УДК 517.54:517.514

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ СОБОЛЕВА

В.М.Гольдштейн (Новосибирск)

В статье изучается вопрос о продолжении функций классов Соболева из областей евклидова пространства. Нас интересуют необходимые условия продолжения, поэтому заранее предполагается существование ограниченного оператора продолжения из области $G \subset R^n$ на все пространство R^n, сохраняющего принадлежность функции соответствующему классу Соболева.

Мы не приводим подробную библиографию по этому вопросу, отсылая читателя к монографиям [1, 2]. Приведем только основные этапы изучения вопроса и работы последних лет, не вошедшие в список литературы, приведенный в указанных выше источниках.

Теорема о продолжении классов Соболева для областей с достаточно гладкой границей была доказана в работах С.М.Никольского [3], В.М.Бабича [4] и для областей с липшицевой границей - в работах А.П.Кальдерона [5], Ю.К.Солнцева [6], К.Т. Смита [7], О.В.Бесова и В.П. Ильина [8-10], В.И. Буренкова [11-12].

Автор совместно с С.К.Водопьяновым [13-15] получили необходимые и достаточные условия продолжения для класса L_2^1 из плоских односвязных областей. Таким условием является требование, чтобы граница области была квазиокружностью, т.е. образом окружности при квазиконформном гомеоморфизме плоскости на себя. Результат легко модифицируется для конечносвязных областей. Напомним, что Ю.Д.Бураго и В.Г.Мазья [16] получили необходимые и достаточные условия продолжения для функций классов BV в терминах изопериметра. Если плоская односвязная область и ее дополнение удовлетворяют одновременно условию продолжения для класса BV, то условие, полученное Ю.Д.Бураго и В.Г. Мазьей, эквивалентно условию квазиокружности.

В работах последних лет автором [17] и П. Джонсом [18] было доказано, что условие квазиокружности является достаточным для продолжения классов L_p^1 и W_p^ℓ из плоских конечносвязных областей. В [17] также было показано, что условие квазиокружности является необходимым для двустороннего продолжения любого из классов L_p^ℓ (W_p^ℓ). Условие двустороннего продолжения состоит в требовании одновременного существования ограниченных операторов продолжения $\theta_1 : W_p^\ell(G) \to W_p^\ell(R^2)$, $\theta_2 : W_p^\ell(\operatorname{Int} R^2 \setminus G) \to W_p^\ell(R^2)$; $\theta_1 u|_G = u$. Комбинируя этот результат с теоремой П.Джонса [18], получаем следующую теорему.

Теорема 0. *Для того чтобы плоская конечносвязная область удовлетворяла двустороннему условию продолжения для пространства* L_p^ℓ (W_p^ℓ), *необходимо и достаточно, чтобы каждая связная компонента границы являлась либо точкой, либо квазиокружностью.*

Недавно В.Г. Мазья [19] построил пример плоской односвязной области, для которой существует ограниченный оператор продолжения в R^2 для класса W_p^ℓ при $\ell p \neq 2$, но ее граница не является квазиокружностью.

П.Джонс [18] также получил широкие достаточные условия продолжения для областей евклидова пространства. Среди областей, квазиконформно эквивалентных шару (т.е. являющихся образами шара при квазиконформном гомеоморфизме всего пространства), существуют области, не удовлетворяющие условиям, предложенным П.Джонсом, но удовлетворяющие условию продолжения для класса W_3^1. Этот пример будет подробно проанализирован в статье.

Попытка понять, что именно из условия квазиокружности остается в случае отказа от двустороннего условия продолжения и сохранения требования о существовании оператора продолжения из области в R^2 , привела нас к простым геометрическим необходимым условиям, сохраняющим смысл для областей в пространстве при $\ell_p \geq n$, но все еще накладывающим сильные ограничения на область. Нам представляется, что эти геометрические условия близки к необходимым и достаточным, хотя таковыми не являются. Точка зрения автора состоит в том, что необходимые и достаточные условия в размерности $n \geq 3$ не носят геометрического характера.

§1. Анализ условия квазиокружности. Формулировка основных результатов

Пусть G - ограниченная область в R^n . Пространство $L_p^\ell(G)$ - это пространство функций $u : G \to R$, локально суммируемых в области G и имеющих обобщенные производные до порядка ℓ включительно. Последние должны быть суммируемы в степени p . Полунорма в $L_p^\ell(G)$ вводится обычным образом:

$$\|u\|_{L_p^\ell(G)} = \|u\|_{\ell,p,G} = \sum_{|\alpha|=\ell} \left\{ \int_G |D^\alpha u|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$ - целые числа, и

$$D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \; ; \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

Вместе с $L_p^\ell(G)$ будет рассматриваться пространство $W_p^\ell(G) = \bigcap_{i=0}^{\ell} L_p^i(G)$, в котором норма равна

$$\|u\|_{W_p^\ell(G)} = \sum_{k=0}^{\ell} \|u\|_{k,p,G} .$$

Квазисфера. Поверхность в R^n называется квазисферой, если она является образом $n-1$ -мерной сферы при квазиконформном гомеоморфизме R^n на себя. При $n=2$ квазисферу будем называть квазиокружностью.

Необходимым и достаточным условием того,чтобы замкнутая жорданова кривая в плоскости была квазиокружностью, является

Условие Альфорса[20] .Во всех дальнейших рассуждениях предполагается, что окрестность точки x_0 , принадлежащей замкнутой жордановой кривой γ , выбирается настолько маленькой, что связная компонента γ_V пересечения кривой γ и окрестности $V(x_0)$, содержащая точку x_0 , является жордановой дугой, не совпадающей со всей кривой γ .

Замкнутая жорданова кривая γ удовлетворяет условию Альфорса, если у любой точки $x_0 \in \gamma$ существует окрестность, в которой выполнено условие: любая тройка точек $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \gamma_V$ удовлетворяет неравенству $|\xi_1 - \xi_3| < C|\xi_1 - \xi_2|$, если точка ξ_3 лежит между точками ξ_1 и ξ_2 на γ_V . Постоянная C не зависит от выбора точки $x_0 \in \gamma$ и тройки точек ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Односвязная область $G \subset R^2$ удовлетворяет условию Альфорса, если ее граница является жордановой кривой, удовлетворяющей условию Альфорса.

Мы приведем условие, эквивалентное условию Альфорса, но сразу заметим, что постоянная в новом условии зависит не только от постоянной в условии Альфорса, но и от формы области.

Пусть G - плоская односвязная область, граница ∂G которой является замкнутой жордановой кривой. Выберем две точки x и y , принадлежащие ∂G . Рассмотрим кратчайшую из дуг границы, соединяющую x и y . Обозначим через $d(x,y)$ диаметр этой дуги. Если существует постоянная C , не зависящая от выбора пары точек x и y на границе области, для которой выполнено неравенство $d(x,y) \leq C|x-y|$, то будем говорить, что для нашей области G выполнено предварительное условие с диаметром дуги.

Очевидно, что для рассматриваемого класса плоских областей предварительное условие с диаметром дуги эквивалентно условию Альфорса.

Предварительное условие с диаметром дуги понадобится нам в дальнейшем для выяснения связи между вводимым ниже классом областей, удовлетворяющих условию с диаметром дуги, и областей, удовлетворяющих условию Альфорса.

Условие с диаметром дуги. Открытое множество $G \subset R^n$ удовлетворяет условию с диаметром дуги, если для каждой пары точек $x, y \in G$ выполнено неравенство $diam\,(x,y,G) \leq C\,|x-y|$ с постоянной C, не зависящей от выбора пары x,y. Здесь $diam\,(x,y,G)$ - это минимум диаметров гладких кривых, соединяющих точки x и y в G. Если таких кривых не существует, то полагаем $diam\,(x,y,G) = \infty$.

Открытое множество G удовлетворяет двустороннему условию с диаметром дуги, если оно само и внутренность $Int\,(R^n \setminus G) = G^*$ его дополнения удовлетворяют условию с диаметром дуги.

Сформулируем несколько простых свойств областей, удовлетворяющих условию с диаметром дуги.

1) Если область G удовлетворяет условию с диаметром дуги, то для любых двух точек x,y ее границы существует кривая $\gamma_{x,y} : (0,1) \to G$, множество предельных точек которой содержит точки x и y, а диаметр удовлетворяет неравенству

$$diam\,\gamma_{x,y} \leq C\,|x-y|.$$

Постоянная C здесь та же, что и в условии с диаметром дуги. Для краткости в дальнейшем мы будем говорить, что кривая $\gamma_{x,y}$ соединяет две точки границы области, если ее замыкание содержит эти точки.

Следствие. *Если плоская односвязная ограниченная область и ее дополнение удовлетворяют условию с диаметром дуги (в дальнейшем мы будем говорить, что область удовлетворяет двустороннему условию с диаметром дуги), то область удовлетворяет условию Альфорса.*

Фраза " дополнение области удовлетворяет условию с диаметром дуги" здесь и в дальнейшем означает, что внутренность дополнения удовлетворяет этому условию. Требование того, чтобы граница области была замкнутой жордановой кривой, мы считаем включенным в условие Альфорса.

Доказательство следствия. Предварительно напомним, что значит для области быть связной в каждой точке границы.

Пусть x принадлежит границе ∂G области G. Область G связна в точке x, если для любого шара $B\,(x,R)$ с центром в x существует шар $B\,(x,r)$, $r < R$, такой, что любые две точки пересечения $B(x,r) \cap G$ можно соединить кривой в $B\,(x,R) \cap G$.

Если область удовлетворяет условию с диаметром дуги, то она связна в каждой граничной точке. Действительно, если область не связна в точке x, то существует шар $B(x,R)$ такой, что в каждом шаре меньшего радиуса можно выбрать пару точек, которые нельзя соединить кривой в $B(x,r)$. Это противоречит условию с диаметром дуги. Если граница плоской односвязной области связна в каждой граничной точке, то ее граница является жордановой кривой. (Доказательство этого факта см. в [2].)

Выберем на жордановой дуге $\gamma = \partial G$ любые две точки x, y. По свойству 1 существуют такие дуги $\gamma_{x,y}$ и $\gamma^*_{x,y}$, соединяющие x и y в G и $G^* = Int(R^2 \setminus G)$ соответственно, что $max(diam\,\gamma_{x,y}, diam\,\gamma^*_{x,y}) \leq 2C|x-y|$.

Тогда существует дуга $\gamma'_{x,y}$ на кривой γ, соединяющая точки x и y и удовлетворяющая неравенству

$$diam\,\gamma'_{x,y} \leq 2C|x-y|,$$

т.е. для области G выполнено предварительное условие с диаметром дуги, и, значит, она удовлетворяет условию Альфорса.

2) Область, удовлетворяющая условию с диаметром дуги, связна в каждой граничной точке.

Это было показано в ходе доказательства следствия.

3) Пусть область $G \subset R^n$ удовлетворяет условию с диаметром дуги. Рассмотрим область $G^* = Int(R^n \setminus G)$ и обозначим через $G_1^*, G_2^* \ldots$ связные компоненты ее дополнения.

Пересечение $G_i^* \cap G_j^*$ пусто при всех $i \neq j$.

Это свойство является простым следствием свойства 2.

4) Если область $G \subset R^2$ удовлетворяет двустороннему условию с диаметром дуги, то ее дополнение является областью.

5) Если область $G \subset R^2$ удовлетворяет двустороннему условию с диаметром дуги, то $\partial G \,\Delta\, \partial G^*$ имеет топологическую размерность нуль.

Доказательство. Допустим, что $\partial G \,\Delta\, \partial G^*$ имеет ненулевую топологическую размерность. Тогда либо $\partial G \setminus \partial G^*$, либо $\partial G^* \setminus \partial G$ имеет ненулевую топологическую размерность. Допустим для определенности, что таким является первое из этих множеств. Тогда существуют хотя бы одна точка $x \in \partial G \setminus \partial G^*$ и круг $B(x,r)$, удовлетворяющие условиям: а) $B(x,r) \cap \cap \bar{G}^* = \emptyset$, б) в любом шаре $B(x,r_1)$ при $r_1 < r$ существуют две точки x_0' и x_1', которые нельзя соединить кривой в $A = B(x,r) \setminus \partial G$.

Следовательно, любая кривая, соединяющая точки x_0' и x_1' в области

G , имеет диаметр, больший, чем $r - r_1$. Так как радиус r_1 может быть выбран произвольно малым, то это противоречит условию с диаметром дуги.

Замечание 1. Аналогично предыдущему можно доказать, что для областей $G \subset R^n$, удовлетворяющих двустороннему условию с диаметром дуги, множество $\partial G \Delta \partial G^*$ имеет топологическую размерность не выше, чем $n-2$.

Пример шара $B(0,1) \subset R^3$ с выкинутым отрезком $[0,1)$ на оси иксов показывает, что топологическая размерность n 2 для $\partial G \Delta \partial G^*$ в области, удовлетворяющей двустороннему условию с диаметром дуги, реализуется.

Более того, если выкинуть из шара любое относительно замкнутое множество размерности $n-2$, то полученная область удовлетворяет двустороннему условию с диаметром дуги. Это легко следует из того, что $n-2$ -мерное множество не разбивает никакой шар на две связные компоненты.

6) Если конечносвязная область $G \subset R^2$ и любая связная компонента множества G^* удовлетворяет условию с диаметром дуги, то всякая связная компонента границы ∂G , не являющаяся точкой, удовлетворяет условию Альфорса.

Доказательство аналогично доказательству свойства 3.

Приведем несколько характерных примеров областей, удовлетворяющих условию с диаметром дуги.

Пример 1. (Область с нулевыми углами.) Рассмотрим в плоскости области $G=\{(x,y): 0<x<1, |y|<x^2\}$ и $G^*=Int(R^2 \setminus G)$, первая из которых удовлетворяет условию с диаметром дуги, а вторая - нет, т.е. G не удовлетворяет двустороннему условию с диаметром дуги.

Пример 2. (Области с пиками.) Приведем описание областей с пиками в точности следуя [22] , так как предполагаем в дальнейшем использовать изученное в этой работе поведение квазиконформных гомеоморфизмов в таких областях. Пример приводится для размерности три только из соображений наглядности и легко модифицируется для любой большой размерности.

Множество в R^3 назовем пиком , если изометрией φ пространства R^3 его можно отобразить на $s=\{x=(r,\theta,x_3) \quad : r=g(x_3);\ 0<x_3<a\}$, где $a<\infty$ и $g(x)$ - гладкая функция, удовлетворяющая следующим условиям: а) $g(a)=0$, б) $g'(u)$ непрерывна и убывает при $0<u<a$, в) $\lim\limits_{u\to a} g'(u)=0$.

Образ точки $Q=(0,0,a)$ при изометрии φ^{-1} назовем вершиной пика, образ вектора $e_3=(0,0,1)$ - направлением пика и образ диска $B=\{x: 0\leq r\leq g(0),\ x_3=0\}$ - основанием пика.

Область $G\subset R^3$ называется областью с пиком, если на ее границе существуют точка x и окрестность $U(x)$ такие, что $\partial G \cap U$ является пиком с вершиной x . Пусть $\bar{n}$ - направление пика. Если точки $x+u\bar{n}$ не принадлежат G , то будем говорить, что область имеет пик, направленный внутрь. Если точки $x+un$ принадлежат G, то будем говорить, что область имеет пик, направленный наружу. Проверка принадлежности $x+un$ области производится при достаточно малых u.

Непосредственно проверяется, что в отличие от плоского случая, как области с пиком, направленным внутрь, так и области с пиком, направленным наружу, могут удовлетворять условию с диаметром дуги и двустороннему условию с диаметром дуги.

Открытое множество $G\subset R^n$ удовлетворяет условию продолжения для $L_p^\ell(G)\,(W_p^\ell(G))$, если существует ограниченный оператор продолжения

$$\theta(\ell,p,G): L_p^\ell(G)(W_p^\ell(G)) \longrightarrow L_p^\ell(R^n)(W_p^\ell(R^n)).$$

Открытое множество $G\subset R^n$ удовлетворяет двустороннему условию продолжения, если G и $G^*=Int(R^n\setminus G)$ удовлетворяют условию продолжения для одного и того же пространства $L_p^\ell\,(W_p^\ell)$ одновременно.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Если область $G\subset R^n$ удовлетворяет условию продолжения для $L_p^\ell(G)\,(W_p^\ell(G))$ при $\ell p\geq n$, то она удовлетворяет и условию с диаметром дуги.*

Теорема 2. *Если область $G\subset R^2$ удовлетворяет условию продолжения для $L_p^\ell(G)(W_p^\ell(G))$ при $\ell p=2$, то она удовлетворяет и условию с диаметром дуги.*

Если же область G конечносвязна, то любая связная компонента множества G^* удовлетворяет условию с диаметром дуги.

Замечание 2. По свойству 1 и его следствию следует, что для конечносвязной ограниченной области $G\subset R^2$, удовлетворяющей условию продолжения для $\ell p=2$, всякая связная компонента границы является либо точкой, либо квазиокружностью.

Теорема 3. *Если область $G\subset R^2$ удовлетворяет условию продолжения для $W_p^\ell(G)$ при $1\leq \ell p\leq 2$, то всякая связная компонента множества $G^*=Int(R^2\setminus G)$ удовлетворяет условию с диаметром дуги.*

Напомним, что в теоремах 1-3 область G предполагается ограниченной.

§2. Предварительные сведения о емкости

Определение (ℓ,p)-емкости. Функция $u\in L_p^\ell(G)$ называется (ℓ,p)-допустимой для пары компактов $F_0,F_1\subset G$, если она непрерывна, тождественно равна нулю в некоторой окрестности F_0 и тождественно равна единице в некоторой окрестности F_1.

Число

$$C_p^\ell(F_0, F_1, G) = \inf \|u\|^p_{L_p^\ell(G)}$$

назовем (ℓ,p) -емкостью пары (F_0, F_1) в области G. Нижняя грань в выражении для емкости берется по всевозможным допустимым функциям.

Если для пары (F_0, F_1) допустимых функций не существует, полагаем емкость равной ∞.

Свойства (ℓ,p) -емкости. Мы приводим без доказательства несколько простейших свойств емкости.

1) Монотонность относительно пары. Если $F_0'\subset F_0, F_1'\subset F_1$, то для пар $(F_0', F_1'), (F_0, F_1)$ справедливо неравенство

$$C_p^\ell(F_0', F_1'; G) \leq C_p^\ell(F_0, F_1; G).$$

2) Монотонность относительно области. Если U, V -области в R^n и $V\subset U$, то для любой пары компактов $(F_0, F_1)\subset V$ выполняется неравенство

$$C_p^\ell(F_0, F_1; V) \leq C_p^\ell(F_0, F_1; U).$$

3) Непрерывность. Пусть $\{F_{1,m}\}\subset G$ - монотонно убывающая последовательность компактов. Тогда для любого компакта $F_0\subset G$ справедливо соотношение

$$\lim_{m\to\infty} C_p^\ell(F_0, F_{1,m}; G) = C_p^\ell(F_0, \bigcap_{m=0}^{\infty} F_{1,m}; G).$$

4) Поведение при подобиях. Если $\varphi(x)=\kappa x$ $(\kappa>0)$, то

$$C_p^\ell(\varphi(F_0), \varphi(F_1), \varphi(G)) = \kappa^{n-\ell p} C_p^\ell(F_0, F_1; G).$$

Заметим,что только при $\ell p=n$ (ℓ,p) -емкость инвариантна при подобиях. Это наблюдение существенно при изучении более тонких свойств емкости.

Лемма 1. *При* $\ell p>n$ (ℓ,p) *-емкость* $C_p^\ell(\{x\},\{y\}; R^n)$ *пары точек* x,y *стремится к* ∞ *при* $|x-y|\to 0$. *Лемма непосредственно следует из теоремы о необходимых и достаточных условиях вложения*

$W_p^\ell\ (L_p^\ell)$ *в пространство непрерывных функций* [23].

Лемма 2. *Пусть* $\ell p = n$. *Рассмотрим в шаровом слое* $P_{1,\tau} = B(0,1)\setminus B(0,\tau)$ *два связных компакта* F_0, F_1 , *соединяющих сферы* $S(0,1)$ *и* $S(0,\tau)$ *в* $P_{1,\tau}$. *Тогда*

$$\lim_{\tau\to 0}\ \inf_{F_0,F_1} C_p^\ell (F_0, F_1; D_{1,\tau}) = \infty,$$

где нижняя грань берется по всевозможным связным компактам, соединяющим сферы $S(0,1)$ *и* $S(0,2)$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы для пространств Бесова [21] .

Лемма 3. *Пусть* $\ell p > n-1$ *и* $S(0,1), S(0,2)$*-сферы в* R^n . *Рассмотрим связный компакт* F_0 , *соединяющий точку* $\{0\}$ *со сферой* $S(0,1)$, *и связный компакт* F_1 , *соединяющий сферы* $S(0,1)$ *и* $S(0,2)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$C_p^\ell (F_0, F_1, R^n) \geq \gamma\,(\ell, p, n) > 0,$$

где постоянная $\gamma(\ell, p, n)$ *зависит только от* ℓ, p *и размерности рассматриваемого пространства.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.9 из [21] .

§3. Необходимые условия продолжения

В этом параграфе мы докажем основные результаты статьи, используя накопленные сведения о емкости и областях, удовлетворяющих условию с диаметром дуги. Предварительно сформулируем условия продолжения на емкостном языке.

Лемма о подобии. *Пусть область* $G \subset R^n$ *удовлетворяет условию продолжения для* $W_p^\ell\ (L_p^\ell)$ *и* $\|\theta\| = C$ *- норма оператора продолжения. Рассмотрим отображение подобия* $\varphi(x) = Kx$. *Тогда область* $\varphi(G)$ *также удовлетворяет условию продолжения для* $W_p^\ell\ (L_p^\ell)$ *и норма оператора продолжения из области* $\varphi(G)$ *равна* C. . (Новый оператор продолжения θ_1 для области $\varphi(G)$ строится по формуле $\theta_1 = (\varphi^{-1})^* \theta \varphi^*$, где θ - старый оператор продолжения, а $\varphi^*: W_p^\ell(\varphi(G)) \longrightarrow W_p^\ell(G)$ - ограниченный линейный оператор, индуцированный отображением по правилу $(\varphi^* u)(x) = (u\circ\varphi)(x)$ для почти всех x .)

Лемма доказывается непосредственным подсчетом.

Теорема 4. *Если область $G \subset R^n$ удовлетворяет условию продолжения для $L_p^\ell(G)$, то для любой пары компактов $F_0, F_1 \subset G$ справедливо неравенство*

$$C_p^\ell(F_0, F_1, R^n) \leq K(\ell, p) C_p^\ell(F_0, F_1, G).$$

Доказательство. Выберем произвольно пару компактов F_0, F_1. Если $C_p^\ell(F_0, F_1, G) = \infty$, то неравенство очевидно. Пусть $C_p^\ell(F_0, F_1, G) < \infty$. Возьмем любую (ℓ, p)-допустимую для пары F_0, F_1 функцию u. По предположению существует ограниченный оператор продолжения $\theta : L_p^\ell(G) \longrightarrow L_p^\ell(R^n)$. Рассмотрим функцию $u_1 = \theta u$. Приблизим эту функцию последовательностью функций $\{v_m\} \subset C(R^n)$, сходящихся к ней в $L_p^\ell(R^n)$ и совпадающих с функцией u_1 в некоторой окрестности компакта $F_0 \cup F_1$. Тогда любая из функций v_m будет допустимой для пары F_0, F_1 в R^n. Следовательно,

$$C_p^\ell(F_0, F_1, R^n) \leq \varliminf_{m \to \infty} \| v_m \|^p_{L_p^\ell(R^n)} = \| u_1 \|^p_{L_p^\ell(R^n)}.$$

Используя ограниченность оператора θ и произвольность в выборе (ℓ, p)-допустимой функции u, получаем

$$C_p^\ell(F_0, F_1, R^n) \leq \|\theta\|^p C_p^\ell(F_0, F_1, G).$$

Теорема доказана с постоянной $C = \|\theta\|^p$.

Замечание 3. Для ограниченных областей в R^n теорема сохраняет силу, если заменить пространство L_p^ℓ пространством W_p^ℓ.

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим случай $\ell p > n$. Для ограниченных областей безразлично, какое из пространств L_p^ℓ или W_p^ℓ рассматривать. Проведем рассуждение для L_p^ℓ.

Пусть $\theta : L_p^\ell(G) \longrightarrow L_p^\ell(R^n)$ - ограниченный оператор продолжения, существующий по предположению теоремы. Допустим, что область G не удовлетворяет условию с диаметром дуги. Значит, для любого $C > 0$ существует пара точек $x_C, y_C \subset G$, для которых $diam(\gamma_{x_C, y_C})$ любой кривой $\gamma_C = \gamma_{x_C, y_C}$, соединяющей точки x_C и y_C, больше, чем $C|x_C - y_C|$, т.е. связная компонента A_C пересечения шара $B(x_C, C|x_C - y_C|)$ с областью G, содержащая x_C, не включает

y_C. Лемма о подобии утверждает, что не ограничивая общности мы можем считать диаметр области G меньше единицы. Тогда $C|x_C - y_C| < 1$. Сделаем подобное преобразование φ_C области G с коэффициентом подобия $1/C|x_C - y_C|$ и рассмотрим два компакта: точку $\{x_C\}$ и компакт $F_{1,C}$ связный, лежащий вне шара $B(x_C, \frac{1}{2}C|x_C - y_C|)$, соединяющий сферы $S(x_C, \frac{C}{2}|x_C - y_C|)$ с точкой y_C и принадлежащий области G.

Из свойств 1 и 2 емкости получаем неравенство

$$C_p^\ell(\{x_C\}, F_{1,C}, G) \leq C_p^\ell(\{x_C\}, B^n \setminus \overline{B(\{x_C\}, C|x_C - y_C|)}, R^n).$$

Отсюда, по теореме 4, следует, что

$$C_p^\ell(\{\varphi(x_C)\}, \varphi(F_{1,C}), G) \leq C_p^\ell(\{0\}, R^n \setminus \overline{B(0,1)}, R^n),$$

$$C_p^\ell(\{\varphi_C(x_C)\}, \{\varphi_C(y_C)\}, R^n) \leq C_p^\ell(\{\varphi_C(x_C)\}, \varphi_C(F_{1,C}), R^n) \leq$$

$$\leq C_p^\ell(\{\varphi_C(x_C)\}, \{\varphi_C(F_{1,C})\}, \varphi_C(G)) \|\theta\|^p \leq$$

$$\leq C_p^\ell(\{0\}, R^n \setminus \overline{B(0,1)}, R^n) \|\theta\|^p.$$

Расстояние между точками $\varphi_C(x_C)$ и $\varphi_C(y_C)$ равно $1/C$. Емкость $C_p^\ell(\{0\}, R^n \setminus \overline{B(0,1)}, R^n)$ конечна и не зависит от выбора C. Переходя к пределу в обеих частях последнего неравенства и используя лемму 1, получаем

$$\infty = \lim_{C\to\infty} C_p^\ell(\{\varphi_C(x_C)\}, \{\varphi_C(y_C)\}, R^n) \leq C_p^\ell(\{0\}, R^n \setminus \overline{B(0,1)}, R^n) \|\theta\|^p.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 2 и случая $\ell p = n$ в теореме 1. Начало доказательства до построения отображения φ_C такое же, как и в предыдущем случае. Заметим, что при $\ell p = n$ (ℓ, p) -емкость инвариантна при подобиях.

Рассмотрим связную компоненту A_C^0 множества $B(\{x_C\}, \frac{C}{2}|x_C - y_C|) \cap G$, содержащую точку x_C, и выберем в ней любую кривую $\gamma_{0,C}$, соединяющую точку x_C со сферой $S(x_C, \frac{C}{2}|x_C - y_C|)$. Аналогично в множестве A_C^1, являющемся связной компонентой разности $G \setminus \overline{A}_C^0$ выберем кривую $\gamma_{1,C}$ соединяющую точку y_C со сферой $S(x_C, C|x_C - y_C|)$.

Из теоремы 4 и свойства 4 (ℓ, p)-емкости следует .

$$C_p^\ell(\gamma_{0,C}, \gamma_{1,C}, R^n) \leq \|\theta\|^p C_p^\ell(\gamma_{0,C}, \gamma_{1,C}, G).$$

Кривую $\gamma_{1,C}$ можно было выбрать, избегая пересечения этой кривой со связной компонентой множества $G \cap B(x_0, C|x_C - y_C|)$, содержащей точку x_C. В этом случае из предыдущего неравенства и свойств емкости вытекает

$$C_p^\ell(\gamma_{0,C}, \gamma_{1,C}, G) \leq C_p^\ell(B(0, 1/2), R^n \setminus \overline{B(0,1)}, R^n).$$

Напомним, что $|x_C - y_C| \longrightarrow 0$ при $C \longrightarrow \infty$. Отсюда, переходя в предыдущем неравенстве к пределу и применяя лемму 2, получаем

$$\infty = \lim C_p^\ell(\gamma_{0,C}, \gamma_{1,C}, G) \leq C_p^\ell(B(0, 1/2), R^n \setminus \overline{B(0,1)}, R^n).$$

Вторая часть теоремы 1 доказана. Закончим доказательство теоремы 2. По свойству 2 областей, удовлетворяющих условию с диаметром дуги, область G связна в каждой граничной точке. Это значит, что связные компоненты ее дополнения, имеющие непустую внутренность, не должны пересекаться. По свойству 5, областей, удовлетворяющих условию с диаметром дуги, кроме рассмотренных выше компонент, дополнение области может содержать только точки. В силу конечносвязности области G, этих точек может быть конечное количество.

Для окончания доказательства теоремы остается показать, что внутренность любой из связных компонент дополнения области либо пуста, либо удовлетворяет условию с диаметром дуги.

Это следует из теоремы 3, которая будет доказана ниже.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

Допустим, что для некоторой связной компоненты C^* внутренности дополнения области G не выполнено условие с диаметром дуги. Тогда на границе области G для каждого C можно найти две точки x_C и y_C, для которых любая кривая, соединяющая их в области G^*, имеет диаметр, больший, чем $C|x_C - y_C|$. Выберем C достаточно большим. Заметим, что без ограничения общности можно считать, что $C|x_C-y_C|< 4^{-1}\operatorname{diam} G$.

Соединим точки x_C и y_C отрезком. Рассмотрим три круга B_0, B_1, B_2 с центрами в середине z_C отрезка, соединяющего точки x_C и y_C, и радиусами $\frac{1}{2}|x_C-y_C|$, $\frac{C}{4}|x_C-y_C|$, $\frac{C}{2}|x_C-y_C|$. Отрезок делит область G на несколько частей, среди которых есть одна массивная G_0. Среди остальных, по предположению, можно найти часть G_1, диаметр которой больше, чем $\frac{C}{2}|x_C-y_C|$. В разности $G_1 \setminus B_1$ можно найти компакт F_0^C, диаметр которого больше, чем $C/2$, а в разности $G_0 \setminus (B_1 \cup (R^2 \setminus B_2))$ - второй компакт F_1^C, диаметр которого больше, чем $C/4$. Тогда $C_p^\ell(F_0^C, F_1^C, G)$ стремится к нулю при $C \to \infty$, а $C_p^\ell(F_0^C, F_1^C, R^2) >$

$> \alpha^2(\ell, p) > 0$, по свойству 4 (ℓ, p)-емкости и лемме 3 при $\ell p < 2$ или ее аналогу для $\ell p = 2$.

Теорема 3 доказана.

Литература

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления и теоремы вложения.-М.: Наука, 1975.- 470 с.
2. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.-М.: Мир, 1973.- 341 с.
3. Никольский С.М. К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом.- Докл.АН СССР, 1953, т.88, №3, с.409-411.
4. Бабич В.М. К вопросу о распространении функций.-Успехи мат.наук, 1953, т.8, №2, с.111-118.
5. Calderon A.P. Lebesque space of differential function. - Conf. on Partial Differential Equation. Univ. of California, 1966, p.18-32.
6. Солнцев Ю.К. Об оценке смешанной производной в $L_p(G)$.- Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1961, т.64, с.221-238.
7. Smith K.T. Inequality for formally positive integrodifferential forms.- Bull.Amer.Math.Soc., 1961, v.67, p. 368-370.
8. Бесов О.В., Ильин В.П. Расширение класса областей в теоремах вложения.- Мат.сб., 1968, т.13, №4, с.483-495.

9. Бесов О.В. Продолжение функций из пространств W_p^ℓ и L_p^ℓ - Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1967, т.89, с.2-17.

10. Бесов О.В. О коэрцитивности в неизотропном пространстве С.Л.Соболева.- Мат. сб., 1967, т.73, №4, с.585-599.

11. Буренков В.И. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т. 140, с.27-67.

12. Буренков В.И. О продолжении функций с сохранением полунормы.- Докл.АН СССР, 1976, т.228, №4, с.779-782.

13. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М., Латфуллин Т.Г. Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей.- Сиб. мат. журн., 1979, т.20, с.416-419.

14. Водопьянов С.К., Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными.- Успехи мат. наук, 1979 , т.34, №1, с. 17-62.

15. Gol'dstein V.M., Vodop'janov S.K. Prolongement de fonction des classes Sobolev a la domains plats. - C.R.Acad.Sci., Paris, 1980,t.290, p. 453-456.

16. Бураго Ю.Д., Мазья В.Г. Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами.- Зап.науч. семинаров ЛОМИ, 1967, №3, с.1-67.

17. Гольдштейн В.М. Продолжение дифференцируемых функций с сохранением класса из плоских областей.- Докл. АН СССР, 1981, т.257, №2, с.451-454.

18. Jones P.W. Quasiconformal Mappings and Extendability of Functions in Sobolev Spaces. - Preprint Univ. of Chicago, 1980, p.1-30.

19. Мазья В.Г. О продолжении функций из пространств Соболева.- Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1981, №1, с.1-12.

20. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям.- М.: Мир, 1969.- 132 с.

21. Гольдштейн В.М. Продолжение функций классов $B_{p,\theta}^\ell$ через квазиконформные границы.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева). Новосибирск, Наука, 1979, №1, с.16-36.

22. Gehring F.W., Väisälä J. The coefficient of quasiconformality of domain in space. - Acta math., 1965, v.114, p. 1-70.

23. Мазья В.Г. p-проводимость и теоремы вложения некоторых функциональных пространств в пространство L_p .- Докл. АН СССР, 140, №2, 1961, с.299-302.