

Из этих неравенств непосредственно получаем оценку

$$\int_{B_{\varepsilon}}\frac{|\nabla_j\eta_{\varepsilon}(x)-\nabla_j\eta_{\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dy \leq c_j|\log\varepsilon|^{-p}|x|^{1-p-pj},$$

равносильную (8.2) при $x\in B_{\varepsilon}\setminus B_{\varepsilon^3}$. Пусть $x\in B_{\varepsilon^3}$. Тогда

$$c_j^{-1}\int_{B_{\varepsilon}\setminus B_{\varepsilon^2}}\frac{|\delta_{0,j}-\nabla_j\eta_{\varepsilon}(y)|^p}{|y|^{n-2+p}}dy \leq \int_{B_{\varepsilon}}\frac{|\nabla_j\eta_{\varepsilon}(x)-\nabla_j\eta_{\varepsilon}(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dy \leq c_j\int_{B_{\varepsilon}\setminus B_{\varepsilon^2}}\frac{|\delta_{0j}-\nabla_j\eta_{\varepsilon}(y)|^p}{|y|^{n-2+p}}dy,$$

где $c_j>1$, $\delta_{0,j}=1$ при $j=0$ и $\delta_{0j}=0$ при $j>0$. Следовательно,

$$\int_{B_{\varepsilon}\setminus B_{\varepsilon^2}}\frac{|\delta_{0j}-\nabla_j\eta_{\varepsilon}(y)|^p}{|y|^{n-2+p}}dy \leq c|\log\varepsilon|^{-p}|x|^{1-p-pj}.$$

Полагая в последнем неравенстве $|x|=\varepsilon^3$ и используя возрастные функции $t^{3(p+pj-1)}|\log t|^p$ вблизи точки $t=0$, получаем оценку (8.2).

Целью настоящего пункта является доказательство следующего утверждения, дающего локальную формулировку условия $N_p^{\ell-1/p}$.

Здесь и далее без ограничения общности предполагается, что $\varphi(0)=0$.

Лемма 8.2. *Условие $N_p^{l-1/p}$ можно записать в виде*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \| \nabla(\eta_\varepsilon \varphi); R^{n-1} \|_{l-1-1/p \to l-1-1/p} \le c\delta, \tag{8.3}$$

где c - постоянная, зависящая только от l, p, n, а δ - постоянная из условия $N_p^{l-1/p}$.

Доказательство. Ясно, что условие $N_p^{l-1/p}$ следует из (8.3). Чтобы получить обратное утверждение, достаточно доказать неравенство

$$\| \nabla(\eta_\varepsilon \varphi); R^{n-1} \|_{l-1-1/p \to l-1-1/p} \le c \| \nabla\varphi; R^{n-1} \|_{l-1-1/p \to l-1-1/p}. \tag{8.4}$$

Пусть Φ - продолжение функции φ, определенное в 2^0 §2 (см.[1]). По теореме 2.3 из [4],

$$\| \nabla(\eta_\varepsilon \varphi); R^{n-1} \|_{l-1-1/p \to l-1-1/p} \le c \| \nabla(\eta_\varepsilon \Phi); R^n_+ \|_{l-1 \to l-1}. \tag{8.5}$$

Для любой функции $u \in W_p^{l-1}(R^n_+)$ имеем

$$\| u \nabla(\eta_\varepsilon \Phi); R^n_+ \|_{p, l-1} \le c \Big(\sum_{j=0}^{l-1} \| \Phi |\nabla_{j+1} \eta_\varepsilon| |\nabla_{l-1-j} u|; R^n_+ \|_p +$$
$$+ \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{j} \| |\nabla_{j+1-k} \Phi| |\nabla_k \eta_\varepsilon| |\nabla_{l-1-j} u|; R^n_+ \|_p \Big). \tag{8.6}$$

Пусть сначала $p(l-1) < n$. Первая сумма справа в (8.6) не превосходит

$$c \| \nabla\Phi; R^n_+ \|_\infty \sum_{j=0}^{l-1} \| r^{-j} \nabla_{l-1-j} u; R^n_+ \|_p,$$

а вторая - не больше чем

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{k=0}^{j} \| \nabla_{j+1-k} \Phi ; R_+^n \|_{j-k \to 0} \| r^{-k} \nabla_{\ell-1-j} u ; R_+^n \|_{p, j-k} .$$

Используя предложение 2.1 из [4] и вложение $MW_p^s(R_+^n) \subset MW_p^t(R_+^n), s > t$, заключаем, что

$$\| \nabla_{j+1-k} \Phi ; R_+^n \|_{j-k \to 0} \leq c \| \nabla \Phi ; R_+^n \|_{j-k \to j-k} \leq c \| \nabla \Phi ; R_+^n \|_{\ell-1 \to \ell-1} . \quad (8.7)$$

Воспользуемся неравенством Харди:

$$\| r^{-k} \nabla_{\ell-1-j} u ; R_+^n \|_{p, j-k} \leq c \| u ; R_+^n \|_{p, \ell-1} ,$$

где $p(\ell-1) < n$, $\ell-1 \geq j \geq k$. Получим

$$\| \nabla (\eta_\varepsilon \Phi) ; R_+^n \|_{\ell-1 \to \ell-1} \leq c \| \nabla \Phi ; R_+^n \|_{\ell-1 \to \ell-1} . \quad (8.8)$$

Отсюда, из (2.8) (см. [1]) и (8.5) следует неравенство (8.4) в случае $p(\ell-1) < n$.

Пусть теперь $p(\ell-1) = n$. Первая сумма справа в (8.6) не превосходит

$$c \| \nabla \Phi ; R_+^n \|_\infty \Big(|\log \varepsilon|^{-1} \sum_{j=0}^{\ell-2} \| r^{-j} \nabla_{\ell-1-j} u ; R_+^n \|_p +$$

$$+ \| r^{1-\ell} (\log r)^{-1} \eta_{1/2} u ; R_+^n \|_p \Big),$$

а вторая не больше чем

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{k=0}^{j} \| \nabla_{j+1-k} \Phi ; R_+^n \|_{j-k \to 0} \| r^{-k} (\log r)^{-1} \eta_{1/2} \nabla_{\ell-1-j} u ; R_+^n \|_{p, j-k} .$$

Используя (8.7) и неравенство Харди

$$\| r^{-\kappa}(\log r)^{-1}\eta_{1/2}\nabla_{\ell-1-j}u;R^n_+\|_{p,j-\kappa}\le c\|u;R^n_+\|_{p,\ell-1},$$

получаем неравенство (8.8), которое вместе с (2.8) (см. [1]) и (8.5) дает (8.4) при $p(\ell-1)=n$. Лемма доказана.

2°. Оценка величины S_1. Ясно, что если выражение (7.1) не превосходит $c\delta$, то условие (7.2) выполнено. Следует доказать достаточность этого условия.

В силу теоремы 1.1 и следствия 1.2 работы [4], условие (8.3) означает, что при достаточно малых $\varepsilon>0$ выполняется

$$\sup_{e}\frac{\|D_{\ell-1/p}(\eta_\varepsilon\varphi);e\|_p}{[cap(e,W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))]^{1/p}}+\|\nabla(\eta_\varepsilon\varphi);B_\varepsilon\|_\infty<c\delta. \qquad (8.9)$$

Здесь и далее e - компакт в R^{n-1}, диаметр которого $d(e)$ меньше единицы.

Так как $\varphi(0)=0$, то из (8.1) следует неравенство

$$\|\nabla(\eta_\varepsilon\varphi);B_\varepsilon\|_\infty\le c\|\nabla\varphi;B_\varepsilon\|_\infty. \qquad (8.10)$$

Первое слагаемое в (8.9) не превосходит

$$\sup_{e\subset R^{n-1}}\left(\frac{\|D_{\ell-1/p}(\eta_\varepsilon\varphi);e\setminus B_\varepsilon\|_p}{[cap(e\setminus B_\varepsilon;W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))]^{1/p}}+\frac{\|D_{\ell-1/p}(\eta_\varepsilon\varphi);e\cap B_\varepsilon\|_p}{[cap(e\cap B_\varepsilon;W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))]^{1/p}}\right).$$

(Если одно из множеств $e\setminus B_\varepsilon$ или $e\cap B_\varepsilon$ имеет нулевую емкость, то соответствующее слагаемое равно нулю.) Следовательно, супремум в (8.9) не больше суммы $s_1+s_2+s_3$, где

$$s_1 = \sup_{e \subset R^{n-1} \setminus B_\varepsilon} \frac{\| D_{\ell-1/p}(\eta_\varepsilon \varphi); e \|_p}{[\mathrm{cap}(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))]^{1/p}},$$

$$s_2 = \sup_{e \subset B_\varepsilon} \frac{\left(\int_e dx \int_{R^{n-1} \setminus B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon \varphi)(x) - \nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon \varphi)(y)|^p \, |x-y|^{-n+2-p} dy \right)^{1/p}}{[\mathrm{cap}(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))]^{1/p}},$$

$$s_3 = \sup_{e \subset B_\varepsilon} \frac{\| D_{\ell-1/p}(\eta_\varepsilon \varphi; B_\varepsilon); e \|_p}{[\mathrm{cap}(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))]^{1/p}}.$$

Цель этого пункта - оценка величины s_1.

Лемма 8.3. *Если выполнено условие* (7.2), *то* $s_1 \leqslant c\delta$ *при достаточно малых* ε.

Доказательство. Имеем

$$s_1^p = \sup_{e \subset R^{n-1} \setminus B_\varepsilon} \frac{\int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon \varphi)(y)|^p dy \int_e |x-y|^{2-n-p} dx}{\mathrm{cap}(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))}.$$

Положим $q = (n-1)/(p(\ell-1)-1)$, если $p(\ell-1) < n$, а в случае $p(\ell-1) = n$ обозначим через q любое число из интервала $[1, \infty)$. Так как $y \in \mathrm{supp}\, \eta_\varepsilon \subset B_{\varepsilon/2}$, то

$$\int_e |x-y|^{2-n-p} dx \leqslant (\mathrm{mes}_{n-1} e)^{1-1/q} \left(\int_{R^{n-1} \setminus B_\varepsilon} |x-y|^{(2-n-p)q} dx \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant c\, (\mathrm{mes}_{n-1} e)^{1-1/q}\, \varepsilon^{2-n-p+(n-1)/q}. \tag{8.11}$$

Воспользуемся неравенствами

$$\operatorname{cap}\left(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n+1})\right) \geq \begin{cases} c\,(\operatorname{mes}_{n-1} e)^{1-1/q}, & \text{если } p(\ell-1)<n, \\ c\,(\log(2^n/\operatorname{mes}_{n-1} e))^{1-p}, & \text{если } p(\ell-1)=n. \end{cases} \tag{8.12}$$

Тогда при $p(\ell-1)<n$ выполняется

$$\int_e |x-y|^{2-n-p}\,dx \leq c\varepsilon^{p(\ell-2)+1-n}(\operatorname{mes}_{n-1} e)^{1-1/q}.$$

В случае $p(\ell-1)=n$ имеем

$$(\log(2^n/\operatorname{mes}_{n-1} e))^{p-1}\int_e |x-y|^{2-n-p}dx \leq$$

$$\leq c(\operatorname{mes}_{n-1} e)^{1-1/q}(\log(2^n/\operatorname{mes}_{n-1} e))^{p-1}\varepsilon^{2-n-p+(n-1)/q}. \tag{8.13}$$

Если $\operatorname{mes}_{n-1} e \leq \varepsilon^{n-1}$, то правая часть оценивается величиной $c\varepsilon^{1-p}|\log\varepsilon|^{p-1}$. Если же $\operatorname{mes}_{n-1} e > \varepsilon^{n-1}$, то, полагая в (8.13) $q=1$, снова получаем мажоранту $c\varepsilon^{1-p}|\log\varepsilon|^{p-1}$.

Итак,

$$s_1^p \leq \begin{cases} c\varepsilon^{p(\ell-2)+1-n}\displaystyle\int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon\varphi)|^p dy, & \text{если } p(\ell-1)<n; \\ c\varepsilon^{1-p}|\log\varepsilon|^{p-1}\displaystyle\int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon\varphi)(y)|^p dy, & \text{если } p(\ell-1)=n. \end{cases}$$

Отсюда при $p(\ell-1)<n$ получаем

$$s_1^p \leq c\varepsilon^{p(\ell-2)+1-n}\left(\varepsilon^{(1-\ell)p}\int_{B_\varepsilon}|\varphi|^p dy + \sum_{j=0}^{\ell-2}\varepsilon^{-jp}\int_{B_\varepsilon}|\nabla_{\ell-1-j}\varphi|^p dy\right).$$

Положим

$$\langle v; B_\varepsilon \rangle_{p,\ell-1-1/p} = \| \mathcal{D}_{\ell-1-1/p}(v; B_\varepsilon); B_\varepsilon \|_p .$$

Воспользуемся неравенством

$$\int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-2-j} v|^p dy \leq c \left(\varepsilon^{p(j+1)-1} \langle v; B_\varepsilon \rangle^p_{p,\ell-1-1/p} + \varepsilon^{p(j+2-\ell)} \int_{B_\varepsilon} |v|^p dy \right). \qquad (8.14)$$

Тогда

$$s_1^p \leq c \left(\varepsilon^{-p+1-n} \int_{B_\varepsilon} |\varphi|^p dy + \varepsilon^{1-n} \int_{B_\varepsilon} |\nabla \varphi|^p dy + \varepsilon^{p(\ell-1)-n} \langle \varphi; B_\varepsilon \rangle^p_{p,\ell-1/p} \right) \leq$$

$$\leq c \left(\varepsilon^{p(\ell-1)-n} \langle \varphi; B_\varepsilon \rangle^p_{p,\ell-1/p} + \| \nabla \varphi; B_\varepsilon \|^p_\infty \right),$$

что вместе с (7.2) дает оценку $s_1 \leq c\delta$.

Пусть $p(\ell-1) = n$. При $\ell = 2$ имеет место

$$s_1^p \leq c \varepsilon^{1-p} |\log \varepsilon|^{p-1} \| \nabla \varphi; B_\varepsilon \|^p_\infty \left(\int_{B_\varepsilon} |\eta_\varepsilon|^p dy + \int_{B_\varepsilon} |y|^p |\nabla \eta_\varepsilon|^p dy \right),$$

и так как

$$\int_{B_\varepsilon} |\eta_\varepsilon|^p dy \leq c \int_{B_\varepsilon} |y|^p |\nabla \eta_\varepsilon|^p dy \leq c \varepsilon^{p-1} |\log \varepsilon|^{-p},$$

то

$$s_1^p \leq c |\log \varepsilon|^{-1} \| \nabla \varphi; B_\varepsilon \|^p_\infty .$$

Допустим теперь, что $\ell > 2$, $p(\ell-1) = n$. Имеем

$$s_1^p \leq c\varepsilon^{1-p} |\log\varepsilon|^{p-1} \Big(|\log\varepsilon|^{-p} \int_{B_\varepsilon} |y|^{(1-\ell)p} |\varphi|^p dy +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\ell-2} |\log\varepsilon|^{-p} \int_{B_\varepsilon} |y|^{-jp} |\nabla_{\ell-1-j}\varphi|^p dy + \int_{B_\varepsilon} |\eta_\varepsilon \nabla_{\ell-1}\varphi|^p dy. \qquad (8.15)$$

Первое слагаемое в скобках не превосходит

$$c\,\varepsilon^{p-1} |\log\varepsilon|^{-p} \| \nabla\varphi ; B_\varepsilon \|_\infty^p . \qquad (8.16)$$

Сумму по j в (8.15) оценим с помощью неравенства

$$\int_{B_\varepsilon} |y|^{-jp} |\nabla_{\ell-2-j} v|^p dy \leq c \Big(\int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-2} v|^p dy + \varepsilon^{p(2-\ell)} \int_{B_\varepsilon} |v|^p dy \Big),$$

где $v = \partial\varphi / \partial y_i$. Тогда для этой суммы найдем мажоранту

$$c\varepsilon^{p-1} |\log\varepsilon|^{-p} \Big(\varepsilon^{1-p} \int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1}\varphi|^p dy + \|\nabla\varphi ; B_\varepsilon\|_\infty^p \Big). \qquad (8.17)$$

Применим неравенство (8.14) при $j = 0$ к вектор-функции $v = \nabla\varphi$ Тогда получим, что выражение (8.17) не больше чем

$$c\varepsilon^{p-1} |\log\varepsilon|^{-p} \Big(\langle\varphi ; B_\varepsilon\rangle_{p,\ell-1/p}^p + \|\nabla\varphi ; B_\varepsilon\|_\infty^p \Big). \qquad (8.18)$$

Перейдем к оценке последнего интеграла в (8.15). В силу неравенства

$$\|w ; B_\varepsilon\|_p \leq c\varepsilon^{1-1/p} \langle w ; B_\varepsilon \rangle_{p,1-1/p},$$

справедливого для всех функций w в B_ε , обращающихся в нуль вне шара $B_{(1-c)\varepsilon}$, $c \in (0,1)$, имеем

$$\varepsilon^{1-p} \int_{B_\varepsilon} |\eta_\varepsilon \nabla_{\ell-1}\varphi|^p dy \leq c \langle \nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon\varphi) ; B_\varepsilon \rangle_{p,1-1/p}^p \leq$$

$$\leq c\left(\langle \nabla_{\ell-1}\varphi;\, B_\varepsilon\rangle^p_{p,1-1/p} + \int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1}\varphi(x)|^p dx \int \frac{|\eta_\varepsilon(x)-\eta_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dy\right). \quad (8.19)$$

Согласно лемме 8.1

$$\int \frac{|\eta_\varepsilon(x)-\eta_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dy \leq c\,|\log\varepsilon|^{-p}|x|^{1-p}.$$

Поэтому

$$\langle \nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon\varphi);\, B_\varepsilon\rangle^p_{p,1-1/p} \leq c\left(\langle \nabla_{\ell-1}\varphi;\, B_\varepsilon\rangle^p_{p,1-1/p} + |\log\varepsilon|^{-p}\int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1}\varphi(y)|^p|y|^{1-p}dy\right).$$

Так как $p(\ell-1)=n$, $\ell>2$, то $p<n$, и поэтому имеет место неравенство Харди

$$\int_{B_\varepsilon} |v|^p|y|^{1-p}dy \leq c\left(\langle v;\, B_\varepsilon\rangle^p_{p,1-1/p} + \varepsilon^{1-p}\int_{B_\varepsilon} |v|^p dy\right).$$

Подставляя $\nabla_{\ell-1}\varphi$ вместо v, получаем

$$\langle \nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon\varphi);\, B_\varepsilon\rangle^p_{p,1-1/p} \leq c\left(\langle \varphi;\, B_\varepsilon\rangle^p_{p,\ell-1/p} + \varepsilon^{1-p}|\log\varepsilon|^{-p}\int_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1}\varphi(y)|^p dy\right).$$

Последний интеграл в силу (8.14) не превосходит

$$\varepsilon^{p-1}\left(\langle \varphi;\, B_\varepsilon\rangle^p_{p,\ell-1/p} + \|\nabla\varphi;\, B_\varepsilon\|^p_\infty\right),$$

и, значит,

$$< \nabla_{\ell-1}^{\cdot} (\eta_\varepsilon \varphi) ; B_\varepsilon >_{p,1-1/p}^{p} \leq c \left(< \varphi ; B_\varepsilon >_{p,\ell-1/p}^{p} + |\log \varepsilon|^{-p} \|\nabla\varphi ; B_\varepsilon\|_\infty^{p} \right), \tag{8.20}$$

$$\int_{B_\varepsilon} |\eta_\varepsilon \nabla_{\ell-1} \varphi|^p dy \leq c \varepsilon^{p-1} \left(< \varphi ; B_\varepsilon >_{p,\ell-1/p}^{p} + |\log \varepsilon|^{-p} \|\nabla\varphi ; B_\varepsilon\|_\infty^{p} \right). \tag{8.21}$$

Подставляя оценки (8.16), (8.18) и (8.21) в (8.15), получаем неравенство

$$s_1^p \leq c \left(|\log \varepsilon|^{p-1} < \varphi ; B_\varepsilon >_{p,\ell-1/p}^{p} + \|\nabla\varphi ; B_\varepsilon\|_\infty^{p} \right),$$

которое вместе с (7.2) дает оценку $S_1 \leq C\delta$. Лемма доказана.

3°. Оценка величины S_2 .

Лемма 8.4. *Если выполнено условие* (7.2), *то* $S_2 \leq C\delta$ *при достаточно малых* ε .

Доказательство. Очевидно,

$$S_2^p = \sup_{e \subset B_\varepsilon} \frac{\int_e |\nabla_{\ell-1} (\eta_\varepsilon \varphi)|^p dx \int_{R^{n-1} \setminus B_\varepsilon} |x-y|^{2-n-p} dy}{cap(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))} .$$

Пусть $p(\ell-1) < n$. Обозначим через q число, достаточно близкое к p, $q > p$. Имеем

$$S_2^p \leq C \sup_{e \subset B_\varepsilon} \sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon^{-(j+1)p+1} \frac{\int_e |\nabla_{\ell-1-j} \varphi|^p dx}{cap(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))} <$$

$$\leq c \sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon^{-(j+1)p+1} \sup_{e \subset B_\varepsilon} (mes_{n-1} e)^{1-p/q} \frac{\left(\int_e |\nabla_{\ell-1-j} \varphi|^q dx \right)^{p/q}}{cap(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))} . \tag{8.22}$$

Из неравенства

$$\left(\int_{R^{n-1}} |u|^q d\mu\right)^{p/q} \leq c \sup_{x\in B_\varepsilon,\, \rho\in(0,\varepsilon)} \frac{[\mu(B_\rho(x))]^{p/q}}{\operatorname{cap}(B_\rho;\, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))} \|u;R^{n-1}\|^p_{p,\ell-1-1/p},$$

где μ - мера, сосредоточенная в B_ε (см. [10]), следует оценка

$$\sup_{e\subset B_\varepsilon} \frac{[\mu(e)]^{p/q}}{\operatorname{cap}(e,\, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))} \leq C \sup_{x\in B_\varepsilon,\, \rho\in(0,\varepsilon)} \frac{[\mu(B_\rho(x))]^{p/q}}{\operatorname{cap}(B_\rho;\, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))}. \tag{8.23}$$

Отсюда и из (8.22) получаем, что

$$S_2^p < C\sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon^{-(j+1)p+1+(n-1)(1-p/q)} \sup_{x\in B_\varepsilon,\, \rho\in(0,\varepsilon)} \frac{\left(\int_{B_\rho(x)} |\nabla_{\ell-1-j}\,\varphi|^q dy\right)^{p/q}}{\rho^{n-p(\ell-1)}}.$$

Так как $-(j+1)p+1+(n-1)(1-p/q) \leq (n-1)(1-p/q)+1-p<0$ при q , близком к p , то

$$S_2^p \leq C\sum_{j=0}^{\ell-2} \sup_{x\in B_\varepsilon,\, \rho\in(0,\varepsilon)} \left(\frac{\int_{B_\rho(x)} |\nabla_{\ell-1-j}\,\varphi|^q dy}{\rho^{n-1-q(\ell-j-2)}}\right)^{p/q} + c\|\nabla\varphi;B_\varepsilon\|^p_\infty .$$

Воспользуемся неравенством

$$\rho^{\ell-j-2-(n-1)/q} \left(\int_{B_\rho} |\nabla_{\ell-2-j}\, v|^q dy\right)^{1/q} \leq c\rho^{\ell-1-1/p-(n-1)/p} \langle v;B_\rho\rangle_{p,\ell-1-1/p} +$$

$$+c\left(\rho^{1-n}\int_{B_\rho}|v|^p dy\right)^{1/p}, \quad j=0,\dots,\ell-2, \tag{8.24}$$

которое получается с помощью преобразования подобия из теоремы о непрерывности оператора вложения $W_p^{\ell-1-1/p}(B_1)$ в $W_q^{\ell-2-j}(B_1)$. Тогда

$$S_2^p \leqslant c \sup_{x\in B_\varepsilon,\, \rho\in(0,\varepsilon)} \frac{\langle \nabla\varphi;\, B_\rho(x)\rangle^p_{p,\ell-1-1/p}}{\rho^{n-1-p(\ell-1-1/p)}} + c\|\nabla\varphi;\, B_\varepsilon\|^p_\infty. \qquad (8.25)$$

Пусть теперь $p(\ell-1)=n$. В этом случае в силу неравенства Гёльдера и (8.23)

$$S_2^p \leqslant c\,\varepsilon^{+p} \sup_{e\subset B_\varepsilon} \left(mes_{n-1} e\right)^{1-p/q} \frac{\left(\int_e |\nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon\varphi)|^q dx\right)^{p/q}}{cap(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))} \leqslant$$

$$\leqslant c\,\varepsilon^{1-p+(n-1)(1-p/q)} \sup_{x\in B_\varepsilon,\, \rho\in(0,\varepsilon)} |\log\rho|^{p-1} \left(\int_{B_\rho(x)} |\nabla_{\ell-1}(\eta_\varepsilon\varphi)|^q dy\right)^{p/q}.$$

Отсюда следует, что

$$S_2^p \leqslant c \sup_{x\in B_\varepsilon,\, \rho\in(0,\varepsilon)} \Bigg(\rho^{1-p+(n-1)(1-p/q)} |\log\rho|^{-1} \sum_{j=1}^{\ell-2} \left(\int_{B_\rho(x)} |y|^{-jq} |\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^q dy\right)^{p/q} +$$

$$+\rho^{1-p+(n-1)(1-p/q)} |\log\rho|^{-1} \left(\int_{B_\rho(x)} |y|^{-(\ell-1)q} |\varphi(y)|^q dy\right)^{p/q} +$$

$$+\varepsilon^{1-p+(n-1)(1-p/q)} |\log\rho|^{p-1} \left(\int_{B_\rho(x)} |\eta_\varepsilon \nabla_{\ell-1}\varphi|^q dy\right)^{p/q} \Bigg). \qquad (8.26)$$

Применим следующий вариант неравенства Харди:

$$\left(\int_{B_\rho} |y|^{-jq} |\nabla_{\ell-2-j} v|^q dy\right)^{1/q} \leqslant c\rho^{1-1/p+(n-1)(1/q-1/p)} \langle v;\, B_\rho\rangle_{p,\ell-1-1/p} +$$

$$+c\rho^{2-\ell+(n-1)(1/q-1/p)}\Big(\int_{B_\rho}|v|^p dy\Big)^{1/p}, \quad j=1,\dots,\ell-2,$$

в котором роль v играет $\nabla\varphi$. Тогда первое слагаемое в правой части (8.26) оценивается величиной

$$c\,|\log\rho|^{-1}\Big(<\varphi, B_\rho(x)>^p_{p,\ell-1/p}+\|\nabla\varphi; B_\rho(x)\|^p_\infty\Big)\leq$$

$$\leq c\Big(<\varphi; B_{2\varepsilon}>^p_{p,\ell-1/p}+\|\nabla\varphi; B_{2\varepsilon}\|^p_\infty\Big).$$

Второе слагаемое справа в (8.26), очевидно, не превосходит

$$c\rho^{1-p+(n-1)(1-p/q)}|\log\rho|^{-1}\Big(\int_{B_\rho(x)}|y|^{-(\ell-2)q}dy\Big)^{p/q}\|\nabla\varphi; B_\rho(x)\|^p_\infty\leq$$

$$\leq c\,|\log\rho|^{-1}\|\nabla\varphi; B_\rho(x)\|^p_\infty .$$

Перейдем к оценке третьего слагаемого в правой части (8.26). Пусть число s больше q и достаточно близко к q. В силу неравенства Гёльдера, указанное слагаемое мажорируется величиной

$$\varepsilon^{1-p+(n-1)(1-p/q)}\rho^{(n-1)p(1/q-1/s)}|\log\rho|^{p-1}\Big(\int_{B_\rho(x)}|\eta_\varepsilon\nabla_{\ell-1}\varphi|^s dy\Big)^{p/s}\leq$$

$$\leq\varepsilon^{1-p+(n-1)(1-p/s)}|\log\varepsilon|^{p-1}\Big(\int_{B_\varepsilon}|\eta_\varepsilon\nabla_{\ell-1}\varphi|^s dy\Big)^{p/s}. \qquad (8.27)$$

В силу неравенства

$$\|w; B_\varepsilon\|_s\leq c\varepsilon^{(n-1)(1/s-1/p)+1-1/p}<w; B_\varepsilon>_{p,1-1/p},$$

справедливого для всех функций w в B_ε, обращающихся в нуль вне шара $B_{(1-c)\varepsilon}$, $c\in(0,1)$, правая часть (8.27) не превосходит

$$c\,|\log\varepsilon|^{p-1} < \eta_\varepsilon \nabla_{\ell-1}\varphi\,;\,B_\varepsilon >^p_{p,1-1/p}.$$

Последняя величина в силу неравенства (8.20) не больше чем

$$c\,|\log\varepsilon|^{p-1}\left(<\varphi\,;\,B_\varepsilon>^p_{p,1-1/p} + |\log\varepsilon|^{-p}\,\|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|^p_\infty \right).$$

Объединяя полученные оценки трех слагаемых в (8.26), приходим к неравенству

$$s_2^p \leq c\left(\sup_{x\in B_\varepsilon,\,\rho\in(0,\varepsilon)} |\log\rho|^{p-1} <\varphi; B_\rho(x)>^p_{p,\ell-1/p} + \|\nabla\varphi; B_{2\varepsilon}\|^p_\infty \right).$$

Лемма доказана.

4°. Оценка величины s_3.

Лемма 8.5. *Если выполнено условие (7.2), то* $s_3 \leq c\delta$ *при достаточно малых* ε.

Доказательство. Имеем

$$\|D_{\ell-1/p}(\eta_\varepsilon\varphi\,;\,B_\varepsilon);\,e\|_p \leq c\Bigg(\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=\ell-1,\\ |\alpha|>0}} \|D_{1-1/p}(D^\alpha\eta_\varepsilon D^\beta\varphi; B_\varepsilon); e\|^p_p +$$

$$+ \|D_{\ell-1/p}(\varphi; B_\varepsilon);\, e\|^p_p + \int_e |\nabla_{\ell-1}\varphi(x)|^p dx \int_{B_\varepsilon} \frac{|\eta_\varepsilon(x)-\eta_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}\,dy \Bigg). \tag{8.28}$$

Далее,

$$\| D_{1-1/p}(D^\alpha \eta_\varepsilon D^\beta \varphi ; B_\varepsilon); e \|_p^p \leq$$

$$\leq c \left(\int_e |D^\beta \varphi(x)|^p dx \int_{B_\varepsilon} \frac{|D^\alpha \eta_\varepsilon(x) - D^\alpha \eta_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}} dy + \int_{B_\varepsilon} |D^\alpha \eta_\varepsilon(y)|^p dy \int_e \frac{|D^\beta \varphi(x) - D^\beta \varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}} dx \right). \tag{8.29}$$

Пусть сначала $p(\ell-1)<n$. Используя определение функции η_ε и лемму 8.1, получаем

$$s_3^p \leq c \sup_{e\subset B_\varepsilon} \sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon^{-(j+1)p+1} \frac{\int_e |\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)|^p dx}{\operatorname{cap}(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))} +$$

$$+ c \sup_{e\subset B_\varepsilon} \sum_{j=0}^{\ell-1} \varepsilon^{-jp} \frac{\int_e dx \int_{B_\varepsilon} \frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x) - \nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}} dy}{\operatorname{cap}(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))}. \tag{8.30}$$

Первый из этих супремумов оценивается правой частью неравенства (8.25) (см. начало доказательства леммы 8.4).

Обозначим через q число, достаточно близкое к p, $q>p$. В силу неравенства Гельдера и оценки (8.23), второй супремум в правой части (8.30) не превосходит

$$c \sup_{\xi\in B_\varepsilon,\, \rho\in(0,\varepsilon)} \sum_{j=1}^{\ell-1} \varepsilon^{-jp+n(1-p/q)} \rho^{p(\ell-1)-n} \left[\varepsilon^{(p-q)/p} \int_{B_\rho(\xi)} dx \left(\int_{B_\varepsilon} \frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x) - \nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}} dy \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{p}{q}} +$$

$$+ c \sup_{e\subset B_\varepsilon} \frac{\| D_{\ell-1/p}(\varphi; B_\varepsilon); e \|_p^p}{\operatorname{cap}(e, W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))}. \tag{8.31}$$

Заметим теперь, что при $j=1,\dots,\ell-2$ имеет место

$$\varepsilon^{(p-q)/p}\int\limits_{B_\rho(\xi)}\left(\int\limits_{B_\varepsilon}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dy\right)^{q/p}dx\leq$$

$$\leq\varepsilon^{(p-q)/p}\int\limits_{B_\rho(\xi)}\int\limits_{B_\varepsilon}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^q}{|x-y|^{n-2+q}}dy\left(\int\limits_{B_\varepsilon}\frac{dy}{|x-y|^{n-2}}\right)^{(q-p)/p}dx\leq$$

$$\leq c\left(\int\limits_{B_\rho(\xi)}\int\limits_{B_{2\rho}(\xi)}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^q}{|x-y|^{n-2+q}}dydx+\rho^{1-q}\int\limits_{B_\rho(\xi)}|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)|^q dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{B_\varepsilon}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^q dy}{|y-\xi|^{q-1}}\right)\leq c\left(<\nabla\varphi;B_{2\rho}(\xi)>^q_{q,\ell-1-j-1/q}+\int\limits_{B_\varepsilon}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^q dy}{|y-\xi|^{q-1}}\right). \tag{8.32}$$

Последнее выражение не превосходит

$$c\left(\rho^{(1/q-1/p)n+j}<\nabla\varphi;B_{2\rho}(\xi)>_{p,\ell-1-1/p}+\rho^{nq^{-1}-\ell+1+j}\|\nabla\varphi;B_{2\rho}(\xi)\|_\infty\right)^q.$$

Для слагаемого в (8.31), соответствующего номеру $j=\ell-1$, имеем мажоранту

$$\varepsilon^{-(\ell-1)p+(n-1)(1-p/q)}\rho^{p(\ell-1)-n}\|\nabla\varphi;B_{2\varepsilon}\|^p_\infty\left[\int\limits_{B_\rho(\xi)}dx\left(\int\limits_{B_\varepsilon}\frac{dy}{|x-y|^{n-2}}\right)^{q/p}\right]^{p/q}\leq$$

$$\leq c\,\varepsilon^{1-(\ell-1)p+(n-1)(1-p/q)}\rho^{p(\ell-1)-n+(n-1)p/q}\|\nabla\varphi;B_{2\varepsilon}\|^p_\infty\leq c\|\nabla\varphi;B_{2\varepsilon}\|^p_\infty.$$

Следовательно, сумма по j в (8.31) оценивается величиной

$$c\sum_{j=1}^{\ell-2}\varepsilon^{-jp+n(1-p/q)}\rho^{p(\ell-1)-n+(p-q)n/q+pj}<\varphi;B_{2\rho}(\xi)>^p_{p,\ell-1/p}+$$

$$+c\left(1+\sum_{j=1}^{\ell-2}\varepsilon^{-jp+n(1-p/q)}\rho^{p(\ell-1)-n+np/q+p(1+j-\ell)}\right)\|\nabla\varphi;B_{2\rho}(\xi)\|^p_{\infty},$$

и окончательно второй супремум в (8.30) не превосходит

$$c\sup_{\xi\in B_\varepsilon,\,\rho\in(0,\varepsilon)}\left(\rho^{p(\ell-1)-n}<\varphi;B_{2\rho}(\xi)>^p_{p,\ell-1/p}+\|\nabla\varphi;B_{2\rho}(\xi)\|^p_{\infty}\right)+$$

$$+c\sup_{e\subset B_\varepsilon}\frac{\|D_{\ell-1/p}(\varphi;B_\varepsilon);e\|^p_p}{cap(e,W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1}))}.$$

Принимая во внимание полученную ранее оценку для первого супремума в (8.30), заканчиваем доказательство в случае $p(\ell-1)<n$.

Пусть $p(\ell-1)=n$. Имеем

$$\|D_{\ell-1/p}(\eta_\varepsilon\varphi;B_\varepsilon);e\|^p_p\le\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+c\|D_{\ell-1/p}(\varphi;B_\varepsilon);e\|^p_p,\tag{8.33}$$

где

$$\sigma_1=c\sum_{j=0}^{\ell-2}\int_e|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)|^p dx\int_{B_\varepsilon}\frac{|\nabla_j\eta_\varepsilon(x)-\nabla_j\eta_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dy,$$

$$\sigma_2=c\sum_{j=1}^{\ell-2}\int_{B_\varepsilon}|\nabla_j\eta_\varepsilon(y)|^p dy\int_e\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dx,$$

$$\sigma_3=c\int_e dx\int_{B_\varepsilon}\frac{|\varphi(x)\nabla_{\ell-1}\eta_\varepsilon(x)-\varphi(y)\nabla_{\ell-1}\eta_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dy.$$

По лемме 8.1,

$$\int\limits_{B_\varepsilon} \frac{|\nabla_j \eta_\varepsilon(x) - \nabla_j \eta_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}\, dy \leq c\, |\log|x||^{-p}\, |x|^{1-p(j+1)} .$$

Поэтому

$$\sigma_1 \leq c \sum_{j=0}^{\ell-2} \int\limits_e |\nabla_{\ell-1-j}\, \varphi(x)|^p\, |x|^{1-p(j+1)}\, |\log|x||^{-p} dx \leq$$

$$\leq c \sum_{j=0}^{\ell-3} \left(\int\limits_{B_\varepsilon} |\nabla_{\ell-1-j}\, \varphi(x)|^{\frac{p(n-1)}{n-p(j+1)}} dx \right)^{\frac{n-p(j+1)}{n-1}} \left(\int\limits_e \frac{dx}{|x|^{n-1} |\log|x||^{\frac{p(n-1)}{p(j+1)-1}}} \right)^{\frac{p(j+1)-1}{n-1}} +$$

$$+ c \|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|_\infty^p \int\limits_e |x|^{1-n}\, |\log|x||^{-p} dx .$$

Так как функция $t^{n-1}|\log t|^{\alpha}$ вблизи точки $t=0$ возрастает, то из всех множеств e фиксированной $(n-1)$-мерной меры наибольшее значение интегралу

$$\int\limits_e |x|^{1-n}\, |\log|x||^{-\alpha} dx$$

сообщает шар с центром в точке $x=0$. Следовательно, при $\alpha > 1$ справедливо

$$\int\limits_e |x|^{1-n}\, |\log|x||^{-\alpha} dx \leq c\, |\log \operatorname{mes}_{n-1} e|^{1-\alpha}, \tag{8.34}$$

и поэтому

$$\sigma_1 \leq c \sum_{j=0}^{\ell-3} |\log \operatorname{mes}_{n-1} e|^{1-p-\frac{n-p(j+1)}{n-1}} \|\nabla_{\ell-1-j}\, \varphi; B_\varepsilon\|^p_{\frac{p(n-1)}{n-p(j+1)}} \quad +$$

$$+c\,|\log mes_{n-1} e|^{1-p}\,\|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|^p_\infty . \tag{8.35}$$

Отсюда и из оценки (8.24), в которой $q=p(n-1)/[n-p(j+1)]$, $\rho=\varepsilon$, а роль U играет вектор-функция $\nabla\varphi$, получаем

$$\sigma_1 \le c\,|\log mes_{n-1} e|^{1-p}\left(\langle\varphi; B_\varepsilon\rangle^p_{p,\ell-1/p} + \|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|^p_\infty\right).$$

Перейдем к оценке суммы σ_2. Заметим, что

$$\int_e \frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}\,dx \le c\left(\int_{\{x\in e:|x|>2|y|\}}|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)|^p\frac{dx}{|x|^{n-2+p}}+\right.$$

$$\left.+|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p\int_{\{x\in e:|x|>2|y|\}}\frac{dx}{|x|^{n-2+p}}+\int_{\{x\in e:|x|\le 2|y|\}}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}\,dx\right).$$

В соответствии с этим неравенством заключаем, что $\sigma_2\le\sigma_2^{(1)}+\sigma_2^{(2)}+\sigma_2^{(3)}$, где

$$\sigma_2^{(1)}=c\sum_{j=1}^{\ell-2}\int_e|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)|^p\frac{dx}{|x|^{n-2+p}}\int_{B_{|x|/2}}|\nabla_j\eta_\varepsilon(y)|^p\,dy,$$

$$\sigma_2^{(2)}=c\sum_{j=1}^{\ell-2}\int_e\frac{dx}{|x|^{n-2+p}}\int_{B_{|x|/2}}|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p\,|\nabla_j\eta_\varepsilon(y)|^p\,dy,$$

$$\sigma_2^{(3)}=c\sum_{j=1}^{\ell-2}\int_{B_\varepsilon}|\nabla_j\eta_\varepsilon(y)|^p\,dy\int_{\{x\in e:|x|\le 2|y|\}}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}\,dx .$$

Вспоминая определение функции η_ε , получаем

$$\sigma_2^{(1)} \le c\sum_{j=1}^{l-2}\int_{e}\frac{|\nabla_{l-1-j}\varphi(x)|^p}{|x|^{n-2+p}}dx\int_{B_{|x|/2}}|\log|y||^{-p}|y|^{-jp}dy \le$$

$$\le c\sum_{j=1}^{l-2}\int_{e}\frac{|\nabla_{l-1-j}\varphi(x)|^p dx}{|x|^{(j+1)p-1}|\log|x||^p}.$$

Мажоранта этой суммы, найденная при оценке σ_1 , равна

$$c\,|\log mes_{n-1} e|^{1-p}\left(<\varphi; B_{2\varepsilon}>^p_{p,l-1/p} + \|\nabla\varphi; B_{2\varepsilon}\|^p_\infty\right). \qquad (8.36)$$

Ясно, что

$$\sigma_2^{(2)} \le c\sum_{j=1}^{l-2}\int_{e}\frac{dx}{|x|^{n-2+p}}\int_{B_{|x|/2}}|\nabla_{l-1-j}\varphi(y)|^p|y|^{-jp}|\log|y||^{-p}dy \le$$

$$\le c\sum_{j=1}^{l-2}\int_{e}\frac{dx}{|x|^{n-2+p}|\log|x||^p}\int_{B_{|x|/2}}|\nabla_{l-1-j}\varphi(y)|^p|y|^{-jp}dy.$$

В силу неравенства

$$\int_{B_{|x|/2}}|\nabla_{l-1-j}\varphi(y)|^p|y|^{-jp}dy \le c|x|^{p-1}\left(<\varphi; B_{|x|/2}>^p_{p,l-1/p} + \|\nabla\varphi; B_{|x|/2}\|^p_\infty\right),$$

имеет место оценка

$$\sigma_2^{(2)} \le c\int_{e}\frac{dx}{|x|^{n-1}|\log|x||^p}\left(<\varphi; B_\varepsilon>^p_{p,l-1/p} + \|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|^p_\infty\right).$$

Отсюда и из (8.34) получаем для $\sigma_2^{(2)}$ мажоранту (8.36).

Величина $\sigma_2^{(3)}$ не превосходит

$$c\sum_{j=1}^{\ell-2}\int_{B_\varepsilon}\frac{dy}{|y|^{jp}|\log|y||^p}\int_{\{x\in e:\,|x|\le 2|y|\}}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dx.$$

Меняя порядок интегрирования и используя возрастание функции $t^{jp}|\log t|^p$ вблизи точки $t=0$, находим

$$\sigma_2^{(3)}\le c\sum_{j=1}^{\ell-2}\int_e\frac{dx}{|x|^{jp}|\log|x||^p}\int_{B_\varepsilon}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dy.$$

Примерим неравенство Гёльдера и оценку (8.34). Тогда при $q_j=(n-1)/(n-1-jp)$ выполняется

$$\sigma_2^{(3)}\le c\sum_{j=1}^{\ell-2}\left(\int_e|x|^{1-n}|\log|x||^{(1-n)/j}dx\right)^{jp/(n-1)}\times$$

$$\times\left[\int_{B_\varepsilon}\left(\int_{B_\varepsilon}\frac{|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}dy\right)^{q_j}dx\right]^{1/q_j}\le$$

$$\le c\sum_{j=1}^{\ell-2}|\log mes_{n-1}e|^{1-p-1/q_j}\left[\int_{B_\varepsilon}\left(\int_{B_\varepsilon}\frac{|\nabla_{\ell-1j}\varphi(x+h)-\nabla_{\ell-1j}\varphi(x)|^p}{|h|^{n-2+p}}dh\right)^{q_j}dx\right]^{1/q_j}.$$

Отсюда в силу неравенства Минковского

$$\sigma_2^{(3)}\le c|\log mes_{n-1}e|^{1-p}\sum_{j=1}^{\ell-1}\int_{B_\varepsilon}\left(\int_{B_\varepsilon}|\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x+h)-\nabla_{\ell-1-j}\varphi(x)|^{pq_j}dx\right)^{1/q_j}\frac{dh}{|h|^{n-2+p}}.$$

Поскольку пространство $W_p^{\ell-1-1/p}(R^{n-1})$ вложено в $B_{pq_j,p}^{\ell-j-1-1/p}(R^{n-1})$

при $j=1,\dots,\ell-2$ (см. [9]), то имеет место неравенство

$$\int\limits_{B_\varepsilon}\left(\int\limits_{B_\varepsilon}|\nabla_{\ell-2-j}\,v(x+h)-\nabla_{\ell-2-j}\,v(x)|^{pq_j}dx\right)^{1/q_j}\frac{dh}{|h|^{n-2+p}}\leq$$

$$\leq c\left(\langle v;B_{3\varepsilon}\rangle^{p}_{p,\ell-1-1/p}+\varepsilon^{1-n}\|v;B_{3\varepsilon}\|^{p}_{\infty}\right).$$

Следовательно,

$$\sigma_2^{(3)}\leq c\,|\log mes_{n-1}\,e|^{1-p}\left(\langle\varphi;B_{3\varepsilon}\rangle^{p}_{p,\ell-1/p}+\|\nabla\varphi;B_{3\varepsilon}\|^{p}_{\infty}\right).$$

Принимая во внимание полученные ранее оценки для $\sigma_2^{(1)}$ и $\sigma_2^{(2)}$, видим, что правая часть последнего неравенства мажорирует σ_2.

Оценим величину σ_3. Имеем

$$\int\limits_{e}dx\int\limits_{B_{2|x|}\setminus B_{|x|/2}}\frac{|\varphi(x)\nabla_{\ell-1}\eta_\varepsilon(x)-\varphi(y)\nabla_{\ell-1}\eta_\varepsilon(y)|^{p}}{|x-y|^{n-2+p}}dy\leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi;B_\varepsilon\|^{p}_{\infty}\int\limits_{e}\frac{dx}{|x|^{(\ell-1)p}|\log|x||^{p}}\int\limits_{B_{2|x|}}\frac{dy}{|x-y|^{n-2}}\leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi;B_\varepsilon\|^{p}_{\infty}\int\limits_{e}\frac{dx}{|x|^{n-1}|\log|x||^{p}}\,.$$

Далее,

$$\int\limits_{e}dx\int\limits_{B_{|x|/2}}\frac{|\varphi(x)\nabla_{\ell-1}\eta_\varepsilon(x)-\varphi(y)\nabla_{\ell-1}\eta_\varepsilon(y)|^{p}}{|x-y|^{n-2+p}}dy\leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi;B_\varepsilon\|_{\infty}\int\limits_{e}dx\int\limits_{B_{|x|/2}}\frac{\left(|x|^{2-\ell}|\log|x||^{-1}+|y|^{2-\ell}|\log|y||^{-1}\right)^{p}}{|x-y|^{n-2+p}}dy\leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|_\infty^p \int_e \frac{dx}{|x|^{n-2+p}} \int_{B_{|x|/2}} \frac{dy}{|y|^{n-p}|\log|y||^p} \leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|_\infty^p \int_e \frac{dx}{|x|^{n-1}|\log|x||^p}.$$

Аналогично

$$\int_e dx \int_{R^{n-1}\setminus B_{2|x|}} \frac{|\varphi(x)\nabla_{\ell-1}\eta_\varepsilon(x) - \varphi(y)\nabla_{\ell-1}\eta_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n-2+p}}\, dy \leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|_\infty^p \int_e dx \int_{R^{n-1}\setminus B_{2|x|}} \frac{(|x|^{2-\ell}|\log|x||^{-1} + |y|^{2-\ell}|\log|y||^{-1})^p}{|x-y|^{n-2+p}}\, dy \leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|_\infty^p \int_e \frac{dx}{|x|^{(\ell-2)p}|\log|x||^p} \int_{R^{n-1}\setminus B_{2|x|}} \frac{dy}{|y|^{n-2+p}} \leq$$

$$\leq c\|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|_\infty^p \int_e \frac{dx}{|x|^{n-1}|\log|x||^p}.$$

Складывая полученные оценки и применяя неравенство (8.34), находим

$$\sigma_3 \leq c\,|\log mes_{n-1} e|^{1-p}\, \|\nabla\varphi; B_\varepsilon\|_\infty^p.$$

Теперь из (8.33) и оценок для $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ следует, что

$$\|D_{\ell-1/p}(\eta_\varepsilon\varphi; B_\varepsilon); e\|_p^p \leq$$

$$\leq c|\log mes_{n-1} e|^{1-p}\left(\langle\varphi; B_{3\varepsilon}\rangle_{p,\ell-1/p}^p + \|\nabla\varphi; B_{3\varepsilon}\|_\infty^p\right) + c\|D_{\ell-1/p}(\varphi; B_\varepsilon); e\|_p^p.$$

Отсюда и из (8.31) выводим оценку

$$s_3^p \le C\left(\langle\varphi; B_{3\varepsilon}\rangle^p_{p,l-1/p} + \|\nabla\varphi; B_{3\varepsilon}\|^p_\infty + \right.$$

$$\left. + \sup_{e\subset B_\varepsilon} \frac{\|D_{l-1/p}(\varphi; B_\varepsilon); e\|^p_p}{cap\,(e, W_p^{l-1-1/p}(R^{n-1}))}\right).$$

Лемма доказана.

Объединяя леммы 8.3, 8.4, 8.5 и оценку 8.10, получаем, что при достаточно малых ε выполнено неравенство 8.9. Последнее, как было сказано в начале пункта 2°, эквивалентно условию $N_p^{l-1/p}$. Теорема 7.1 доказана.

Литература

1. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. О регулярности границы в L_p - теории эллиптических краевых задач.1.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л.Соболева), 1980, № 2, с.39-56.
2. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.- М.: ИЛ, 1962.- 205 с.
3. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.-М: Мир, 1971, 372 с.
4. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева), 1979, № 1, с.37-90.
5. Nečas J. Les méthodes directes en theorie des équations elliptiques. Academia. Prague, 1967, 351 p.
6. Мазья В.Г. О коэрцитивности задачи Дирихле в области с нерегулярной границей.- Изв.вузов. Математика, 1973, № 4, с.64-76.
7. Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Мультипликаторы пространств С.Л.Соболева в области.- Math.Nachr., 1978, B.81,s.25-82.
8. Кондратьев В.А., Эйдельман С.Д. Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач.- Докл. АН СССР, 1979, т.246, № 4, с.812-815.
9. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.- М.: Мир, 1973, 342 с.
10. Мазья В.Г. О суммируемости по произвольной мере функций из пространств С.Л.Соболева - Л.Н.Слободецкого.- Зап.научн. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1980, т.92, с.192-202.