УДК 517.948.35

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В.И. Фейгин (Москва)

Введение

Пусть в области $\Omega \subset R^n$ задана функция $q(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ такая, что

$$1 \leq q(x) \to \infty \text{ при } |x| \to \infty, \ |D_{x_i} q(x)| \leq \tilde{C}\, q(x)^{1+\delta} \ (1 \leq i \leq n),$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega\ ; \ 0 \leq \delta < 1. \tag{0.1}$$

Будем говорить, что область Ω принадлежит классу $Lip_\delta(q(x))$, если существует число d такое, что для любой точки x_0, принадлежащей границе $\partial\Omega$ области Ω, пересечение $U_{x_0}(d)$ шара $B_{x_0}(d)$ радиуса $d q(x_0)^{-\delta}$ с центром в точке x_0 и Ω задается (после соответствующего поворота координатных осей $x \to \hat{z}$) неравенством $\hat{z}_n \geq f_{x_0}(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{n-1}) = f_{x_0}(\hat{z}')$, причем для $x, y \in U_{x_0}(d)$

$$|f_{x_0}(x') - f_{x_0}(y')| \leq d\, |x' - y'| \ . \tag{0.2}$$

Введем гильбертовы пространства $H_s(\Omega, q(x))$, состоящие из функций $u(x)$, с конечной нормой

$$\|u\|^2_{s,q} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq s} |D^\alpha u(x)|^2 q(x)^{2(s-|\alpha|)} dx \quad (s = 0, 1, \dots). \tag{0.3}$$

В частности, при $s = 0$ пространство $H_0(\Omega, q) = L_2(\Omega)$; при этом индекс q в (0.3) будем опускать.

Пусть на функциях из $C_0^\infty(\Omega)$ задан дифференциальный оператор

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha ,$$

эллиптический с весом $q(x)$, т.е.

$$|p(x,\xi)| \overset{\text{опр.}}{=} \Big|\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\Big| \ge \mu\ \big(|\xi|+q(x)\big)^m$$

и

$$|D^\beta a_\alpha(x)| \le c_{\alpha\beta}\, q(x)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|} , \qquad (0.4)$$

где $\mu>0$, $x\in\Omega$, $\xi\in R^n$, $|\alpha|\le m$, $|\beta|=0,1,\dots$

Будем предполагать, что оператор P формально самосопряжен на функциях из $C_0^\infty(\Omega)$ и, для определенности,

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha>0 .$$

Пусть также $\hat{P}$ - некоторое самосопряженное расширение оператора P в $L^2(R^n)$, причем

$$\|u\|_{m,q}\le c(\|Pu\|_0+\|u\|_0) \quad \text{для } u\in D_{\hat{P}} \qquad (0.5)$$

и расширение $\hat{P}$ определяется границей области в следующем смысле: если $u\in D_{\hat{P}}$, $\varphi(x)=1$ в окрестности $\partial\Omega$, то

$$\varphi u\in D_{\hat{P}} . \qquad (0.6)$$

Из условий (0.5) ,(0.1) следует, что оператор $\hat{P}$ имеет дискретный спектр. Пусть λ_i $(i=1,2,\dots)$ - собственные числа $\hat{P}$, взятые с их кратностью и занумерованные в любом порядке. Обозначим через $N_+(t)$ и $N_-(t)$ количество чисел λ_i на отрезках $[0,t]$ и $[-t,0]$ соответственно. В работе изучается асимптотическое поведение $N_+(t)$ и $N_-(t)$ при $t\to\infty$. Обозначим

$$V_\Omega(t)=(2\pi)^{-n}\,\mathrm{mes}\{x\in\Omega,\ \xi\in R^n;\ \mathrm{Re}\,p(x,\xi)<t\},$$

$$W_{\Omega}(t,\tau)=V_{\Omega}(t+\tau)-V_{\Omega}(t-\tau),\ V_{\partial\Omega,\omega,c}(t)=$$

$$=\operatorname{mes}\bigcup_{x\in\partial\Omega}\{y,\ \xi\in R^n,\ |y-x|\le cq(x)^{-\delta}t^{-\omega},\ \operatorname{Re}p(x,\xi)<ct\}.$$

Ниже будет доказана основная

Теорема 0.1. *Пусть числа* ω *и* $\varkappa$ *таковы, что*

$$0<\varkappa\le\omega,\quad \omega+\varkappa+\frac{\delta-1}{m}<0. \tag{0.7}$$

Тогда для некоторого C *и любого* $\varepsilon>0$ *при* $t\to\infty$

$$N_+(t)=V_{\Omega}(t)+t^{\varepsilon}O\left(W_{\Omega}(t,ct^{1-\varkappa})+V_{\partial\Omega,\omega,c}(t)\right), \tag{0.8}$$

$$N_-(t)=t^{\varepsilon}O\left(W_{\Omega}(t,ct^{1-\varkappa})+V_{\partial\Omega,\omega,c}(t)\right). \tag{0.9}$$

Во многих случаях второй член в формуле (0.8) имеет меньший рост, чем $V_{\Omega}(t)$, и тогда формула (0.8) дает асимптотику $N_+(t)$ с оценкой остаточного члена.

Асимптотике собственных чисел для дифференциальных операторов в R^n, а также для расширений по Дирихле и Нейману*) посвящено большое число работ (см.обзор [1]). В статьях [2] при минимальных условиях на коэффициенты оператора найден главный член асимптотики. Для скалярных и матричных операторов во всем пространстве остаточный член оценивался в [3-7], для операторов на компактном многообразии-в [8], для общих операторов с постоянными коэффициентами в ограниченной области-в [9]. Для общих расширений, удовлетворяющих коэрцитивной оценке (0.5) в случае ограниченных областей Ω, асимптотика с оценкой остаточного члена была получена в работе [10] с помощью исследования резольвенты $\hat{P}$ в комплексной области и применения тауберовой теоремы. При этом существенно использовались факты, верные только в случае ограниченной области, например, то, что асимптотика определяется старшей однородной частью P. Результат работы [10] содержится в теореме 0.1, если положить $\omega=\varkappa<\frac{1}{2m}$, $\delta=0$.

В § 1 доказательство теоремы 0.1 сводится к аналогичным оценкам функции $N_+(t)$ для расширения по Фридрихсу оператора P. В § 2 исследуется асимптотика собственных чисел для расширения по Фридрихсу и более общего, чем в (0.4), класса операторов. Результаты, полученные в § 2, доказываются

---

*) См. также недавнюю заметку [16], где анонсируются результаты для расширения по Фридрихсу.

методом построения псевдодифференциального почти проектора $\mathcal{E}_t$ и являются новыми для рассматриваемой задачи. В § 3 приводятся некоторые примеры.

Основной результат работы - теорема 0.1 - был сформулирован в [11]. Обобщения на системы (в том числе неполуограниченные) будут рассмотрены в другой работе.

Введем часто употребляемые ниже обозначения:

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\ D^{\alpha}=\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{x_1}\right)^{\alpha_1}\dots\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

$$p^{(\alpha)}_{(\beta_1,\beta_2)}(x,y,\xi)=\partial^{\alpha}_{\xi}\,\partial^{\beta_1}_{x}\,\partial^{\beta_2}_{y}\,p(x,y,\xi),\ p^{(\alpha)}_{(\beta)}\equiv p^{(\alpha)}_{(\beta,0)},$$

$$\Lambda(x,y,\xi)=|\xi|+q(x)+q(y),\ \Lambda(x,\xi)\equiv\Lambda(x,x,\xi),$$

$$dist\,(x,C)=\inf_{z\in C}|x-z|$$

для любого множества $C\subset R^n$; $\theta(x)$ - финитная четная неотрицательная функция в R^n ; $\theta(x)=1$ при $|x|<1$, $\theta(x)=0$ при $|x|>2$; $\theta_h(x,y)=\theta((x-y)h^{-1}(q(x)+q(y))^{\delta})$ для $h>0$; координаты $\hat{z}$, окрестность $U_{x_0}(d)$, функция $q(x)$ будут всегда иметь смысл, указанный выше при определении класса $Lip_{\delta}(q(x))$.

§ 1. Сведение общего случая к случаю расширения по Фридрихсу

Будем говорить, что покрытие(вообще говоря, бесконечное) некоторой области C областями U_i $(i=1,2,\dots)$ конечнократно, если существует N такое, что в любой точке пересекаются не более N из областей U_i .

Лемма 1.1. *Существует продолжение $q_1(x)$ функции $q(x)$ в окрестность $\Omega(d_1)$ области Ω, где*

$$\Omega(d_1)=\bigcup_{y\in\Omega}\left\{x\in R^n;\ |x-y|<d_1q(y)^{-\delta}\right\},\tag{1.1}$$

причем с некоторой константой $\tilde{C}_1$ выполняется

$$|D^{\alpha}_{x_i}q_1(x)|\le\tilde{C}_1q_1(x)^{1+\delta|\alpha|}\ (1\le i\le n),\ x\in\Omega(d_1),|\alpha|\ge0.\tag{1.2}$$

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $x_0\in\bar{\Omega}$

$$\max_{U_{x_0}(d)}q(x)q(x_0)^{-1}<2^{8\tilde{C}d}.\tag{1.3}$$

Пусть $\mathrm{dist}_U(\hat z^{(1)}, \hat z^{(2)})$ - расстояние между точками $\hat z^{(1)} = (\hat z^{(1)'}, \hat z_n^{(1)})$ и $\hat z^{(2)} = (\hat z^{(2)'}, \hat z_n^{(2)})$ по множеству $U_{x_0}(d) \cap \mathcal{L}_{\hat z^{(1)}, \hat z^{(2)}}$, где $\mathcal{L}_{\hat z^{(1)}, \hat z^{(2)}}$ - двумерная плоскость, параллельная оси $\hat z_n$ и содержащая $\hat z^{(1)}$ и $\hat z^{(2)}$. Если $\ell_{\hat z^{(1)}, \hat z^{(2)}} = \{\hat z_n = \hat z_n(t), 0 \le t \le 1\}$ - геодезическая в смысле этого расстояния, то $\hat z_n(t)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0,1]$. Аппроксимируем $\hat z_n(t)$ в метрике $W_2^1[0,1]$ гладкими кривыми ℓ_n $(n=1,2,\dots)$, лежащими в $U_{x_0}(d)$. Пусть теперь $\hat z^{(1)} = x_0$, $\hat z^{(2)}$ - ближайшая к x_0 точка на $\Gamma_{x_0} = \{y \in U_{x_0}(d), q(y) = 2q(x_0)\}$. Тогда $q(y) \le q(\hat z^{(2)})$ при $y \in \ell_{x_0, \hat z^{(2)}}$ и, по теореме о конечных приращениях, для аппроксимирующих кривых ℓ_n имеем

$$q(x_0) = q(\hat z^{(2)}) - q(x_0) \le \max_{\ell_n} |\nabla q| |\ell_n| \le \tilde c \max_{\ell_n} q(y)^{1+\delta} |\ell_n| \le$$

$$\le 2\tilde c q(\hat z^{(2)})^{1+\delta} |x_0 - \hat z^{(2)}| \le 8\tilde c q(x_0)^{1+\delta} |x_0 - \hat z^{(2)}|,$$

поскольку длины $|\ell_n|$ стремятся к $\mathrm{dist}_U(x_0, \hat z^{(2)})$, а $\max\limits_{\ell_n} q(y) \le 2q(\hat z^{(2)})$ для $n > n_0$. Следовательно, $\mathrm{dist}(x_0, \Gamma_{x_0}) \ge (8\tilde c q(x_0)^\delta)^{-1}$, откуда легко следует (1.3).

Построим для любого μ множество M_μ точек $y_i \in \Omega$ $(i=1,2,\dots)$ такое, что

$$\sup_{x \in \Omega} \inf_{y_i \in M_\mu} |y_i - x| q(x)^\delta < \mu, \quad \inf_{y_i \in M_\mu} \min_{j \ne i} |y_i - y_j| q(y_i)^\delta \ge \nu \ge c_0 \mu \qquad (1.4)$$

с некоторым c_0. Множество M_μ строим следующим образом. При каждом натуральном k рассмотрим в Ω точки, у которых все координаты имеют вид $\ell 2^{-\delta k - N}$, где ℓ - целое число, N выбирается по μ в (1.4). Теперь выделим те точки, в которых $2^{k-1} \le q(\cdot) < 2^k$. Объединение по k этих точек образует M_μ. Из (1.3) легко следует второе неравенство (1.4) с $\nu = \min(2^{8\tilde c d\delta - 1 - N}, d)$. Доказательство первой оценки (1.4) также опирается на (1.3), условие $\Omega \in Lip_\delta(q(x))$ и простые геометрические рассмотрения; при этом $\mu = c_1 2^{-N}$ с некоторым c_1.

Теперь положим $\tilde\Omega = \bigcup_{y_i \in M_\mu} U_{y_i}(\eta)$, где числа η и μ, меньшие d, будут выбраны ниже. Покажем, что при $(\mu + d_1) 2^{8\tilde c d\delta} < \eta$ будет

$$\tilde\Omega \supset \Omega(d_1). \qquad (1.5)$$

Действительно, если $x \in \Omega(d_1)$, то существует $\zeta \in \Omega$ с $|x-\zeta| < d_1 q(\zeta)^{-\delta}$ и, по(1.4), существует $y_i \in M_\mu$ с $|y_i - \zeta| < \mu q(\zeta)^{-\delta}$. По (1.3), $q(\zeta) > q(y_i) 2^{-8\bar{c}d}$. Из неравенства треугольника имеем $x \in \tilde{\Omega}$. Из (1.4) и (1.3) также легко следует конечнократность покрытия $U_{y_i}(\eta)$, причем кратность не зависит от $\eta \le d$.

Если $\theta(x)$- функция, определенная во введении, то построим $\eta_i(x) = \theta(d^{-1}(x-y_i)q^{\delta}(y_i)), y_i \in M_\mu$ $(i=1,2,\dots)$. Если $x \in \tilde{\Omega}$, то $x \in U_{y_j}(\eta)$ для некоторого j и $\eta_j(x) = 1$. Следовательно, определено разбиение единицы

$$\psi_i(x) = \eta_i(x)\Big(\sum_j \eta_j^2(x)\Big)^{-1} \quad (i=1,2,\dots).$$

Положим

$$q_1(x) = \sum_i \psi_i(x) q(y_i),$$

где

$$y_i \in M_\mu, \quad x \in \tilde{\Omega}.$$

Тогда $|\nabla q_1(x)| \le c_2 q(y_i)^{1+\delta}$ для $x \in U_{y_i}(\eta)$ и, по формуле Лагранжа, $|q_1(x) - q(y_i)| \le c_2 \eta q(y_i)$. Выберем теперь $\eta = \min\left(\frac{d}{3}, (2c_2)^{-1}\right)$ и подберем μ и d_1 так, чтобы выполнялось (1.5). Тогда для $x \in \Omega(d_1)$, учитывая (1.3), получаем

$$|D^\alpha q_1(x)| \le d_\alpha q(y_i)^{1+\delta|\alpha|} \le d'_\alpha q_1(x)^{1+\delta|\alpha|},$$

где $x \in U_{y_i}(\eta)$.

При доказательстве леммы фактически установлено также следующее: если функция $q_1(x)$ удовлетворяет условию (0.1) на отрезке между x_1 и x_2, $|x_1 - x_2| \le a q_1^{\delta}(x_1)$ с достаточно малым a, то

$$1/2 \le q_1(x_1) q_1(x_2)^{-1} \le 2. \tag{1.6}$$

Ниже будет использовано вытекающее из (1.6)

Следствие. *Существует t_0 такое, что при $t > t_0$, любых положительных μ, ω и μ_2, если $x \in \Omega(\mu_1 t^{-\omega})$, $|x-y| \le \mu_2 t^{-\omega}(q_1(x) + q_1(y))^{-\delta}$, то*

$$y \in \Omega\left((\mu_1 + 2\mu_2) t^{-\omega}\right). \tag{1.7}$$

Лемма 1.2. *Для любого $\omega \ge 0$ и достаточно больших t существуют функции $\varphi_{1\omega}(x), \varphi_{2\omega}(x)$ такие, что $\varphi_{1\omega}^2(x) + \varphi_{2\omega}^2(x)\big|_\Omega = 1$, причем*

$$\operatorname{supp} \varphi_{1\omega} \subset \Omega,$$

$$|D^{\alpha} \varphi_{i\omega}(x)| < c_{\alpha} q_1(x)^{\delta|\alpha|} t^{\omega|\alpha|} \quad (i=1,2;\ |\alpha|=0,1,\dots;\ x\in R^n); \qquad (1.8)$$

и если
$$x \in \operatorname{supp} \varphi_{2\omega}, \qquad (1.9)$$

то

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{d}{2} q_1(x)^{-\delta} t^{-\omega}.$$

Лемма 1.3. *Пусть* Ω *- любая область такая, что в* $\Omega(d_1)$ *определена функция* $q_1(x)$ *с условием* (1.1). *Для любого* $\omega \geq 0$, $h < \frac{d_1}{3}$, $r < \frac{d_1}{2}$ *при достаточно малых* d_1 *и всех* $t \geq 1$ *существуют функции* $\psi_{ihr\omega}$ $(i=1,2,\dots)$ *со свойствами*

$$\sum_i \psi^2_{ihr\omega}(x)\Big|_{\Omega(r)} = 1, \quad |D^{\alpha}\psi_{ihr\omega}(x)| \leq c_{\alpha}(h) q_1(x)^{\delta|\alpha|} t^{\omega|\alpha|} \qquad (1.10)$$

$$(|\alpha|,\ i=1,2,\dots;\quad x \in \operatorname{supp}\psi_{ihr\omega});$$

если $x, y \in \operatorname{supp}\psi_{ihr\omega}$,

то

$$|x-y| < h t^{-\omega} (q_1(x) + q_1(y))^{-\delta}; \qquad (1.11)$$

кратность покрытия Ω *множествами* $\operatorname{supp}\psi_{ihr\omega}$ *конечна и не зависит от* t.

Доказательство леммы 1.3. Пусть $\{\theta_i(x)\}$ - функции, полученные сдвигом функции $\theta(x)$ на целочисленные векторы; обозначим

$$\nu_{ik}(x) = \theta_i\left(2^{1+8\tilde{c}r+k} h^{-1} t^{\omega} x\right), \quad \{\eta_i(x)\} =$$

$$= \bigcup_{j,k} \left\{ \nu_{jk};\ V_{jk} \overset{\text{опр}}{=} \operatorname{supp}\nu_{jk} \cap \Omega\left(r + \frac{d_1}{2}\right) \neq \emptyset,\ 2^{k-1} \leq \min_{V_{jk}} q_1(x) < 2^k \right\}.$$

В любой точке $x \in \Omega\left(r + \frac{d_1}{2}\right)$ при некотором k_0 верно $2^{k_0-1} \leq q_1(x) < 2^{k_0}$, и поэтому

$$\sum_i \eta_i^2(x) \geq \sum_i \nu^2_{ik_0}(x) \geq 1.$$

Положим

$$\xi_i = \eta_i \left(\sum_j \eta_j^2(x)\right)^{-1/2}$$

и

$$\{\psi_{ih\tau\omega}\} = \{\xi_{i_1}\ \operatorname{supp}\xi_i \cap \Omega(\tau) \neq \emptyset\}. \tag{1.12}$$

Покажем, что $\operatorname{supp}\psi_{ih\tau\omega} \subset \Omega\left(\tau + \frac{d_1}{2}\right) \subset \Omega(d_1)$. Действительно, если $x \in \operatorname{supp}\psi_{ih\tau\omega}$, то существует $y \in \Omega(\tau) \cap \operatorname{supp}\psi_{ih\tau\omega}$ такой, что

$$|x-y| \leq ht^{-\omega} 2^{-8\bar{\varepsilon}\tau\delta} q_1(y)^{-\delta}.$$

По определению $\Omega(\tau)$, существует точка $\zeta \in \Omega$ такая, что y содержится в шаре $B_\zeta(\tau)$. Тогда, по (1.3), $q_1(y) \geq 2^{-8\bar{\varepsilon}\tau\delta} q_1(\zeta)$, и, следовательно, $|x-\zeta| \leq (\tau + ht^{-\omega}) q_1(\zeta)^{-\delta}$, т.е. $x \in \Omega(d_1)$. Теперь из (1.6) следует, что для $x, y \in \operatorname{supp}\psi_{ih\tau\omega}$ верно

$$q_1(x) q_1(y)^{-1} \leq 2, \tag{1.13}$$

если d_1 достаточно мало. Следовательно, верно (1.11). Если теперь $x \in \operatorname{supp}\psi_{ih\tau\omega} \cap \operatorname{supp}\psi_{jh\tau\omega}$, то из (1.13) следует, что $\operatorname{supp}\psi_{ih\tau\omega} = \operatorname{supp}\nu_{iK_1}$, $\operatorname{supp}\psi_{jh\tau\omega} = \operatorname{supp}\nu_{jK_2}$ для некоторых K_1 и K_2 с $|K_1 - K_2| \leq 2$. Поскольку покрытие $\{\operatorname{supp}\theta_i;\ i=1,2,\dots\}$ конечнократно, то конечнократно и покрытие $\{\operatorname{supp}\psi_{ih\tau\omega}\}$. Теперь легко получить (1.10).

Доказательство леммы 1.2. Если

$$U_i = \operatorname{supp}\psi_{i\frac{d}{2}0\omega},$$

то достаточно положить

$$\chi_{2\omega} = \sum_{U_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset} \psi_{i\frac{d}{2}0\omega},\ \chi_{1\omega} = 1 - \chi_{2\omega},\ \varphi_{i\omega} = \chi_{i\omega}\left(\chi_{1\omega}^2 + \chi_{2\omega}^2\right)^{-1/2}\ (i=1,2).$$

Лемма 1.4. *При малых* d *существует ограниченный оператор продолжения* ℓ *такой, что при всех* τ, K

$$\ell : H_K(\Omega, q(x)) \longrightarrow H_K(\Omega(d), q_1(x)),$$

$$\|q_1^\tau \ell u\|_{K,q} \leq c_{K,\tau} \|q^\tau u\|_{K,q}. \tag{1.14}$$

Доказательство. Как известно (см., например, [12]), для любого замкнутого множества F существует "регуляризованное расстояние до F" - функция $\delta^*(x)$ такая, что $0 \leq c_1 \leq \delta^*(x)\ ,\operatorname{dist}(x,F)^{-1} \leq c_2$ и $|D^\alpha \delta^*(x)| \leq \leq d_\alpha \delta^*(x)^{1-|\alpha|}$, где c_1, c_2, d_2 не зависят от $F, x \bar{\in} F$. Возьмем в качестве F множества $U_{y_j}(d)$ и обозначим соответствующую функцию $\delta_j^*(x)$. Тогда в шаре $B_{y_j}\left(\frac{d}{3}\right)$ функция $\delta_j^*(x)$ эквивалентна расстоянию до $\partial\Omega\cap$ $\cap\, U_{y_j}(d)$ для тех j, для которых последнее множество непусто.

В координатах $\hat{z}$, указанных во введении, по методу Стейна [12] построим оператор продолжения ℓ_i для функций с носителем в $U_{y_j}(d)$:

$$(\ell_i v)(\hat{z}) = \begin{cases} v, \hat{z}\in\Omega, \\ \int\limits_1^\infty v(\hat{z}', \hat{z}_n + \lambda\delta_i^*(\hat{z}', \hat{z}_n))\chi(\lambda)d\lambda, \hat{z}\bar{\in}\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

где функция $\chi(\lambda)\in C^\infty[1,\infty)$, $\chi(\lambda)=O(\lambda^{-N})$ для всех N при $\lambda\to\infty$, $\int\limits_1^\infty\chi(\lambda)d\lambda=1$, $\int\limits_1^\infty\lambda^k\chi(\lambda)d\lambda=0$ $(k=1,2,\ldots)$. Положим

$$\ell v=\sum_i \psi_{i\frac{d}{3}00}\,\ell_i(\psi_{i\frac{d}{3}00}v). \tag{1.16}$$

Используя (1.2), лемму 1.3 и доказанные в [12] оценки $\|\ell_i v\|_{p,1}\leqslant M_p\|v\|_{p,1}$ с любым p и M, не зависящим от i, получаем (1.14).

Условимся в дальнейшем не указывать индекс ω в обозначении $\psi_{ih\tau\omega}$, если это ω совпадает с введенным в (0.7).

Лемма 1.5. *Если Ω удовлетворяет условию $Lip_\delta\,(q(x))$, то для малых h и $\delta\leqslant\alpha<1$ верна оценка*

$$\|q^{(m-s)\alpha}(x)u\|^2_{s,q}\leqslant h^{2(m-s)(1-\alpha)}\|u\|^2_{m,q}+C_{s\alpha}h^{-2(s+(m-s)\alpha)}\|u\|^2_0,$$
$$s=1,2,\ldots,m-1;\quad u\in H_m(\Omega, q(x)). \tag{1.17}$$

Замечание 1.1. При $\alpha=0$ и $q(x)\equiv 1$ эта оценка доказана, например, в [13].

Доказательство. Используя систему функций $\psi_{i\frac{d}{3}00}(x)$, построенную в лемме 1.3, находим, что достаточно установить оценку (1.17) на функциях $u(x)$ с носителем в $U_i=\operatorname{supp}\psi_{i\frac{d}{3}00}$, причем $q(x)$ заменено на $q(x_i)$. Сначала рассмотрим случай $m=2$, $s=1$ и докажем, что при всех α выполняется

$$q^{2\alpha}(x_i)\|v\|_1^2\leqslant h^{2-2\alpha}\|v\|_2^2+ch^{2\alpha-2}q(x_i)^{4\alpha}\|v\|_0^2,$$

где $\|\cdot\|_s$ - сумма L^2- норм производных s - порядка.

Из формулы Грина следует, что

$$q^{2\alpha}(x_i)\|v\|_1^2 < h^{2-2\alpha}\|v\|_2^2 + ch^{2\alpha-2}q(x_i)^{4\alpha}\|v\|_0^2 +$$

$$+ q^{2\alpha}(x_i)\left|\int\limits_{\partial\Omega\cap U_i} v\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\,d\ell\right|, \tag{1.18}$$

где $\vec{n}$ - нормаль к $\partial\Omega$. Интегрируя в U_i по окрестности границы радиуса $h_1^{1+\alpha}q(x_i)^{-\alpha}$ равенство $v(x)-v(y)=\int\frac{\partial v}{\partial z_n}dz_n$, где $y\in\partial\Omega$ и $x-y$ параллельно оси z_n , и применяя неравенство Шварца, находим

$$\int\limits_{\partial\Omega} v^2 d\ell \le h_1^{1-\alpha}q(x_i)^{-\alpha}\|v\|_1^2 + c_0 h_1^{-1+\alpha}q(x_i)^{\alpha}\|v\|_0^2 .$$

Применяя последнее неравенство к v с $h_1=\frac{h}{N}$ и к $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ $(1\le i\le n)$ с $h_1=hN$, а также неравенство Шварца, получаем для любого μ , что

$$q(x_i)^{2\alpha}\left|\int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\,d\ell\right| \le c_0 N^{1-\alpha}h^{1+\alpha}q(x_i)^{\alpha}\mu^{-1}\|v\|_2^2 +$$

$$+\left(\mu q(x_i)^{\alpha}h^{1-\alpha}N^{\alpha-1} + c_0(4\mu)^{-1}q(x_i)^{3\alpha}h^{\alpha-1}N^{\alpha-1}\right)\|v\|_1^2 +$$

$$+c_0\mu h^{\alpha-1}q(x_i)^{3\alpha}\|v\|_0^2 N^{1-\alpha}. \tag{1.19}$$

Положив $\mu=c_0 h^{\alpha-1}q(x_i)^{\alpha}$ в (1.29) и учтя (1.15) , находим при $N^{1-\alpha}=$ $=4c_0+1$, что

$$q^{2\alpha}(x_i)\|v\|_1^2 \le h^{2-2\alpha}\|v\|_2^2 + c_1 q(x_i)^{4\alpha}h^{2\alpha-2}\|v\|_0^2 . \tag{1.20}$$

Докажем теперь, что при всех s и малых h_1 верна оценка

$$q^{2\alpha}(x_i)\|v\|_s^2 \le h_1^{2-2\alpha}\|v\|_{s+1}^2 + c_s q(x_i)^{2\alpha(s+1)}h_1^{2s(\alpha-1)}\|v\|_0^2 . \tag{1.21}$$

При $s=1$ она совпадает с (1.20) . Пусть оценка (1.21) доказана для $s<k$. Тогда, подставляя в (1.20) вместо v все производные $D^\beta v$, $|\beta|\le k-1$, находим

$$q^{2\alpha}(x_i)\|v\|_k^2 \le h^{2-2\alpha}\|v\|_{k+1}^2 + c_0' q(x_i)^{4\alpha}h^{2\alpha-2}\|v\|_{k-1}^2 .$$

Теперь применим (1.21) с $s=k-1$, $h_1=(2c_0')^{\frac{1}{2\alpha-2}}$ для оценки последнего слагаемого. Получим (1.21) для $s=k$.

Обозначим $q^{2\alpha(s+1)}h^{2s(\alpha-1)}=L_s$. Докажем теперь, что при всех $s\geq 1$, $p\geq 1$ имеет место

$$q^{2p\alpha}(x_i)|||u|||_s^2\leq h^{2p(1-\alpha)}|||u|||_{s+p}^2+c_{sp}q^{2(p-1)\alpha}(x_i)L_s|u|_0^2. \tag{1.22}$$

Будем действовать индукцией по p. При $p=1$ и всех s оценка (1.22) совпадает с (1.21). Пусть (1.22) доказано при $p<\ell$. Тогда, по (1.21) и (1.22), для $p=\ell$ имеем

$$q^{2p\alpha}(x_i)|||u|||_s^2\leq q^{2(p-1)\alpha}h_1^{2-2\alpha}|||u|||_{s+1}^2+c_{s,1}q^{2(p-1)\alpha}L_s|u|_0^2\leq$$

$$\leq h_1^{2-2\alpha}\left(h^{2(1-\alpha)(p-2)}|||u|||_{s+p}^2+c_{s+1,p-1}q^{2(p-2)\alpha}(x_i)L_{s+1}|u|_0^2\right)+$$

$$+c_{s1}q^{2(p-1)\alpha}(x_i)L_s|u|_0^2\leq h^{2(1-\alpha)p}|||u|||_{s+p}^2+c_{s,p}q^{2(p-1)\alpha}(x_i)L_s\cdot|u|_0^2.$$

Теперь если $q(x_i)h\leq 1$, то из (1.22) и определения $|\cdot|_{s,q}$ следует

$$q^{2p\alpha}(x_i)|u|_{s,q}^2\leq h^{2p(1-\alpha)}|u|_{s+p,q}^2+\left(q^{2(p-1)\alpha}(x_i)L_s+q^{2p\alpha+2s}(x_i)\right)|u|_0^2\leq$$

$$\leq h^{2p(1-\alpha)}|u|_{s+p,q}^2+ch^{-2s-2p\alpha}|u|_0^2. \tag{1.23}$$

Если $q(x_i)h>1$, то

$$q(x_i)^{2p\alpha+2s}+q(x_i)^{2(p-1)\alpha}L_s\leq h^{2p(1-\alpha)}q(x_i)^{2(s+p)}$$

и снова верна оценка (1.23), которая совпадает с утверждением леммы.

Введем обозначение

$$D_t=\{u\in D_{\hat{P}}\,;\ |Pu|_0<t|u|_0\}. \tag{1.24}$$

По (0.5) и лемме 1.5, в которой надо положить $h=|t|^{-1/m}$, находим

$$|q(x)^{(m-s)\alpha}u|_{s,q}^2\leq ct^{\frac{2}{m}(s+(m-s)\alpha)}|u|_0^2,\ \delta\leq\alpha<1,\ u\in D_t. \tag{1.25}$$

Лемма 1.6. *Для любых* $\varepsilon>0, |t|\geq 1, 0<\omega<\frac{1-\delta}{m}$ *и* $u\in\mathcal{D}_{|t|}$ *имеем*

$$\|Pu\|_0^2\geq(1-\varepsilon)\sum_{i=1,2}\|P(\varphi_{i\omega}u)\|_0^2-C_0\varepsilon^{-1}t^{2-\frac{2}{m}(1-\delta)+2\omega}\|u\|_0^2, \tag{1.26}$$

где C_0 *зависит только от коэффициентов оператора* P.

Доказательство. Очевидно,

$$|Pu|_0^2=\sum_{i=1,2}|P(\varphi_{i\omega}u)|_0^2+\sum_{i=1,2}<[P,\varphi_{i\omega}]\varphi_{i\omega}u,Pu>+$$

$$+\sum_{i=1,2}<P(\varphi_{i\omega}u),[\varphi_{i\omega},P]u>=I_1+I_2+I_3.$$

Ввиду свойств $\varphi_{i\omega}$, (0.4) и определения нормы в $H_s(\Omega,q)$, имеем

$$|I_2|+|I_3|\leq\left(\|Pu\|_0+\sum_i\|P(\varphi_{i\omega}u)\|_0\right)\sum_{1\leq\mu\leq m}t^{\mu\omega}\|q(x)^{\delta\mu}u\|_{m-\mu,q}.$$

Применим (1.25) с $\alpha=\delta$; ввиду условий на x, δ и ω, получим

$$|I_2|+|I_3|\leq\frac{\varepsilon}{2}I_1+\frac{c}{\varepsilon}t^{2-2\left(\frac{1-\delta}{m}-\omega\right)}\|u\|_0^2+\frac{\varepsilon}{2}\|Pu\|_0^2.$$

Лемма 1.7. *Существует* $d>0$ *такое, что коэффициенты оператора* P *продолжаются в область* $\Omega(d)$ *с сохранением свойств* (0.4).

Доказательство. Продолжим коэффициенты $a_\alpha(x)$ по формулам (1.15), (1.16). Тогда $|\nabla(la_\alpha)(x)|\leq C_\alpha q_1(x)^{m-|\alpha|+\delta}$ $(|\alpha|\leq m, x\in\Omega(d))$.

Следовательно, если $x,y\in\operatorname{supp}\psi_i$, $y\in\Omega$, то $|la_\alpha(x)-a_\alpha(y)|\leq$ $\leq cq(y)^{m-|\alpha|+\delta}|x-y|$. Из условия (0.4) имеем

$$\Big|\sum_{|\alpha|\leq m}(la_\alpha)(x)\xi^\alpha\Big|\geq\Big|\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(y)\xi^\alpha\Big|-c\sum_{|\alpha|\leq m}q(y)^{m-|\alpha|+\delta}|x-y||\xi|^{|\alpha|}\geq\frac{1}{2}\left(|\xi|+q(y)\right)^m,$$

если $|x-y|<dq(y)^{-\delta}$ и d достаточно мало. Ввиду (1.10) в последней оценке можно заменить $q(y)$ на $\frac{1}{2}q(x)$.

Доказательство теоремы 0.1. Обозначим через $N(t)$ количество собственных чисел $\hat{P}$ на отрезке $[-t,t]$. Тогда $N(t)$ равно максимальной размерности линейных подпространств $\mathcal{D}_t$ вида (1.24). Оценим $N(t)$ сверху. Пусть $u\in\mathcal{D}_t$. Оператор умножения на $\varphi_{1\omega}$ переводит $\mathcal{D}_t$ в подпространство $H_1\subset C_0^\infty(\Omega)$. По теореме 2.1, в H_1 существует подпространство L_1, $\dim L_1\geq$ $\geq\dim H_1-B(t)$, где $B(t)$ - правая часть (0.9), и на функциях $v\in L_1$ верна оценка $\|Pv\|_0\geq t\|v_0\|$, или

$$|P(\varphi_{1\omega}u)|_0\geq t\|\varphi_{1\omega}u|_0. \tag{1.27}$$

Оценим теперь размерность пространства функций $v \in \mathcal{D}_t$ с носителями во множестве $supp\,\varphi_{2\omega}$. По лемме 1.4, существует оператор продолжения ℓ, отображающий $H_\kappa(\Omega, q(x))$ в $H_\kappa(\Omega(d), q_1(x))$ при всех κ. Строим оператор

$$\ell_1 = \sum_{supp\,\psi_{i\frac{d}{4}\frac{d}{4}} \cap supp\,\varphi_{2\omega} \cap \Omega \neq \emptyset} \psi_{i\frac{d}{4}\frac{d}{4}}\, \ell .$$

Тогда $\ell_1 v|_\Omega = v$ и, по лемме 1.4,

$$|\ell_1 v|_{m,q} \leq c \sum_{\kappa \leq m} |q(x)^{\delta(m-\kappa)} v|_{\kappa,q}\, t^{\omega(m-\kappa)} .$$

Применяя оценку (1.25), получаем

$$|\ell_1 v|_{m,q} \leq ct\, |v|_0 \leq ct\, |\ell_1 v|_0 . \tag{1.28}$$

Из условий (0.4) и(1.28) следует $\|P_1(\ell_1 v)\|_0 \leq ct\, |\ell_1 v|_0$, где P_1 - продолжение оператора P, построенное в лемме 1.7. Обозначим через p_1 символ оператора P_1. По теореме 2.1, для тех t, при которых $(supp\,\varphi_{2\omega})(t^{-\omega}) \subset \Omega(d)$, находим

$$dim\{v \in \mathcal{D}_t,\, supp\, v \subset supp\,\varphi_{2\omega}\} \leq dim\{\ell_1 v\} < N\{F\tau, supp\,\varphi_{2\omega}, ct\} \leq$$

$$\leq ct^{\varepsilon} mes\{x \in (supp\,\varphi_{2\omega})(ct^{-\omega}),\ \xi \in R^n;\ Re\,p_1(x,\xi) < ct\}.$$

Поскольку для $x,y \in (supp\,\varphi_{2\omega})(t^{-\omega})$ из условия $Re\,p_1(x,\xi) < ct$ следует $|Re\,p_1(y,\xi)| \leq c_1 t$, то, выбирая $y \in \Omega$ и учитывая (1.9), оценим последнее выражение через $V_{\partial\Omega,\omega,c}(t)$ с некоторым c.

Если при умножении на $\varphi_{2\omega}$ образ пространства $\mathcal{D}_t$ есть H_2, то, по (0.6), $H_2 \subset \mathcal{D}_{\hat{p}}$ и, по доказанному выше, максимальная размерность линейных подпространств H_2, состоящих из функций, принадлежащих $\mathcal{D}_t$, не превосходит $V_{\partial\Omega,\omega,c}(t)$. Следовательно, существует линейное подпространство $L_2 \subset H_2$, $dim\,L_2 \geq dim\,H_2 - V_{\partial\Omega,\omega,c}(t)$, и на L_2

$$|Pv|_0 \geq t\, |v|_0 . \tag{1.29}$$

Если бы $dim\,\mathcal{D}_\tau > V_{\partial\Omega,\omega,c}(t) + B(t)$ для $\tau = t - 2c_0 t^{1-\frac{1}{m}(1-\delta)+\omega}$, где c_0 указано в лемме 1.6, то существовала бы функция $0 \not\equiv w \in \mathcal{D}_\tau$ с оценками(1.27) для $u = w$ и (1.29) для $v = \varphi_{2\omega} w$. Тогда, по лемме 1.6,

$$|Pw|_0^2 \geq (1-\varepsilon)t^2 |w|_0^2 - c_0\varepsilon^{-1} t^{2-\frac{2}{m}(1-\delta)+2\omega} \|w\|_0^2 .$$

Взяв

$$\varepsilon = c_0^{1/2} t^{-\frac{1}{m}(1-\delta)+\omega},$$

при $|t|>1$ находим

$$\|Pw\|_0^2 \geq \left(t - 2c_0^{1/2} t^{1-\frac{1}{m}(1-\delta)+\omega}\right)^2 \|w\|_0^2,$$

что противоречит условию $w \in \mathcal{D}_t$. Следовательно, для некоторого c получаем

$$N_+(t) \leq N(t) \leq \max\dim \mathcal{D}_t \leq \left(V_\Omega + B + V_{\partial\Omega,\omega,c}\right)\left(t + ct^{1-\frac{1}{m}(1+\delta)+\omega}\right). \tag{1.30}$$

С другой стороны, из условия $\mathcal{D}_{\hat{P}} \supset C_0^\infty(\Omega)$ и теоремы 2.1 имеем

$$N_+(t) = \max\dim\{u \in \mathcal{D}_{\hat{P}},\, 0 \leq \langle Pu,u\rangle < t\|u\|_0^2\} \geq \max\dim\{u \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$0 \leq \langle Pu,u\rangle < t\|u\|_0^2\} = N_+(Fr,\Omega,t) \geq V_\Omega(t) - cB(t), \tag{1.31}$$

где максимум берется по размерности линейных подпространств, обладающих указанным свойством. Из сравнения (1.30), (1.31) и определения $B(t)$ находим $N_-(t) = N(t) - N_+(t) \leq cB(t)$ с некоторым c .

§ 2. Асимптотика $N_+(t)$ для расширения по Фридрихсу

Пусть Ω - произвольное открытое множество в R^n , функция $q_1(x)$ с условием (1.1) определена в $\Omega(3\mu)$ при некотором μ , коэффициенты оператора P определены в $\Omega(3\mu)$ и вместо условий (0.4) выполнены следующие более общие условия:

$$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)p^{-1}(x,\xi)| \leq c_{\alpha\beta}\, q_1(x)^{\delta|\beta|}\Lambda(x,\xi)^{-\rho|\alpha|}, \quad |p(x,\xi)| \leq c\Lambda(x,\xi)^m \tag{2.1}$$

при $|\alpha|,|\beta| = 0,1,\ldots;\ x \in \Omega(3\mu),\ \xi \in R^n;\ 0 \leq \delta < \rho;$

$$|p(x,\xi)| \to \infty \text{ при } |x|+|\xi| \to \infty, \quad x \in \Omega(3\mu),\ \xi \in R^n. \tag{2.1'}$$

Будем предполагать, что оператор P , определенный на функциях $C_0^\infty(\Omega)$ с компактным носителем в Ω , симметричен. Для определенности будем считать, что $\mathrm{Re}\, p(x,\xi) \to +\infty$ при $|x|+|\xi| \to \infty$. Из доказанной ниже теоремы 2.4 следует, что P полуограничен снизу.

Рассмотрим расширение по Фридрихсу $\hat{P}$ этого оператора. Это самосопряженный оператор, и из его построения и леммы Глазмана [15] следует формула

$$N_+(Fr,\Omega,t) = \max\dim \mathcal{D}_t;\ \mathcal{D}_t \subset C_0^\infty(\Omega),\ \langle Pu,u\rangle < t\langle u,u\rangle \tag{2.2}$$

для

$$u \in D_t ,$$

где $N_+(\mathcal{F}r, \Omega, t)$ - количество собственных чисел $\hat{P}$, меньших t; D_t - линейные подпространства $C_0^\infty(\Omega)$ с указанным свойством.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены указанные выше условия. Для любых* $\varkappa$ *и* ω, *удовлетворяющих условию*

$$0 < \varkappa \leq \omega, \quad \omega + \varkappa + \frac{\delta - \rho}{m} < 0, \tag{2.3}$$

верна оценка (0.8) *для функции* $N_+(Fr, \Omega, t)$, *при этом слагаемое* $V_{\partial\Omega,\omega,c}(t)$ *может быть заменено на*

$$V'_{\partial\Omega,\omega,c}(t) + c_N t^{-N} V_{\Omega(ct^{-\omega})}(t + ct^{1-\varkappa}),$$

где N *любое, а*

$$V'_{\partial\Omega,\omega,c}(t) = \operatorname{mes}\{y \in \Omega(c\mu t^{-\omega}) \setminus \Omega, \xi \in R^n; \operatorname{Re} p(x,\xi) < t + ct^{1-\varkappa}\}.$$

Следствие 1. *Если* $\Omega \subset Lip_\delta(q(x))$, *оператор* P *удовлетворяет условию* (0.4), *то, по леммам 1.1, 1.7 и (0.1), дополнительные условия теоремы 2.1 по сравнению с теоремой 0.1 снимаются.*

Следствие 2. *Для области* $\operatorname{supp}\varphi_{2\omega}$, *построенной в лемме 1.3 и использованной при доказательстве теоремы 0.1, и для оператора* P_1, *построенного в лемме 1.7, условия теоремы 2.1 выполнены с* $\mu = \frac{d}{6}$ *при больших* t.

Замечание 2.1. Если рассматривать более общие операторы с условием

$$|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)p^{-1}(x,\xi)| \leq c_{\alpha\beta}\Lambda(x,\xi)^{\delta|\beta| - \rho|\alpha|}$$

вместо условия (2.1), то теорема 2.1 верна при замене неравенств (2.3) на неравенства

$$0 < \varkappa \leq \omega, \quad \frac{\omega}{1+\delta} + \varkappa + \frac{\delta - \rho}{m} < 0.$$

В доказательстве теоремы 2.1 мы будем использовать некоторые классы двойных псевдодифференциальных операторов (п.д.о.), которые сейчас введем (см. также [4]).

Пусть символ $r(x,y,\xi)$ удовлетворяет условиям:

1) $$|\partial_\xi^\alpha \partial_{x,y}^\beta r(x,y,\xi)| \leq c_{\alpha\beta}(q_1(x) + q_1(y))^{\delta|\beta|}\Lambda(x,y,\xi)^{m - \rho|\alpha|},$$

$$|\alpha|, |\beta| = 0, 1, \ldots; \; x, \xi \in R^n;$$

2) существует a такое, что на носителе $r(x,y,\xi)$ имеет место

$$|x-y|\le a(q_1(x)+q_1(y))^{-\delta}.$$

Тогда скажем, что $r(x,y,\xi)$ принадлежит классу $DS^m_{\rho,\delta}(q)$. По символу $r\in DS^m_{\rho,\delta}(q)$ с $\delta<1$ построим п.д.о.

$$Ru(x)=Op(r)u(x)=(2\pi)^{-n}\int d\xi\int dy\, e^{i<x-y,\xi>}r(x,y,\xi)u(y),\, u\in C_0^\infty(R^n). \qquad (2.4)$$

На функции $u(x)\in D'(R^n)$ оператор R продолжается по формуле

$$<Ru,\varphi>=<u,{}^tR\varphi>,\quad \varphi\in C_0^\infty(R^n),$$

где символ оператора ${}^tR$ имеет вид $\sigma({}^tR)(x,y,\xi)=\overline{r(y,x,\xi)}\in DS^m_{\rho,\delta}(q)$.

Можно доказать теорему о композиции п.д.о. (см. [4], а также ниже теоремы 2.3, 2.3$'$) и теорему об ограниченности п.д.о., которую приведем в простейшей форме, используемой ниже.

Теорема 2.2 (см. [4]). *Если $p\in DS^{\ell}_{\rho,\delta}(q)$, $\delta<\rho$, то $Op(p)=P$ продолжается как ограниченный оператор из $H_\ell(q(x))$ в $L^2(R^n)$; при этом существует $N_0(\ell)$ такое, что*

$$\|P\|_{H_\ell(q)\to L^2}\le C\sup_{x,y,\xi\in R^n}\sum_{|\alpha|+|\beta|\le N_0(\ell)}|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,y,\xi)|\Lambda(x,y,\xi)^{\rho|\alpha|-\delta|\beta|-\ell}.$$

Ниже будут также использоваться некоторые подклассы $DS^m_{\rho,\delta}(q)$, зависящие от параметра t.

Выберем теперь число ρ_1 так, чтобы

$$\delta<\rho_1<\rho,\quad \omega+\varkappa+\frac{\rho_1-\rho}{m}\overset{\text{опр}}{=\!=}-\Delta<0. \qquad (2.3')$$

Для доказательства теоремы 2.1 строим приближенный спектральный проектор $E_t=Op(\hat e_t(x,y,\xi))$, где

$$\hat e_t(x,y,\xi)=e_t\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)\theta\left(2(x-y)\mu^{-1}(q_1(x)+q_1(y))^{\delta}t^{\omega}\right),$$

$$e_t(x,\xi)=\sum_i\psi^2_{i,\frac{\mu}{2},2\mu t^{-\omega}}(x,t)\ \chi_t(x,\xi),\ \chi_t(x,\xi)=\chi((Re\,p(x,\xi)-t)t^{\varkappa-1}), \qquad (2.5)$$

$$\chi(z)\in C^\infty(R^1),\ \chi|_{z<0}=1,\ \chi|_{z>1}=0,\ \chi|_{z>1/2}<1/2.$$

Лемма 2.1. *Для любых α, β и $\rho_1\in(0,\rho]$ верны оценки*

$$|e^{(\alpha)}_{t(\beta)}(x,\xi)|\le c_{\alpha\beta}t^{\omega|\beta|+\left(\varkappa-\frac{\rho-\rho_1}{m}\right)|\alpha|}q(x)^{\delta|\beta|}\Lambda(x,\xi)^{-\rho_1|\alpha|}; \qquad (2.6)$$

$$x,\xi\in R^n;\quad |\alpha|,|\beta|=0,1,\dots$$

Доказательство. Покажем, что при всех α,β выполняется

$$|\chi^{(\alpha)}_{t(\beta)}(x,\xi)|\le c_{\alpha\beta}t^{\varkappa(|\alpha|+|\beta|)}\Lambda(x,\xi)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

В самом деле,

$$|\chi^{(\alpha)}_{t(\beta)}(x,\xi)|\le c_{\alpha\beta}\sum_{|\mu|\le|\alpha|+|\beta|}|D^{\mu}\chi|\,t^{-\mu(1-\varkappa)}\sum_{\substack{\Sigma\alpha_i=\alpha\\ \Sigma\beta_i=\beta}}|(Re\,p-t)^{(\alpha_1)}_{(\beta_1)}|\dots$$

$$\dots|(Re\,p-t)^{(\alpha_\mu)}_{(\beta_\mu)}|\le c\sum_{|\mu|\le|\alpha|+|\beta|}t^{-\mu(1-\varkappa)}Re\,p(x,\xi)^{|\mu|}q(x)^{\delta|\beta|}\times$$

$$\times\Lambda(x,\xi)^{-\rho|\alpha|}\le ct^{\varkappa(|\alpha|+|\beta|)}q(x)^{\delta|\beta|}\Lambda(x,\xi)^{-\rho|\alpha|}.$$

Поэтому, учитывая условия $\varkappa\le\omega$ и лемму 1.3, получаем

$$|e^{(\alpha)}_{t(\beta)}(x,\xi)|\le c_{\alpha\beta}t^{\omega|\beta|+\varkappa|\alpha|}q(x)^{\delta|\beta|}\Lambda(x,\xi)^{-\rho|\alpha|}.$$

Если $|\alpha|=0$, то отсюда следует утверждение леммы. Если $|\alpha|>0$, $t>t_0$, то, по условию (0.4) и построению символа e_t, имеем $t/2\le Re\,p(x,\xi)\le$ $\le c\Lambda(x,\xi)^m$, и, следовательно, верна оценка (2.6).

Обозначим через $DS^{m,e}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)$ класс символов $p(x,y,\xi)\in$ $\in DS^{m}_{\rho_1,\delta}(q_1)$, удовлетворяющих оценкам

$$|\partial^{\alpha}_{\xi}\partial^{\beta}_{x,y}p(x,y,\xi)|\le c_{\alpha\beta}t^{e+\omega|\beta|+\left(\varkappa+\frac{\rho_1-\rho}{m}\right)|\alpha|}(q_1(x)+q_1(y))^{\delta|\beta|}\Lambda(x,y,\xi)^{m-\rho_1|\alpha|}, \qquad (2.7)$$

$$x,y,\xi\in R^n.$$

Через $DS^{m,\ell,\kappa}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)$ обозначим класс символов с оценкой (2.7) для $|\alpha|+|\beta|\le\kappa$; через $D\mathcal{L}^{m,\ell}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)$ и $D\mathcal{L}^{m,\ell,\kappa}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)$ - классы соответствующих п.д.о.

Теорема 2.3. *Если*

$$p_i\in DS^{m_i,\ell_i}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)\ (i=1,2),\quad P=Op(p_1)\cdot Op(p_2),\quad \delta<\rho_1,$$

выполнено условие (2.3), *то*

$$p=\sigma(P)\in DS^{m_1+m_2,\,\ell_1+\ell_2}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)$$

и для любых N

$$p(x,z,\eta)=\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}D_y^{\alpha}\left(p_1^{(\alpha)}(x,y,\eta)p_2(y,z,\eta)\right)\Big|_{y=x}+r_N(x,z,\eta), \qquad (2.8)$$

где для любого заданного K *символ*

$$r_N\in DS^{-K,-K,K}_{\rho_1,\delta}(q_1,t) \quad \text{при } N>N(K).$$

Замечание 2.2. Из утверждения теоремы 2.3 следует, что

$$r_N\in DS^{m_1+m_2-N(\rho_1-\delta),\,\ell_1+\ell_2-N\Delta}_{\rho_1,\delta}(q_1,t).$$

Доказательство. Легко видеть (см. также [4]), что верно разложение (2.8) с

$$r_N(x,z,\eta)=\frac{1}{N!}\int_0^1(1-\tau)^{N-1}d\tau\iint e^{i\langle x-y,\,\xi-\eta\rangle}\times\sum_{\substack{|\mu|=N\\ |\gamma_1|+|\gamma_2|=N}}\binom{\mu}{\gamma_1}\times$$

$$\times p^{(\mu)}_{1(0,\gamma_1)}\left(x,y,\eta+\tau(\xi-\eta)\right)p_{2(\gamma_2,0)}(y,z,\eta)\,dy\,d\xi. \qquad (2.9)$$

Очевидно, в условиях теоремы сумма в формуле (2.8) определяет символ из класса

$$DS^{m_1+m_2,\,\ell_1+\ell_2}_{\rho_1,\delta}(q_1,t);$$

поэтому достаточно доказать утверждение теоремы, относящееся к символу r_N.

Пусть $|\xi-\eta|>\frac{1}{2}\Lambda(x,y,\eta)$. Тогда, интегрируя по y в (2.9) ℓ раз по частям и пользуясь (1.7), находим при

$$\ell=[K(1+\rho_1)]+m_2+n+1,\quad N>m_1\rho^{-1},\quad |\alpha|+|\beta|\le K, \qquad \text{что}$$

$$|r^{(\alpha)}_{N(\beta)}(x,z,\eta)|<C\int_{|\xi-\eta|>\frac{1}{2}\Lambda(x,y,\eta)}|\xi-\eta|^{-\ell}q_1(x)^{\delta(\ell+|\beta|+N)+m_1+m_2-\rho_1N-\delta_0 n}\times$$

$$\times\Lambda(x,z,\eta)^{m_2}d\xi\, t^{\ell+\omega(N+|\beta|+\ell)+(\varkappa+\frac{\rho_1-\rho}{m})(N+|\alpha|)}\le C\Lambda(x,z,\eta)^{-K(1+\rho_1)}\times$$

$$\times\int_{|\xi-\eta|>\frac{1}{2}\Lambda(x,y,\eta)}|\xi-\eta|^{-n-1}d\xi\cdot q_1(x)^{\nu(K)-(\rho_1-\delta)N}t^{\mu(K)+(\varkappa+\frac{\rho_1-\rho}{m})|\alpha|-\Delta N} \qquad (2.10)$$

с некоторыми числами $\nu(\kappa)$ и $\mu(\kappa)$. Выбрав $N(\kappa)=\left[\max\left((\kappa+\mu(\kappa))\Delta^{-1},\right.\right.$ $\left.\left.(\kappa+\nu(\kappa))(\rho_1-\delta)^{-1}\right)\right]+1$, получим требуемую оценку

$$|r^{(\alpha)}_{N(\beta)}(x,z,\eta)|\leq ct^{-\kappa+(\varkappa+\frac{\rho_1-\rho}{m})|\alpha|}\Lambda(x,z,\eta)^{-\kappa-\rho_1|\alpha|} \tag{2.11}$$

при $|\alpha|+|\beta|\leq\kappa$, $N\geq N(\kappa)$.

Если $|\xi-\eta|\leq\frac{1}{2}\Lambda(x,y,\eta)$, то выражения $\Lambda(x,y,\eta+t(\xi-\eta))$, $\Lambda(x,y,\eta)$, $\Lambda(x,z,\eta)$ оцениваются друг через друга и

$$|r^{(\alpha)}_{N(\beta)}(x,z,\eta)|\leq C_{\alpha\beta}t^{\ell_1+\ell_2+(N+|\beta|)\omega+(N+|\alpha|)(\varkappa+\frac{\rho_1-\rho}{m})}\times$$

$$\times(q_1(x)+q_1(y))^{(N+|\beta|)\delta-n\delta}\Lambda(x,z,\eta)^{m_1+m_2-(N+|\alpha|)\rho_1+n\delta}. \tag{2.12}$$

Очевидно, при $N>N(\kappa)$ также получаем (2.11).

Теорема 2.3'. *В условиях теоремы 2.3 верно разложение*

$$p(x,z,\eta)=\sum_{|s|+|\rho|<N}\frac{1}{i^{|s|-|\rho|}\rho!s!}p^{(s)}_{1(0,\rho)}(x,z,\eta)p^{(\rho)}_{2(s,0)}(x,z,\eta)+r_N(x,z,\eta)+r'_N(x,z,\eta), \tag{2.8'}$$

где r_N указан в (2.9), *а символ*

$$r'_N\in\mathcal{D}S^{m_1+m_2-N(\rho_1-\delta),\,\ell_1+\ell_2-N\Delta}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)$$

и имеет вид

$$r'_N(x,z,\eta)=\sum_{\substack{|\gamma+q|<N\\|\rho+\nu|=N}}\int(1-\tau)^{N-1}d\tau\frac{1}{i^{|q+\gamma|-N}\rho!q!\gamma!\nu!}p^{(q+\gamma+\nu)}_{1(0,\gamma+\rho+\nu)}(x,z+\tau(x-z),\eta)p^{(\rho)}_{2(q,0)}(x,z,\eta), \tag{2.9'}$$

число Δ указано в (2.3').

Доказательство. В формуле (2.8) разложим производные символа p_1 по формуле Тейлора в точке (x,z,η) до порядка N. Проинтегрировав по частям по η в формуле для оператора P, получим остаточный член r'_N и сумму вида

$$\sum_{\rho,s,\gamma,\nu}\frac{1}{i^{|s|+|\gamma|-|\rho|-|\nu|}\rho!s!\gamma!\nu!}p^{(s+\gamma+\nu)}_{1(0,\rho+\gamma+\nu)}p^{(\rho)}_{2(s,0)}. \tag{2.13}$$

Зафиксируем ρ, s и рассмотрим все слагаемые в (2.13) с одинаковым значением $\gamma+\nu$. Как легко видеть, при $|\gamma+\nu|>0$ сумма этих слагаемых равна нулю, и мы приходим к формуле (2.8'). Оценка производных r'_N вида (2.9') очевидна.

Для любого открытого множества $\mathcal{C}\subset\Omega(3\mu)$ и любого ν обозначим

$$C^{-}_{(\nu)} = C \setminus \bigcup_{y\in\partial C} \{x;\, |x-y| \le \nu t^{-\omega} q_1(y)^{-\delta}\}. \tag{2.14}$$

Ниже будут использованы следующие свойства: при $\nu_1 - 2\nu_2 > 0$ и $t > t_0$

$$C^{-}_{(\nu_1)}(\nu_2 t^{-\omega}) \subset C^{-}_{(\nu_1-2\nu_2)}, \tag{2.15}$$

$$\left(C(\nu_1 t^{-\omega})\right)^{-}_{(\nu_2)} \supset C(\nu_1 - 2\nu_2). \tag{2.15'}$$

Эти свойства легко вытекают из определения (0.1) ,(2.14) и неравенств (1.7).

Для любого открытого множества C и функции $f(x,y,\xi)$, определенной при $x,y \in C$, $\xi \in R^n$, введем класс $DS_{\rho_1,\delta}(f, C)$ символов $p_t(x,y,\xi)$, которые принадлежат

$$DS^{m_1,\ell_1}_{\rho,\delta}(q_1, t)$$

с некоторыми m_1, ℓ_1 и для которых верны неравенства

$$\left|\partial^{\alpha}_{\xi}\partial^{\beta}_{x,y} p_t(x,y,\xi)\right|_{y=x} f^{-1}(x,\xi)\right| \le C_{\alpha\beta}\, q(x)^{\delta|\beta|} \Lambda(x,\xi)^{-\rho_1|\alpha|} t^{\omega|\beta| + \left(\varkappa + \frac{\rho_1-\rho}{m}\right)|\alpha|} \tag{2.16}$$

при $|\alpha|, |\beta| = 0,1,\ldots;\ x \in C,\ \xi \in R^n$.

Обозначим через $D\mathcal{L}_{\rho_1,\delta}(f, C)$ класс соответствующих п.д.о.

Теорема 2.4. *Пусть символ п.д.о. H имеет вид*

$$h_t\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\Theta_{\eta t^{-\omega}}(x,y) \in DS_{\rho_1\delta}(h_t, C)$$

для некоторых η и C, $\delta < \rho_1$; символ $h_t(x,\xi)$ вещественный и положительный при $x \in C^{\eta}$, $\xi \in R^n$. Тогда для любых натуральных M, K и достаточно малого положительного ν существует п.д.о.

$$B_{\nu,M,K} \in D\mathcal{L}^{\frac{m_1}{2},\frac{\ell_1}{2}}_{\rho_1,\delta}\left(h_t^{1/2}, C^{-}_{(M\nu)}\right)$$

такой, что

$$H^{t} - B_{\nu,M,K} B_{\nu,M,K} = T_{\nu,M,K} \in D\mathcal{L}_{\rho_1,\delta}\left(\max\left(h_t \Lambda^{-M(\rho_1-\delta)} t^{-M\Delta}, t^{-K}\right), C^{-}_{(M\nu)}\right).$$

Доказательство. Будем строить символ $b_{\nu,M,K}$ в виде

$$b_{\nu,M,\kappa} = \sum_{1\le i\le M} b_i ,$$

где

$$b_i \in DS_{\rho_1,\delta}\left(h_t^{1/2}\Lambda^{-i(\rho_1-\delta)}t^{-i\Delta}, C^-_{(i\nu)}\right)$$

и на носителе $b_i(x,y,\xi)$ выполняется неравенство $|x-y|\le\frac{\nu}{2}t^{-\omega}(q_1(x)+q_1(y))^{-\delta}$. Обозначим $\hat\psi_{i\nu\mu}$ $(i=1,2,\dots)$ систему функций $\psi_{i\nu_0}(x)$, построенную в лемме 1.3 для $\Omega = C^-_{(\mu)}$.

Определим символ

$$b_1(x,y,\xi) = h_t^{1/2}\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)\sum_i \hat\psi^2_{i\frac{\nu}{4}\frac{\nu}{4}}(x)\,\theta_{\frac{\nu}{4}t^{-\omega}}(x,y).$$

Так как, по (1.7), (2.15), $\frac{x+y}{2}\in C$ на носителе $b_1(x,y,\xi)$, а также, учитывая лемму 1.3 и условие теоремы, получим, что

$$b_1 \in DS^{m_1,l_1}_{\rho_1,\delta}(q_1,t).$$

По теореме 2.3′, имеем $\sigma({}^tR_1R_1)(x,z,\eta) = b_1^2(x,z,\eta) + g_1(x,z,\eta) + r(x,z,\eta)$, где r есть остаточный член $r_N + r'_N$ в (2.8). Если N в теореме 2.3′ достаточно велико, то $t^\kappa r \in DS^{0,0}_{\rho_1,\delta}(q_1,t) \subset DS_{\rho_2,\delta}(1, C^-_{(\nu)})$. Из вида g_1 следует, что $g_1 \in DS_{\rho_1,\delta}(h_t\Lambda^{\delta-\rho_1}t^{-\Delta}, C^-_{(\nu)})$. Теперь при $x,z\in C^-_{(\nu)}$ имеем

$$\sigma(H - {}^tB_{\nu,1,\kappa}B_{\nu,1,\kappa})(x,z,\eta) = (g_1 + r)(x,z,\eta) + h_t\left(\frac{x+z}{2},\eta\right)\times$$

$$\times\left(\theta^2_{\frac{\nu}{2}t^{-\omega}} - \theta_{\nu t^{-\omega}}\right)(x,z).$$

Интегрируя по частям по η, легко показать, что оператор, отвечающий последнему слагаемому, принадлежит $D\mathcal{L}_{\rho_1,\delta}(t^{-\kappa}, C^-_{(\nu)})$. Теорема доказана при $M=1$.

Предположим, что уже построены символы b_i для $i<M$, $M\ge 2$. Тогда если

$$B_M \overset{\text{опр}}{=} O_p(b_M) \in D\mathcal{L}_{\rho_1,\delta}\left(h_t^{1/2}\Lambda^{-(M-1)(\rho_1-\delta)}t^{-(M-1)\Delta}, C^-_{(M\nu)}\right),$$

то при $i,j\le M$ имеем $B_iB_j = G_{ij} + R_{ij}$, где

$$G_{ij} \in D\mathcal{L}_{\rho_1,\delta}\left(h_t\Lambda^{-(i+j-2)(\rho_1-\delta)}t^{-(i+j-2)\Delta}, C^-_{((i+j)\nu)}\right),$$

$$t^{\kappa} R_{ij} \in \mathcal{DL}^{0,0}_{\rho_1,\delta}(q_1, t).$$

Действительно, применив теорему 2.3$'$ и выбрав $R_{ij} = Op(r_N + r'_N)$ с большим N, утверждение относительно G_{ij} получим из явного вида символа в (2.8$'$). Тогда для нахождения B_M получаем соотношение

$$\overset{t}{B}_M B_{\nu,M-1,\kappa} + \overset{t}{B}_{\nu,M-1,\kappa} B_M - T_{\nu,M-1,\kappa} \in \mathcal{DL}_{\rho_1,\delta}\left(\max(h_t \Lambda^{-M(\rho_1-\delta)} t^{-M\Delta}, t^{-\kappa}), \mathcal{C}^-_{(M\nu)}\right), \tag{2.17}$$

причем $T_{\nu,M-1,\kappa} \in \mathcal{DL}_{\rho_1,\delta}\left(h_t \Lambda^{-(M-1)(\rho_1-\delta)} t^{-(M-1)\Delta}, \mathcal{C}^-_{((M-1)\nu)}\right)$.

Из (2.15) следует, что для $x, y \in \mathcal{C}^-_{(M\nu)}$, $(x,y) \in supp\, \theta_{\frac{\nu}{2}t^{-\omega}}$ отрезок между x и y принадлежит $\mathcal{C}^-_{((M-1)\nu)}$. Интегрированием по частям легко получить, что

$$T_{\nu,M-1,\kappa} = Op\left(t_{\nu,M-1,\kappa}(x,y,\xi) \times \theta_{\frac{\nu}{2}t^{-\omega}}(x,y)\right) + T',$$

где $T' \in \mathcal{DL}_{\rho_1,\delta}(t^{-\kappa}, \mathcal{C}^-_{(M\nu)})$. Разлагая символ $t_{\nu,M-1,\kappa}(x,y,\xi)$ в ряд по $x-y$ в точке $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \xi\right)$, получим

$$T_{\nu,M-1,\kappa} = Op\left(\hat{t}_{\nu,M-1,\kappa}\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\theta_{\frac{\nu}{4}t^{-\omega}}(x,y)\right) + T'',\ T'' \in \mathcal{DL}_{\rho_1,\delta}(t^{-\kappa}, \mathcal{C}^-_{(M\nu)}).$$

Тогда

$$Op\left(\Im m\, \hat{t}_{\nu,M-1,\kappa}\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\theta_{\frac{\nu}{4}t^{-\omega}}(x,y)\right) \in \mathcal{DL}_{\rho_1,\delta}(t^{-\kappa}, \mathcal{C}^-_{(M\nu)}), \tag{2.18}$$

поскольку из условия теоремы следует, что $T_{\nu,M-1,\kappa}$ - симметричный оператор. Теперь положим

$$b_M(x,\xi) = \frac{1}{2} Re\, \hat{t}_{\nu,M-1,\kappa}(x,\xi) h_t^{-\frac{1}{2}}(x,\xi) \sum_i \hat{\psi}_{i,\frac{\nu}{4},M\nu}(x),$$

$$b_M(x,y,\xi) = b_M\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)\theta_{\frac{\nu}{4}t^{-\omega}}(x,y).$$

По лемме 2.1, свойствам (2.15), (1.7), символ

$$b_M(x,y,\xi)\in DS_{\rho_1,\delta}\left(h_t^{1/2}\cdot\Lambda^{-(M-1)(\rho_1-\delta)}t^{-(M-1)\Delta},\ C^-_{(M\nu)}\right),$$

и, по теореме 2.8, учитывая (2.18), получим (2.17).

Лемма 2.2. *Для любого* ε *существует* t_0 *такое, что при* $t>t_0$

$$-\varepsilon\|u\|_0^2\leqslant\langle \mathcal{E}_t u,u\rangle\leqslant(1+\varepsilon)\|u\|_0^2.$$

Доказательство. Выберем $\omega<\omega_1$, $\varkappa<\varkappa_1$ так, что $\omega_1\leqslant\varkappa_1$, $\omega_1+\varkappa_1-\frac{\rho-\rho_1}{m}<0$. Тогда, определив для этих ω_1 и $\varkappa_1$ классы $DS^{m,\ell}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)$, получим, что в (2.5) $c_{\alpha\beta}=o(1)$ при $|\alpha|+|\beta|>0$ и $t\to\infty$. Оператор $Q_t=\mathcal{E}_t+\varepsilon I$ при фиксированном $\varepsilon>0$ удовлетворяет условиям (2.13) с ω и $\varkappa$, замененными на ω_1 и $\varkappa_1$, и $C_{\alpha\beta}=o(1)$ при $t\to\infty$, $f(x,\xi)=\sigma(Q_t)(x,x,\xi)$. Тогда легко показать, что для оператора $T_{\nu,M,K}$, определенного в теореме 2.4, числа $C_{\alpha\beta}=o(1)$ при $|\alpha|,|\beta|\geqslant 0$, $t\to\infty$. По теореме 2.1,

$$\langle \mathcal{E}_t u,u\rangle\geqslant-\langle(\varepsilon+T_{\nu,M,K})u,u\rangle\geqslant-(\varepsilon+o(1))\|u\|_0^2.$$

Построим п.д.о. $\mathcal{E}_{1t}=\mathcal{E}_t^2(3-2\mathcal{E}_t)$. Замыкания в $L^2(R^n)$ операторов $\mathcal{E}_t$ и $\mathcal{E}_{1t}$ являются самосопряженными вполне непрерывными операторами. Обозначим через $\nu_i(t)$ $(\nu_{1i}(t))$, $i=1,2,\dots$, собственные числа оператора $\mathcal{E}_t$ (соответственно $\mathcal{E}_{1t}$), занумерованные в любом порядке. Тогда

$$\begin{aligned}&\text{если } \nu_{1i}(t)>1, \text{ то } \nu_i(t)<-\tfrac12;\\ &\text{если } \nu_{1i}(t)<0, \text{ то } \nu_i(t)>\tfrac32.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Оператор $\mathcal{E}_t\in D\mathcal{L}^{0,0}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)$, поэтому, применив лемму 2.2, получим $-1/2<\nu_i(t)<3/2$ при $t>t_0$, и, следовательно,

$$0\leqslant\nu_{1i}(t)\leqslant1,\quad t\geqslant t_0.\tag{2.20}$$

Отметим простые свойства символа п.д.о. $\mathcal{E}_{1t}$, которые можно получить на основе теоремы 2.3, (1.7) и построения символа e_t. Символ п.д.о. $\mathcal{E}^K_{1t}$ при натуральных K имеет вид

$$\sigma(\mathcal{E}^K_{1t})(x,z,\xi)\overset{\text{опр}}{=}e_{1tK}(x,z,\xi)=\left(\hat e_t^2(3-2\hat e_t)\right)^K(x,z,\xi)+\hat f_{tKN}(x,z,\xi)+r_{tKN}(x,z,\xi),\tag{2.21}$$

где

$$\hat f_{tKN}\in DS^{-(\rho_1-\delta),-\Delta}_{\rho_1,\delta}(q_1,t),\ \operatorname{supp}\hat f_{tKN}(x,x,\xi)\subset\{(x,\xi);|Re\,p(x,\xi)-t|<c_Kt^{1-\varkappa},x\in\Omega(3\mu t^{-\omega})\},\tag{2.22}$$

$$r_{tKN}\in DS^{-N,-N,N}_{\rho_1,\delta}(q_1,t),\ \operatorname{supp}r_{tKN}(x,x,\xi)\in\{(x,\xi);|p(x,\xi)|\leqslant t+ct^{1-\varkappa},x\in\Omega((3+2K)\mu t^{-\omega})\}.$$

Последняя оценка носителя r_{tkN} следует из формул (2.9), (2.9), условий (2.1) и $\varkappa \leqslant \omega$.

Обозначим через $\tilde{N}_\varepsilon(t)$ количество собственных чисел $\nu_{1i}(t)$ на отрезке $(t^{-\varepsilon}, 1)$ и оценим $\tilde{N}_\varepsilon(t)$.

Лемма 2.3. *При* $\varepsilon>0$, $t\to\infty$ *и любых* N *справедливо*

$$\tilde{N}_\varepsilon(t)=V_\Omega(t)+O(t^\varepsilon H(t)) \quad , \text{ где } H(t)=W_\Omega(t,ct^{1-\varkappa})+$$

$$+V'_{\partial\Omega,\omega,c}(t)+c_N t^{-N} V_{\Omega(ct^{-\omega})}(t+ct^{1-\varkappa}).$$

Доказательство. При натуральных k операторы $\mathcal{E}_{1t}^k$ ядерные, поэтому имеет место формула следа

$$\sum_i \nu_{1i}^k(t)=(2\pi)^{-n}\iint \sigma(\mathcal{E}_{1t}^k)(x,x,\xi)\,dx\,d\xi. \tag{2.23}$$

По формуле (2.22), имеем

$$\sigma(\mathcal{E}_{1t}^k)(x,x,\xi)=g_{tkN}(x,x,\xi)+r_{tkN}(x,x,\xi),$$

где $$|g_{tkN}(x,x,\xi)|\leqslant d_k,$$

$$g_{tkN}(x,x,\xi)=\begin{cases}\text{если } \operatorname{Re}p(x,\xi)<t-c_k t^{1-\varkappa},\ x\in\Omega;\\ \\ \text{если } \operatorname{Re}p(x,\xi)>t+c_k t^{1-\varkappa} \ \text{ или } \ x\in\Omega((3+2k)\mu t^{-\omega}).\end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_i \nu_{1i}^k(t)=V(t)+O(H(t)). \tag{2.24}$$

Теперь оценим $\tilde{N}_\varepsilon(t)$ сверху. По (2.17), (2.20), имеем

$$\tilde{N}_\varepsilon(t)=\sum_{|\nu_{1i}(t)-1|\leqslant 1-t^{-\varepsilon}}\nu_{1i}(t)+\sum_{|\nu_{1i}(t)-1|\leqslant 1-t^{-\varepsilon}}(1-\nu_{1i}(t))\leqslant\sum_i\nu_{1i}(t)+$$

$$+t^\varepsilon\sum_{|\nu_{1i}(t)-1|\leqslant 1-t^{-\varepsilon}}\nu_{1i}(t)(1-\nu_{1i}(t))\leqslant\sum_i\nu_{1i}(t)+t^\varepsilon\sum_i\nu_{1i}(t)(1-\nu_{1i}(t))\leqslant$$

$$\leqslant V(t)+O(t^\varepsilon H(t)).$$

Аналогично оценивается функция $\tilde{N}_\varepsilon(t)$ снизу:

$$\tilde{N}_\varepsilon(t) = \sum_{|\nu_{1i}(t)-1|\leq 1-t^{-\varepsilon}} \nu_{1i}(t) + \sum_{|\nu_{1i}(t)-1|\leq 1-t^{-\varepsilon}} (1-\nu_{1i}(t)) \geq \sum_i \nu_{1i}(t) - \sum_{\nu_{1i}(t)<t^{-\varepsilon}} \nu_{1i}(t) \geq$$

$$\geq \sum_i \nu_{1i}(t) - 2\sum_{\nu_{1i}<t^{-\varepsilon}} \nu_{1i}(t)(1-\nu_{1i}(t)) \geq V(t) - O(t^\varepsilon H(t)).$$

Оператор P можно представить как двойной п.д.о. с символом

$$p_w(x,y,\xi) \overset{\text{опр}}{=} \Big(p + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \frac{i^\alpha}{\alpha!\,2^\alpha} p^{(\alpha)}_{(\alpha)}\Big)\Big(\frac{x+y}{2},\xi\Big)\theta_{\mu t^{-\omega}}(x,y). \quad (2.25)$$

Обозначим через $\|Op(\ )\|$ норму оператора $Op(\ )$ как оператора из $L^2(R^n)$ в $L^2(R^n)$.

Лемма 2.4. *Если*

$$f_t = \sigma(F_t) \in DS^{0,0}_{\rho_1,\delta}(q_1,t),$$

то при $N\geq 1$ имеет место формула

$$\sigma\big(F_t(P-t)F_t\big) = \sum_{\Sigma\mu_i=\Sigma\nu_i<N} c_{\mu_1\ldots\nu_4} f^{(\mu_1)}_{(0,\nu_1)} f^{(\mu_2)}_{(\nu_2,0)} (p_w-t)^{(\mu_3)}_{(\nu_3,\nu_4)} + r_N, \quad (2.26)$$

где $c_{0\ldots0}=1$ и $\|O_p(r_N)\|<C$ при $t\geq 1$ и достаточно больших N.

Доказательство. Ввиду условия (2.1) и полиномиальности по ξ, символ p_w, введенный в (2.25), принадлежит классу

$$DS^{m,\rho-\rho_1-m\varkappa}_{\rho_1,\delta}(q_1,t).$$

Применим теорему 2.3′ к операторам F_t и P. Обозначим через $\sigma_N(p_1\circ p_2)$ первый член в формуле (2.8′). Тогда, выбрав K в теореме 2.3 достаточно большим, получим $\sigma(F_t\cdot P) = \sigma_N(f_t\circ p_w) + \rho_N$, где

$$\rho_N \in DS^{0,0,N_0}_{\rho_1,\delta}(q_1,t),$$

число N_0 указано в теореме 2.2. Символ $\sigma_N(f_t\circ p_w)$ также принадлежит классу

$$DS^{m,\rho-\rho_1-m\varkappa}_{\rho_1,\delta}(q_1,t).$$

По теореме 2.3$'$, находим

$$\sigma(F_t P\cdot F_t)=\sigma_N(\sigma_N(f_t\circ p_w)\circ f_t)+\rho_N'+\sigma(Op(\rho_N)\cdot F_t),$$

где $\rho_N'\in DS^{a0,N_0}_{\rho_1,\delta}(q_1,t)$, если в теореме 2.3 $\kappa=N_0$. По теореме 2.2, при всех $t\geq 1$ верно

$$\|Op(\rho_N')+Op(\rho_N)\cdot F_t\|\leq\|Op(\rho_N')\|+\|Op(\rho_N)\|\|F_t\|\leq c.$$

Найдем теперь по теореме 2.3 символ оператора tF_t^2. Выбрав $N\Delta>1$, получим

$$\sigma(tF_t^2)=t\sigma_N(f_t\circ f_t)+\rho_N'' \quad\text{и}\quad \|Op(\rho_N'')\|<c \quad\text{при}\quad t\geq 1.$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_j(x)=1-\sum_i\psi^2_{i,\frac{\mu}{10}t^{-\omega},\mu(1+\frac{j-1}{5})t^{-\omega}}(x)\quad(j=1,2,3),$$

где функции $\psi_{i\ldots}$ построены в лемме 1.3. Тогда из леммы 1.3 и свойства (1.7) легко следуют такие свойства $\varphi_j(x)$ $(j=1,2,3)$: если $x\in\operatorname{supp}\varphi_2$, $(x,y)\in\operatorname{supp}\theta_{\frac{\mu}{10}t^{-\omega}}(x,y)$, то

$$\varphi_1(y)=1; \tag{2.27}$$

$$\operatorname{supp}(1-\varphi_j(x))\subset\Omega(2\mu t^{-\omega})\quad(j=2,3),\quad \varphi_3\varphi_2=\varphi_3; \tag{2.28}$$

если $x\in\operatorname{supp}\varphi_1$, $y\in\Omega(\tau)$, то

$$|x-y|\geq(\mu-4\tau)(q_1(x)+q_1(y))^{-\delta}t^{-\omega}. \tag{2.29}$$

Лемма 2.5. *Существуют числа* c, t_0, l *такие, что при* $t>t_0$ *для* $u\in\bigcap_s H_s(q)$ *верна оценка*

$$<(I-\mathcal{E}_{\tau t})(P-t)(I-\mathcal{E}_{\tau t})u,u>\geq -ct^{1-\varkappa}\|u\|_0^2-ct^l\|\varphi_1 u\|^2_{m,q}.$$

Доказательство. Обозначим $H=(I-\mathcal{E}_{1t})(P-t)(I-\mathcal{E}_{1t})$. По (1.8), если $(x,y,\xi)\in \operatorname{supp} e_{1t_1}(x,y,\xi)$, то

$$|x-y|\le\frac{\mu}{5}(q_1(x)+q_1(y))^{-\delta}t^{-\omega}.$$

Тогда если $y\in\operatorname{supp}\varphi_2$, $x\in\operatorname{supp}H\varphi_2$, то $|x-y|\le\frac{\mu}{6}(q_1(x)+q_1(y))^{-\delta}t^{-\omega}$. Применяя (2.27), получим

$$\langle Hu,u\rangle=I+J,\ I=\langle H(1-\varphi_2)u,(1-\varphi_2)u\rangle,\ J=\langle(\varphi_2H+H\varphi_2-\varphi_2H\varphi_2)\varphi_1u,\varphi_2u\rangle. \quad (2.30)$$

Заметим, что теоремы 2.3 и 2.3′ о композиции без изменений переносятся на п.д.о., определенные на $\bigcap_s H_s(q)$.

Оценим сначала J. Применяя лемму 2.1 и теорему 2.2, получаем

$$J\le c\|\varphi_1u\|_0\,t\left(\|(1+\varphi_2)\varphi_1u\|^2_{m,q}+\|(1+\varphi_2)\mathcal{E}_{1t}\varphi_1u\|^2_{m,q}\right)\le ct^{\eta}\|\varphi_1u\|^2_{m,q}$$

с некоторым η.

Теперь рассмотрим I. Символ п.д.о. H найдем по лемме 2.4, где $F_t=I-\mathcal{E}_{1t}$. Тогда при достаточно большом N верно

$$\sigma(H)=\sum_{s<N}q_s+r_N,$$

где

$$q_0(x,z,\xi)=(\hat p-t)(1-e_{1t_1})^2(x,z,\xi),$$

q_s при $1\le s<N$ есть сумма слагаемых в (2.26) с $\sum\mu_i-\sum\nu_i=s$, символ r_N здесь и ниже будет обозначать символы операторов с нормой в L^2, ограниченной равномерно по $t\ge1$. Заменим в q_0 символ p_w на

$$\hat p=p\left(\frac{x+z}{2},\xi\right)\theta_{\mu t^{-\omega}}(x,z);$$

при этом возникнут дополнительные слагаемые, имеющие тот же вид, что и q_s при $s\ge1$; включим эти слагаемые в q_s. Для символа e_{1t_1} используем разложение (2.21). Тогда при достаточно большом N получаем

$$q_0(x,z,\xi)=(\hat p-t)(1-\hat e_t^2(3-2\hat e_t)+\hat f_{t_1N})^2(x,z,\xi)+r_N(x,z,\xi). \quad (2.31)$$

Заменим $\hat f_{t_1N}(x,z,\xi)$ разложением этой функции по формуле Тейлора в точке $\frac{x+z}{2},\frac{x+z}{2},\xi$. Учтем, что при $|x-z|\le\frac{\mu}{2}t^{-\omega}(q_1(x)+q_1(z))^{-\delta}$ функции θ, входящие в $\hat p$ и $\hat e_t$, равны 1. Интегрированием по частям по ξ легко показать, что

$$\sigma(H)(x,z,\xi) = (p-t)\left(1-e_t^2(3-2e_t)+f_{t1N}\right)\left(\frac{x+z}{2},\xi\right)\theta_{\frac{\mu}{4}t^{-\omega}}(x,y) +$$

$$+\sum_{1\le S\le N_0} q_S(x,z,\xi) + r_N(x,z,\xi), \tag{2.32}$$

где символ f_{t1N} обладает теми же свойствами (2.22), что и $\hat{f}_{t1N}(x,z,\xi)$.

Пусть $x\in\Omega(2\mu t^{-\omega})$. Тогда

$$(p-t)\left(1-e_t^2(3-2e_t)+f_{t1N}\right)^2(x,\xi) = (p-t)\left(1-\chi_t^2(3-2\chi_t)+f_{t1N}\right)^2(x,\xi) \overset{\text{опр}}{=} f_{0t}(x,\xi).$$

Установим следующие оценки для достаточно больших t, M_0:

$$|f_{0t}(x,\xi)+M_0 t^{1-\varkappa}| \ge c\left(|\operatorname{Re} p(x,\xi)|^{1-\varkappa}+t^{1-\varkappa}\right), \tag{2.33}$$

$$|f^{(\alpha)}_{0t(\beta)}(x,\xi)\, f^{-1}_{0t}(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta}\, t^{\omega|\beta|+(\varkappa-\frac{\rho-\rho_1}{m})|\alpha|}\, q(x)^{\delta|\beta|}\, \Lambda(x,\xi)^{-\rho_1|\alpha|} \tag{2.34}$$

и аналогичные (2.34) оценки с множителем $t^{-\Delta\cdot S}$ для $q_S(x,z,\xi)$. Эти оценки отличаются от проведенных в [4, теорема 5.2] для операторов во всем пространстве наличием в f_{0t} слагаемого $f_{t1N}(x,\xi)$.

Докажем (2.33). Обозначим через f_{1t} выражение f_{0t}, в котором символ p заменен на $\operatorname{Re} p$. Пусть t таково, что $|f_{t1N}|\le 1/4$. Если

$$\operatorname{Re} p(x,\xi) > t+\frac{1}{2}t^{1-\varkappa},$$

то

$$|\chi_t(x,\xi)|\le\frac{1}{2}, \quad t\le \operatorname{Re} p(x,\xi)-\frac{1}{8}\operatorname{Re} p(x,\xi)^{1-\varkappa}$$

и

$$|f_{1t}(x,\xi)+M_0 t^{1-\varkappa}| \ge \frac{1}{32}|\operatorname{Re} p(x,\xi)|^{1-\varkappa}+M_0 t^{1-\varkappa}.$$

Если

$$t-c_1 t^{1-\varkappa} \le \operatorname{Re} p(x,\xi) \le t+\frac{1}{2}t^{1-\varkappa},$$

где C_1 указано в (2.22), то

$$|f_{1t}(x,\xi)+M_0 t^{1-\varkappa}| \ge (M_0-2c_1-1)t^{1-\varkappa} \ge \frac{M_0}{2}\left(t^{1-\varkappa}+|\operatorname{Re} p(x,\xi)|^{1-\varkappa}\right),$$

если M_0 достаточно велико. Если $\operatorname{Re} p(x,\xi)\le t-c_1 t^{1-\varkappa}$, то $f_{t1N}(x,\xi)=0$,

$$\chi_t(x,\xi)=1 \text{ и } f_{1t}(x,\xi)+M_0t^{1-\varkappa}-M_0t^{1-\varkappa}\geq\frac{M_0}{2}\left(t^{1-\varkappa}+\operatorname{Re}p(x,\xi)^{1-\varkappa}\right).$$

Рассмотрим $f_{1t}(x,\xi)-f_{0t}(x,\xi)$. На носителе этой функции $\operatorname{Re}p(x,\xi)\geq$ $\geq t-c_1t^{1-\varkappa}$, и, следовательно, $t\leq d\Lambda^m(x,\xi)$ с некоторым d. Из самосопряженности P следует, что

$$|\operatorname{Im}p(x,\xi)|\leq c\,|p(x,\xi)|\,\Lambda(x,\xi)^{-\rho+\delta} \tag{2.35}$$

и, ввиду условий (2.3),

$$|f_{1t}(x,\xi)-f_{0t}(x,\xi)|\leq 2\,|\operatorname{Im}p(x,\xi)|\leq c\,|p(x,\xi)|^{1-\varkappa}\times$$
$$\times\Lambda(x,\xi)^{m\varkappa-\rho+\delta}\leq c\,|p(x,\xi)|^{1-\varkappa}t^{-\frac{\rho-\delta}{2m}}.$$

Из последней оценки $f_{1t}-f_{0t}$ и проведенных выше оценок f_{0t} следует (2.33) для достаточно больших t.

Оценим производные $f_{0t}(x,\xi)$. Очевидно,

$$|f^{(\alpha)}_{0t(\beta)}(x,\xi)|\leq C_{\alpha\beta}\sum_{\Sigma\mu_j=\alpha,\,\Sigma\nu_j=\beta}\prod_{j\leq 2}\left(1-\chi_t^2(3-2\chi_t)+f_{t1N}\right)^{(\mu_j)}_{(\nu_j)}(p-t)^{(\mu_3)}_{(\nu_3)}.$$

Рассмотрим случай $\mu_3+\nu_3=0$. Тогда, предполагая, что $|\alpha|+|\beta|>0$, ввиду (2.22) и построения $\chi_t(x,\xi)$, имеем $|\operatorname{Re}p(x,\xi)-t|\leq ct^{1-\varkappa}$. Следовательно, по лемме 2.1 и формулам (2.22), (2.33) получаем оценку (2.34).

Если $|\mu_3|+|\nu_3|>0$, $|p(x,\xi)|\leq 2t$, то, по (2.1), лемме 2.1 и (2.33) находим

$$|f^{(\alpha)}_{0t(\beta)}(x,\xi)f^{-1}_{0t}(x,\xi)|\leq C_{\alpha\beta}|p(x,\xi)|\varphi(x)^{\delta|\beta|}\Lambda(x,\xi)^{-\rho_1|\mu_1+\mu_2|-\rho|\mu_3|}t^{\omega|\nu_1+\nu_2|+\varkappa-1}\cdot t^{\left(\varkappa-\frac{\rho-\rho_1}{m}\right)|\mu_1+\mu_2|}.$$

Чтобы установить (2.34), достаточно показать, что ограничено (равномерно по $t\geq 1$) выражение

$$J=t^{\varkappa-1-\omega|\nu_3|-\left(\varkappa-\frac{\rho-\rho_1}{m}\right)|\mu_3|}|p(x,\xi)|\,\Lambda(x,\xi)^{-(\rho-\rho_1)|\mu_3|}.$$

Поскольку $p(x,\xi)$ - полином по ξ степени не выше m, то $|\mu_3|\leq m$ и $m-(\rho-\rho_1)|\mu_3|\geq 0$. Тогда, воспользовавшись (2.1), находим

$$J\leq t^{\varkappa-1-\omega|\nu_3|-\left(\varkappa-\frac{\rho-\rho_1}{m}\right)|\mu_3|}\left(|p(x,\xi)|^{1/m}\Lambda(x,\xi)^{-1}\right)^{(\rho-\rho_1)|\mu_3|}\times$$

$$\times|p(x,\xi)|^{1-\frac{\rho-\rho_1}{m}|\mu_3|} \leqslant ct^{\varkappa-\omega|\nu_3|-\varkappa|\mu_3|}$$

Поскольку $\varkappa\leqslant\omega$, $|\nu_3|+|\mu_3|\geqslant 1$, то $\mathcal{J}\leqslant c$.

Если же $|p(x,\xi)|\geqslant 2t$ и t достаточно велико, то, по построению χ_t и (2.22), $f_{0t}(x,\xi)=p(x,\xi)-t\geqslant\frac{1}{3}(p(x,\xi)+t)$. Оценка (2.34) следует из (2.1). Таким образом, оценка (2.34) установлена.

Воспользовавшись формулой (2.26) для символов $q_s(x,z,\xi)$ и преобразовав их, как выше q_0, получим, что при $x,z\in\Omega(\frac{3}{2}\mu t^{-\omega})$ выполняется

$$\sigma(H)(x,z,\xi)=\sum_{s\leqslant N_0} f_s\left(\frac{x+z}{2},\xi\right)\theta_{\frac{\mu}{4}t^{-\omega}}(x,y)+r_N,$$

причем для $f^{(\alpha)}_{s(\beta)}f^{-1}_{0t}(x,\xi)$ верны оценки (2.34) с дополнительным множителем $t^{-\Delta\cdot s}$ в правой части. При достаточно большом t можно применить теорему 2.4 с $h_t=\sum_{s\leqslant N_0} f_{st}$ и $\mathcal{C}=\Omega(4\mu t^{-\omega})$. Выберем в этой теореме $M\geqslant max(\Delta^{-1}, m(\rho_1-\delta)^{-1})$ и $\nu\leqslant\mu(4M)^{-1}$, $\kappa=N_0(0)\left(\frac{\rho-\rho_1}{m}-\varkappa\right)$, где $N_0(0)$ указано в теореме 2.2. Тогда существует п.д.о. $R_{\nu,M}$ такой, что $H-{}^tR_{\nu,M}R_{\nu,M}\overset{\text{опр}}{=}\mathcal{L}_{\nu,M}\in D\mathcal{L}_{\rho_1,\delta}(t^{-\kappa},\Omega(\mu t^{-\omega}))$, поскольку, по (2.15'), $(\Omega(3\mu t^{-\omega}))^{-}_{(M\nu)}\supset\Omega(\mu t^{-\omega})$ при выбранных ν и M. Оператор $(1-\varphi_3)\mathcal{L}_{\nu,M}(1-\varphi_3)\in D\mathcal{L}^0_{\rho_1,\delta}(q)$, и, по теореме 2.2, его норма, как норма оператора в $L^2(R^n)$, ограничена числом, не зависящим от t. Учитывая (2.28), получаем

$$I\geqslant\langle\mathcal{L}_{\nu,M}(1-\varphi_2)u,(1-\varphi_2)u\rangle=\langle(1-\varphi_3)\mathcal{L}_{\nu,M}(1-\varphi_3)(1-\varphi_2)u,(1-\varphi_3)u\rangle\geqslant -c\|u\|_0^2.$$

Доказательство теоремы 2.1. Оценим $N_+(Fr,\Omega,t)$ сверху. Пусть L_t и M_t - подпространства в $L^2(R^n)$, натянутые на собственные функции оператора $\mathcal{E}_{1t}$ с собственными числами $\nu_{1i}(t)\in[t^{-\varepsilon},1]$ и $\nu_{1i}(t)\in[0,t^{-\varepsilon})$ соответственно. Замыкание оператора $\mathcal{E}_{1t}$ в $L^2(R^n)$ - самосопряженный вполне непрерывный оператор, причем, по (2.17), при $t\geqslant t_0$ все $\nu_{1i}(t)\in[0,1]$. Поэтому M_t и L_t - ортогональные подпространства, образующие в сумме $L^2(R^n)$. Покажем, что

$$D_\tau\cap M_t=\emptyset \quad \text{для} \quad \tau=t+ct^{1-\varkappa} \tag{2.36}$$

при некотором c (пространства D_τ определены в (2.2)).Тогда, применяя лемму 2.3, имеем

$$N_+(Fr,\Omega,\tau)-\max\dim D_\tau \leqslant \dim L_t \leqslant V(t)+O(t^{\varepsilon}H(t)),$$

откуда легко получить требуемую оценку для $N_+(Fr,\Omega,t)$ сверху.

Итак, докажем (2.36). Если $v\in M_t\cap C_0^\infty(\Omega)$, то положим

$$u=(I-\mathcal{E}_{1t})^{-1}v=\sum_{k\geqslant 0}\mathcal{E}_{1t}^{k}v.$$

Покажем, что $u\in\bigcap_s H_s(q)$. Действительно,

$$\|u\|_{s,q}\leqslant\sum_{k\geqslant 0}\|\mathcal{E}_{1t}^{k}v\|_{s,q}\leqslant\sum_{k>0}\|\mathcal{E}_{1t}\|_{L^2\to H_s(q)}\,t^{-(k-1)\varepsilon}\|v\|_0+$$

$$+\|v\|_{s,q}\leqslant c_s(t)\|v\|_0+\|v\|_{s,q}.$$

По лемме 2.5,

$$<(P-t)(I-\mathcal{E}_{1t})u,(I-\mathcal{E}_{1t})u>\geqslant -ct^{1-\varkappa}\|u\|_0^2-ct^{\mu}\|\varphi_1 u\|_{m,q}^2$$

с некоторым μ. По определению M_t, u и v, имеем

$$\|u\|_0\leqslant\sum_k t^{-\varepsilon k}\|v\|_0\leqslant 2\|v\|_0 \qquad \text{при}\quad t\geqslant t_0.$$

Поэтому для $v\in M_t\cap C_0^\infty(\Omega)$ выполняется

$$<(P-t)v,v>\geqslant -ct^{1-\varkappa}\|v\|_0^2-ct^{\eta}\|\varphi_1(I-\mathcal{E}_{1t})^{-1}v\|_{m,q}^2. \qquad (2.37)$$

Покажем, что последний член в (2.37) оценивается сверху $c_N t^{-R_0}\|v\|_0^2$ для любого R_0. Действительно, для любого N справедливо

$$u=(I-\mathcal{E}_{1t})^{-1}v=\sum_{0\leqslant k\leqslant N}\mathcal{E}_{1t}^{k}v+\mathcal{E}_{1t}^{N+1}(I-\mathcal{E}_{1t})^{-1}v.$$

Из определения M_t следует, что

$$\|\mathcal{E}_{1t}^{N}(I-\mathcal{E}_{1t})^{-1}v\|_0\leqslant 2t^{-N\varepsilon}\|v\|_0$$

и

$$\|\varphi_1\mathcal{E}_{1t}^{N+1}(I-\mathcal{E}_{1t})^{-1}v\|_{m,q}\leqslant 2\|\varphi_1\mathcal{E}_{1t}\|_{L^2\to H_m(q)}\,t^{-N\varepsilon}\|v\|_0 \quad\text{при}\quad t>2^{1/\varepsilon}.$$

Применяя теорему 2.2, получаем для $w\in L^2(R^n)$

$$\|\varphi_1\mathcal{E}_{1t}w\|_{H_m(q)}^2\leqslant c\sum_{|\alpha|+|\beta|=m}\|q_1^{\alpha}D^{\beta}(\varphi_1\mathcal{E}_{1t}w)\|_0^2\leqslant ct^{\nu}\|w\|_0^2$$

с некоторым ν. Следовательно, для $N=(R_0+\eta+\nu)(2\varepsilon)^{-1}$ получаем

$$t^{\eta}\left\|\varphi_1 \mathcal{E}_{1t}^{N+1}(I-\mathcal{E}_{1t})^{-1}v\right\|_{m,q}^{2}\leq ct^{-R_0}\|v\|_0^2. \tag{2.38}$$

Осталось оценить $\|\varphi_1\mathcal{E}_{1t}^{\kappa}v\|_0$ для $1\leq\kappa\leq N$. Интегрируя по частям по ξ, получаем при любом N_1

$$\varphi_1\mathcal{E}_{1t}^{\kappa}v=Op(g_{t\kappa N_1}v),$$

где

$$g_{t\kappa N_1}(x,y,\xi)=(-\Delta_\xi)^{N_1}e_{1t\kappa}(x,y,\xi)|x-y|^{-2N_1}\sum_i\psi_{i\xi 0}^2(y)\varphi_1(x),$$

Δ_ξ - оператор Лапласа. Вследствие (2.29),

$$|x-y|\geq\frac{\mu}{2}t^{-\omega}(q_1(x)+q_1(y))^{-\delta}.$$

По леммам 2.1, 1.3, формуле (2.21) находим

$$g_{t\kappa N_1}\in\mathcal{D}S^{0,-2N_1\Delta}_{\rho_1,\delta}(q_1,t).$$

По теореме 2.1 и (2.3) находим

$$\|\varphi_1\mathcal{E}_{1t}^{\kappa}v\|_0^2\leq c_{N_1}t^{-2N_1\Delta+2N_0(0)\left(\frac{\rho-\rho_1}{m}-\varkappa\right)}\|v\|_0^2<c'_{N_1}t^{-R_0}\|v\|_0^2, \tag{2.39}$$

если

$$N_1=(2\Delta)^{-1}\left(R_0+2N_0(0)\left(\frac{\rho-\rho_1}{m}-\varkappa\right)\right).$$

При $R_0=\varkappa-1$ из (2.37) - (2.39) вытекает

$$\langle(P-t)v,v\rangle\geq -ct^{1-\varkappa}\|v\|_0^2 \quad \text{для } v\in M_t\cap C_0^\infty(\Omega),$$

откуда следует (2.36).

Теперь кратко проведем доказательство оценки $N_+(t)$ снизу. Введем п.д.о.

$$\mathcal{E}'_t=Op\left(e'_t\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)\theta_{t^{-\omega}}(x,y)\right),$$

$$e'_t(x,\xi) = \sum_{i,\,\mathrm{supp}\,\psi_{i10}\in\Omega^-_{(\nu)}} \psi^2_{i10}(x)\chi\big(t^{\varkappa-1}(\mathrm{Re}\,p(x,\xi)-t)\big),\quad \mathcal{E}'_{1t}=\mathcal{E}'^{2}_t(3-2\mathcal{E}'_t),$$

где функции ψ_{i10} введены в лемме 1.3, а функция $\chi(z)$ - при определении оператора $\mathcal{E}_t$ в (2.5).

Пусть L'_t - конечномерное подпространство в $L^2(R^n)$ собственных функций оператора $\mathcal{E}'_{1t}$ с собственными числами μ_i такими, что $|\mu_i-1|\le t^{-\varkappa}$. По (1.7), если $(x,y,\xi)\in \mathrm{supp}\,\sigma(\mathcal{E}'_{1t})(x,y,\xi)$, то $|x-y|\le 12t^{-\omega}(q_1(x)+q_1(y))^{-\delta}$.

По свойству (2.15), $L'_t\subset C^\infty_0(\Omega)$.

Нетрудно проверить, что п.д.о. $t-\mathcal{E}'_{1t}P\mathcal{E}'_{1t}+t^{1-\varkappa}$ при больших t

удовлетворяет условиям теоремы 2.4 для $C=\Omega$. По теореме 2.4, имеем

$$<(t+t^{1-\varkappa}-\mathcal{E}'_{1t}P\,\mathcal{E}'_{1t})u,u> \ \ge -c\|u\|^2_0,\quad u\in L'_t.$$

Но $(1-t^{-\varkappa})\|u\|_0\le\|\mathcal{E}'_{1t}u\|_0$ для $u\in L'_t$, и, следовательно,

$$<P(\mathcal{E}'_{1t}u),\mathcal{E}'_{1t}u>\ \le (t+c_1t^{1-\varkappa})\|u\|^2_0,\ u\in L'_t$$

с некоторым c_1. Поскольку $\mathcal{E}'_{1t}$ осуществляет изоморфизм L'_t, то $N_+(\tau)\ge$

$\ge \dim L'_t$, $\tau=t+c_1t^{1-\varkappa}$. По (1.7) и (2.15), если $x\in\Omega^-_{(\nu+2)}\cap\mathrm{supp}\,\psi_{i10}$ для некоторого i, то $\mathrm{supp}\,\psi_{i10}\subset\Omega^-_{(\nu)}$ и, следовательно,

$$e'_t(x,\xi)=\chi\big(t^{\varkappa-1}(\mathrm{Re}\,p(x,\xi)-t)\big).$$

Проведя доказательство леммы 2.3 для $\mathcal{E}'_{1t}$, получим неравенство

$$N_+(\tau)\ge V_{\Omega^-_{(\nu+2)}}(t)-cW_\Omega(t,ct^{1-\varkappa})-c_Nt^{-N}V_{\Omega(ct^{-\varkappa})}(t+ct^{1-\varkappa}),$$

из которого следует требуемая оценка $N_+(t)$ снизу.

§ 3. Примеры

1. Приведем класс областей Ω, операторов P и расширений $\hat{P}$, для которых выполнена оценка (0.5).

Пусть d таково, что для любой точки $x\in\partial\Omega$ существует окрестность

$U_x \subset \bar{\Omega}$ с центром в точке x и радиуса $dq(x)^{-\delta}$ такая, что U_x задается (после соответствующего поворота координатных осей) неравенством $y_n \geqslant f_x(y')$, причем

$$\nabla f_x(y)\Big|_{y=x}=0, \quad \sup_{y\in U_x} |D^{\alpha}_{y'} f_x(y')| = O(q(x)^{|\alpha|-1})$$

для $|\alpha|=1,2,\ldots$ при $|x|\to\infty, x\in\partial\Omega$. Пусть в точках $x\in\bar{\Omega}$ задан оператор $P(x,D)$, удовлетворяющий условиям (0.4), а при $x\in\partial\Omega$ заданы граничные операторы

$$B_j(x,D) = \sum_{|\beta|\leqslant m_j<m} b_{j\beta}(x) D_x^{\beta} \quad \left(j=1,\ldots,\frac{m}{2}\right),$$

причем

$$D^{\alpha} b_{j\beta}(x) = O\left(q(x)^{m_j-|\beta|+\delta|\alpha|}\right) \text{ при } |\beta|\leqslant m_j;\ |\alpha|=0,1,\ldots;\ |x|\to\infty.$$

Будем предполагать, что

(i) краевая задача $(P,B_1,\ldots,B_{\frac{m}{2}})$ эллиптическая при всех $x\in\partial\Omega$;

(ii) выполнено сформулированное ниже условие эллиптичности с весом.

Для $x\in\partial\Omega$ перейдем к координатам y, введем базис $\{\omega_k(y), 1\leqslant k\leqslant \frac{m}{2}\}$ в пространстве ограниченных на полупрямой $y_n>0$ решений уравнения $P(x,\xi',D_{y_n})v=0$. Обозначим

$$R(x,\xi') = \det \| B_j(x,\xi',D_{y_n})\,\omega_k(y) \| \Big|_{y=x}.$$

Условие эллиптичности с весом сформулируем так : при некотором N

$$R(x,\xi')\neq 0 \text{ для } x\in\partial\Omega,\ \xi'\in R^{n-1},\ |x|>N.$$

Если $\lambda_j(x,\xi')$ - корни уравнения $p(x,\xi',\xi_n)=0$ с $\operatorname{Im}\lambda_j<0$ $(j=1,\ldots,\frac{m}{2})$, то из (0.4) следует существование C_1 и C_2 таких, что

$$C_1\leqslant |\operatorname{Im}\lambda_j(x,\xi')|\,(|\xi'|+q(x))^{-1}\leqslant C_2 \quad \text{для } x\in\partial\Omega,\ \xi'\in R^{n-1}.$$

Используя эти неравенства, можно показать, что при $|x|$ достаточно большом, $x\in\partial\Omega$ имеет место

$$C_3\leqslant |R(x,\xi')|\ (|\xi'|+q(x))^{-\sum\limits_i m_i}\leqslant C_4.$$

Введем пространство $H_{s-1/2}(\partial\Omega,q)$ с нормой $\|u\|'_{s-1/2,q} = \inf \|v\|_{s,q}$, где $v\big|_{\partial\Omega}=u$. Можно показать, что при условиях (i) и (ii) выполнена оценка:

$$|u|_{m,q} \le c\left(|Pu|_0 + \sum_j |B_j u|'_{m-m_j-1/2,q} + |u|_0\right), \tag{3.1}$$

откуда следует (0.5) для

$$D_{\hat{P}} = \{u \in H_m(q);\ B_1 u = \ldots = B_{\frac{m}{2}} u = 0\}. \tag{3.2}$$

Такой результат при менее явных условиях на P и B_j был сформулирован в [14].

2. Будем предполагать, что операторы P, $B_1, \ldots, B_{\frac{m}{2}}$ удовлетворяют условиям п.1 и введем расширение $\hat{P}$ с областью определения (3.2). Тогда из (3.1) следует замкнутость $\hat{P}$. Расширение $\hat{P}$ назовем формально самосопряженным, если $<Pu,v>=<u,Pv>$ для $u,v \in D_{\hat{P}}$. При выполнении условий (0.4) формально самосопряженное расширение $\hat{P}$ является самосопряженным оператором.

Для доказательства этого факта достаточно показать, что индексы дефекта оператора $\hat{P}N^{-1}$ при некотором вещественном N равны нулю, т.е. что из

$$u_{\pm} \in L^2,\ <u_{\pm},(P \pm iN)\varphi>=0 \text{ для всех } \varphi \in D_{\hat{P}} \tag{3.3}$$

следует $u_{\pm}=0$. Если образ оператора $\hat{P} \pm iN$ совпадает с L^2, то (3.3) очевидно. Разрешимость задачи $(P \pm iN)\varphi = v$, $B_1\varphi = \ldots = B_{\frac{m}{2}}\varphi = 0$ для $v \in L^2$ и N достаточно больших можно показать построением правого обратного к эллиптической задаче $(P \pm iN, B_1, \ldots, B_{\frac{m}{2}})$. При этом существенно используется вытекающая из (0.4) оценка для корней $\lambda_j(x,\xi')$ уравнения $p(x,\xi',\xi_n) \pm iN = 0$:

$$C_2 \le |\mathrm{Im}\, \lambda_j(x,\xi')| \left(|\xi'| + q(x) + N^{\frac{1}{m}}\right)^{-1} \le C_1,$$
$$1 \le j \le m,\quad x \in \Omega,\quad \xi' \in R^{n-1}.$$

Литература

1. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений.- Итоги науки и техники. Матем.анализ, 1973, т.14, с.5-58.
2. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов.- Тр.Моск.матем.о-ва, I, 1972, т.27, с.3-52; II, 1973, т.28, с. 3-34.
3. Туловский В.Н., Шубин М.А. Об асимптотическом распределении собственных значений псевдодифференциальных операторов в R^n.- Мат.сб., 1973, т.92, № 4, с. 571-588.
4. Фейгин В.И. Новые классы псевдодифференциальных операторов в R^n и некоторые приложения.- Тр.Моск.матем.о-ва, 1978, т.36, с.154-194.

5. Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. Распределение собственных значений эллиптических операторов во всем пространстве.- Тр. семинара им. И.Г. Петровского, 1976, вып.2, с.113-143.

6. Бойматов К.Х. Распределение собственных значений эллиптических операторов.- Докл.АН СССР, 1975, т.221, № 2, с.265-268.

7, Фейгин В.И. Асимптотическое распределение собственных чисел для гипоэллиптических систем в R^n .- Мат.сб., 1976, т.99, №4, с.594-614.

8. Hörmander L. The spectral function of an elliptic operator.-Acta Math., 1968, v. 121, № 3-4, p.193-218. / Перевод в сб. "Математика", 1969, т.13, №6, с.114-137.

9. Туловский В.Н. Распределение собственных чисел для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.- Функц. анализ, 1971, т.5, №3, с.85-100.

10. Agmon S. Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators. - Arch.Rational Mech. and Analysis, 1968, v. 28, № 3, p. 165-183.

11. Фейгин В.И. О спектральной асимптотике для краевых задач и асимптотике отрицательного спектра.- Докл.АН СССР, 1977, т.232, №6, с.1269-1272.

12. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.- М.: Мир, 1973.- 342 с.

13. Морен К. Методы гильбертова пространства.- М.: Мир, 1965.-570 с.

14. Багиров Л.А., Фейгин В.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с неограниченной границей.- Докл.АН СССР, 1973, т.211, № 1, с.23-26.

15. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа дифференциальных операторов.- М.: Физматгиз, 1963.- 339 с.

16. Бойматов К.Х. Спектральные асимптотики дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в негладкой области.- Докл.АН СССР, 1978, т.242, № 4, с. 749-752.