УДК 517.947

О СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

С.В.Успенский, Г.В.Демиденко (Новосибирск)

Рассматриваются общие смешанные краевые задачи для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной следующего вида:

$$L(x,D_t,D_x)u = D_t^{\ell} L_{2m}(x,D_x)u + L'(x,D_t,D_x)u = F(t,x). \tag{1}$$

Как частный случай в указанный класс краевых задач входят различные задачи гидродинамики. Наиболее важной из них является задача о малых колебаниях вращающейся жидкости в сосуде, впервые рассмотренная С.Л.Соболевым [1 - 3] , а также задача о распространении волн в океане. Линейная постановка последней описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(t,x), \tag{2}$$

а смешанные краевые задачи для этого уравнения были изучены в [10,11] .

В нашей работе исследуется вопрос о существовании решения общих смешанных краевых задач для уравнения (1) и рассмотрены условия однозначной разрешимости. Полученная здесь теорема обобщает соответствующие результаты [7] . Большая часть работы посвящена изучению решений первой краевой задачи для уравнения Соболева и уравнения (2) при $t \to \infty$. Полученные равномерные оценки и в норме W_2^m на рост решения усиливают и обобщают соответствующие результаты [14,15] . Близкие вопросы рассматривались также в [4-6,8,9,13,16]. Настоящая работа состоит из 4 параграфов. В первом - вводятся обозначения и формулируются основные результаты; во втором - показано существование регуляризаторов у общих смешанных краевых задач для уравнения (1); в третьем - доказываются внутренние оценки решения первой смешанной краевой задачи для уравнения Соболева; в четвертом - устанавливаются оценки решения первой смешанной краевой задачи для уравнения Соболева вблизи границы, а также оценки решения первой смешанной краевой задачи для уравнения (2).

§1. Формулировка основных результатов

Введем некоторые обозначения.

Пусть $G \subset E_n$ - ограниченная область с $(n-1)$-мерной достаточно гладкой границей ∂G :

$$Q=\{(t,x):\ 0<t<\infty,\quad x=(x_1,\dots,x_n)\in G\},$$

$$D_{x_k}^{\beta_k}=\frac{\partial^{\beta_k}}{\partial x_k^{\beta_k}},\quad D_x^{\beta}=D_{x_1}^{\beta_1}\dots D_{x_n}^{\beta_n},$$

$$\mathcal{L}_\tau v\,(t,x)=\int_0^\infty \exp(-\tau t)\,v(t,x)\,dt.$$

Будем считать, что $Re\,\tau=\sigma>\gamma>0$,

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n}D_{x_k}^2,\qquad \Delta'=\sum_{k=2}^{n}D_{x_k}^2,$$

$$|\beta|=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ .$$

Обозначим через $\langle u,v\rangle_k$ скалярное произведение в $W_2^k(G)$, $\nabla u=(D_{x_1}u,\dots$ $\dots,D_{x_n}u)$.

Определим условие, налагаемое на оператор $L(x,D_t,D_x)$:

1) Оператор $L_{\ell m}(x,D_x)$- эллиптический по переменным x порядка $2m$. При $n=2$ дополнительно будем предполагать, что для любых линейно-независимых векторов ξ' и ξ'' уравнение $\overset{\circ}{L}_{2m}(x,\xi'+\lambda\xi'')=0$ относительно λ имеет m корней в полуплоскости $\mathfrak{Im}\,\lambda>0$.

2) Оператор $L'(x,D_t,D_x)$ имеет вид:

$$L'(x,D_t,D_x)=\sum_{\substack{|\beta|\le 2m\\ k\le \ell-1}}a_{\beta k}(x)D_x^{\beta}D_t^{k}. \tag{1.1}$$

Будем считать, что коэффициенты оператора $L(x,D_t,D_x)$ достаточно гладкие.

Определим условия, налагаемые на операторы $B_j(x,D_t,D_x)$.

3) Операторы $B_j(x,D_t,D_x)$ имеют вид:

$$B_j(x,D_t,D_x)=D_t^{\ell_j}B_{\mu_j}(x,D_x)+\sum_{\substack{|\beta|\le\mu_j\\ k\le \ell_j-1}}b_{\beta k}(x)D_x^{\beta}D_t^{k}, \tag{1.2}$$

где μ_j - порядок оператора $B_{\mu_j}(x,D_x)$, $\mu_j\le 2m-1$, $\ell_j<\ell$, и коэффициенты допускают достаточно гладкое продолжение в $\bar G$.

4) Оператор

$$\mathcal{A}(x,D_x)=\{L_{2m}(x,D_x),B_{\mu_1}(x,D_x)|_{\partial G},\dots,B_{\mu_m}(x,D_x)|_{\partial G}\}$$

удовлетворяет условию Лопатинского.

Определим классы функций.

Класс $W_\gamma^{p,q}(Q)$, p,q - целые, $\gamma>0$, функция $f(t,x)$ принадлежит классу $W_\gamma^{p,q}(Q)$, если она имеет обобщенные производные до порядка p по x и до порядка q по t , $D_t^k f(t,x)|_{t=0}=0$, $k=0,\dots,q-1$, и норма

$$\|f, W_{\gamma}^{p,q}(Q)\| = \|e^{-\gamma t} f, L_2((0,\infty), W_2^{p}(G))\| +$$
$$+\| D_t^{q} e^{-\gamma t} f, L_2(Q)\| < \infty. \qquad (1.3)$$

Обозначим через C_γ. область $\{\tau \in C,\ Re\,\tau > \gamma\}$.

Определим класс $W_{\gamma}^{p,q}(G \times C_\gamma)$. Функция $g(\tau,x)$ принадлежит классу $W_{\gamma}^{p,q}(G \times C_\gamma)$, если она имеет обобщенные производные до порядка p по x и для почти всех x функция $g(\tau,x)$ - голоморфная по τ при $Re\tau>\gamma$ и норма

$$\|g, W_{\gamma}^{p,q}(G \times C_\gamma)\|^2 = \sup_{Re\tau \geq \gamma} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \|g(i\eta+\sigma,x), W_2^{p}(G)\|^2 d\eta +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2q} \|g(i\eta+\sigma,x),\ L_2(G)\|^2 d\eta \Big] < \infty. \qquad (1.4)$$

По обобщенной теореме Пэли-Винера, преобразование Лапласа $\mathcal{L}_\tau$ взаимно-однозначно переводит класс $W_{\gamma}^{p,q}(Q)$ на класс $W_{\gamma}^{p,q}(G\times C_\gamma)$; это преобразование является ограниченным оператором в рассматриваемых пространствах.

Определим класс функций $W_{\gamma}^{p,q}(\partial G \times C_\gamma)$. Функция $\varphi(\tau,x')$ принадлежит классу $W_{\gamma}^{p,q}$, если для каждого τ она принадлежит классу $W_2^{p}(\partial G)$ Соболева, для почти всех $x'\in\partial G$ голоморфна по τ, $Re\tau>\gamma$ и норма

$$\|\varphi, W_{\gamma}^{p,q}(\partial G \times C_\gamma)\|^2 = \sup_{Re\tau \geq \gamma} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(i\eta+\sigma,x'),\ W_2^{p}(\partial G)\|^2 d\eta +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2q} \|\varphi(i\eta+\sigma,x'), L_2(\partial G)\|^2 d\eta \Big] < \infty. \qquad (1.5)$$

Рассмотрим смешанную задачу:

$$\begin{aligned} &L(x,D_t,D_x)u = F(t,x),\quad x\in G,\quad 0<t<\infty,\\ &B_j(x,D_t,D_x)u\big|_{\partial G} = \Phi_j(t,x'),\ j=1,\dots,m,\quad 0<t<\infty, \qquad (1.6)\\ &u=0,\ t<0. \end{aligned}$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1)-4) *на оператор* $L(x,D_t,D_x)$ *и на граничные операторы* $B_j(x,D_t,D_x)$, $F(t,x)\in W_{\gamma}^{2m,\ell}(Q)$, $\mathcal{L}_\tau \Phi_j(t,x') \in$ $\in W_{\gamma}^{4m-\mu_j-1/2,\,2\ell-\ell_j}(\partial G\times C_\gamma)$. *Тогда существует число* $\gamma_0>0$ *такое, что при* $\gamma>\gamma_0$ *вопрос о разрешимости задачи* (1.6) *в классе* $W_{\gamma}^{4m,2\ell}(Q)$ *сводится к решению уравнения Фредгольма.*

Следствие. *Если эллиптическая задача*

$$L_{2m}(x,D_x)v = f(x),\quad x\in G;$$
$$B_{\mu_j}(x,D_x)v\big|_{\partial G} = \varphi_j(x'),\quad j=1,\dots,m,$$

однозначно разрешима при любых правых частях $f(x)\in W_2^{\kappa}(G)$, $\varphi_j(x')\in W_2^{2m-\mu_j-1/2+\kappa}(\partial G)$ *, то смешанная задача* (1.6) *при достаточно большом* $\gamma>0$, $F\in W_\gamma^{2m,\ell}(Q)$ *и* $\mathcal{L}_\tau \Phi_j \in W_\gamma^{4m-\mu_j-1/2,\,2\ell-\ell_j}(\partial G\times C_\gamma)$ *имеет единственное решение* $u\in W_\gamma^{4m,2\ell}(Q)$ *и выполняется оценка*

$$\|u, W_\gamma^{4m,2\ell}(Q)\| \le C\Big[\|F, W_\gamma^{2m,\ell}(Q)\| + \sum_{j=1}^{m}\|\mathcal{L}_\tau \Phi_j, W_\gamma^{4m-\mu_j-1/2,\,2\ell-\ell_j}(\partial G\times C_\gamma)\|\Big], \tag{1.7}$$

где константа C *не зависит от* u, F, Φ_j .

Из этого следствия вытекает, что смешанные задачи для уравнения С.Л.Соболева

$$D_t^2\Delta u + D_{x_n}^2 u = 0$$

однозначно разрешимы в классе функций, растущих по t не быстрее экспоненты, если соответствующая эллиптическая задача для оператора Δ однозначно разрешима. В случае первой краевой задачи для уравнения С.Л.Соболева [1] хорошо известно [12-15] , что существует однозначная разрешимость в классе функций, растущих не быстрее некоторой степени.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения С.Л.Соболева

$$D_t^2\Delta u + D_{x_n}^2 u = 0,\quad t>0,\ x\in G,$$
$$u|_{t=0} = u_1(x),\ D_t u|_{t=0} = u_2(x),\quad u|_{\partial G} = 0. \tag{1.8}$$

Будем предполагать $u_j\in W_2^{m}(G),\ j=1,2,\quad u_j|_{\partial G}=0.$

Теорема 2. *Решение* u *смешанной задачи* (1.8) *для почти всех* $x\in\bar G$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{u^2(t,x)}{t\ln^{1+\varepsilon} t}\longrightarrow 0,\quad t\to\infty,\quad \forall\varepsilon>0. \tag{1.9}$$

Следствие. *Для любого* $\delta>0$ *существует множество* G_δ, $mG_\delta<\delta$, *такое, что на множестве* $\bar G\setminus G_\delta$ *имеет место оценка*

$$\sup_{x\in\bar G\setminus G_\delta}|u(t,x)|\le K_\delta t^{1/2}\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} t\qquad \forall\varepsilon>0,\ t\gg 1, \tag{1.10}$$

где константа K_δ *не зависит от* t .

Теорема 3. *Пусть* u *- решение смешанной задачи* (1.8), $m>\frac{n}{2}$ *, где* n *- размерность области* G, m *- целое. Обозначим через* G' *подобласть области* G *, замыкание которой* $\bar G'\subset G$ *. Тогда имеет место оценка*

$$\sup_{x\in G'}|u(t,x)| < C_1 t^{n/2} + C_2, \tag{1.11}$$

где константы C_i *зависят от области* G' *и начальных данных смешанной задачи* (1.8).

Оценки решения вблизи границы существенно зависят от геометрического расположения куска границы относительно оси x_n. Будем считать, что граница ∂G гладкая. Тогда локально она выражается уравнением $\omega(x)=0$. Выделим точки границы, где $\frac{\partial \omega}{\partial x_n}=0$. Эту часть границы назовем нерегулярной. Точки границы, в которых $\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\neq 0$, назовем регулярными, а участки границы ∂G, содержащие только регулярные точки,- регулярной границей.

Теорема 4. *Пусть* G *- область с гладкой границей* $\partial G \in C^{m+1}, m>\frac{n}{2}$, *где* n *- размерность* G, m *- целое. Обозначим через* G_2 *приграничную полоску, прилегающую к регулярной границе. Тогда решение смешанной задачи* (1.8) *имеет оценку*

$$\sup_{x\in G_2} |u(t,x)| \leq C_1 t^{3\left(\frac{m-1}{m}\right)\frac{n}{2}} + C_2, \tag{1.12}$$

где константы C_i *зависят от расстояния до нерегулярной границы и* $\|u_i, W_2^m\|$.

Теорема 5. *Пусть* G *- область с гладкой границей* $\partial G \in C^{m+1}, m>\frac{n}{2}$, *где* n *- размерность области* G, *а* m *- целое. Тогда решение смешанной задачи* (1.8) *имеет оценку*

$$\sup_{x\in G} |u(t,x)| \leq C_1 t^{\left(\frac{4m-3}{m}\right)\frac{n}{2}} + C_2, \tag{1.13}$$

где константы C_i *не зависят от* t.

В работе также установлены как равномерные, так и в норме W_2^m оценки всех производных решения смешанной задачи (1.8).

Рассмотрим краевую задачу для уравнения распространения волн в океане

$$D_t \Delta u + D_{x_n} u = 0,\ t>0,\ x\in G,\quad u\big|_{t=0} = u_1(x),\quad u\big|_{\partial G} = 0. \tag{1.14}$$

Будем считать, что ∂G достаточно гладкая, $u_1 \in W_2^m(G)$, $u_1\big|_{\partial G} = 0$.

Теорема 6. *Пусть* G *- область с гладкой границей* $\partial G \in C^{m+1}$, $m > n/2$, *где* n *- размерность области* G, m *- целое. Тогда решение смешанной краевой задачи* (1.14) *имеет оценку*

$$\sup_{x\in G} |u(t,x)| \leq C_1 t^{n/2\left(\frac{m-1}{m}\right)} + C_2, \tag{1.15}$$

где константы C_i *не зависят от* t.

Для задачи (1.14) в работе также получены как равномерные, так и в норме W_2^m оценки всех производных.

§2. О разрешимости общих смешанных краевых задач для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной

Вопрос о разрешимости смешанной краевой задачи (1.6) в классе $W_\gamma^{4m,2\ell}(Q)$ в силу обобщенной теоремы Пэли-Винера сводится к изучению краевой задачи с параметром τ для стационарного уравнения:

$$\begin{gathered}\tau^\ell L_{2m}(x,D_x)v + \sum_{\substack{|\beta|\le 2m\\ \kappa\le \ell-1}} a_{\beta\kappa}(x)\tau^\kappa D_x^\beta v = g(\tau,x),\\ \tau^{\ell_j} B_{\mu_j}(x,D_x)v + \sum_{\substack{|\beta|\le\mu_j\\ \kappa\le\ell_j-1}} b_{\beta\kappa}(x)\tau^\kappa D_x^\beta v\Big|_{\partial G} = \psi_j(\tau,x').\end{gathered} \tag{2.1}$$

Предполагая, что $\operatorname{Re}\tau>\gamma>0$, уравнение (2.1) можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}L_{2m}(x,D_x)v + \sum a_{\beta\kappa}(x)\tau^{\kappa-\ell} D_x^\beta v = \frac{1}{\tau^\ell} g(\tau,x),\\ B_{\mu_j}(x,D_x)v + \sum b_{\beta\kappa}(x)\tau^{\kappa-\ell_j} D_x^\beta v\Big|_{\partial G} = \frac{1}{\tau^{\ell_j}}\psi_j(\tau,x').\end{gathered} \tag{2.2}$$

Хорошо известно, что краевые задачи для эллиптических операторов, удовлетворяющие условию Лопатинского, сводятся посредством построения правого и левого регуляризаторов к фредгольмовым уравнениям второго рода. Будем считать, что эти регуляризаторы построены, и применим их к нашей задаче. Рассмотрим правый регуляризатор R_n для оператора

$$\mathcal{A}(x,D_x) = \left\{L_{2m}(x,D_x),\ B_{\mu_1}(x,D_x)\big|_{\partial G},\dots,B_{\mu_m}(x,D_x)\big|_{\partial G}\right\}.$$

Тогда, по определению,

$$R_n : W_2^\kappa(G)\times\prod_{j=1}^m W_2^{\gamma_j+\kappa}(\partial G) \longrightarrow W_2^{2m+\kappa}(G)$$

- линейный и непрерывный, $\gamma_j = 2m-\mu_j-1/2$, причем

$$\mathcal{A}(x,D_x)R_n\langle f,\vec\varphi\rangle = (I+T)\langle f,\vec\varphi\rangle,$$

где оператор

$$T: W_2^\kappa(G)\times\prod_{j=1}^m W_2^{\gamma_j+\kappa}(\partial G) \longrightarrow W_2^\kappa(G)\times\prod_{j=1}^m W_2^{\gamma_j+\kappa}(\partial G)$$

является вполне непрерывным. Для краткости введем обозначения

$$\mathfrak{M}^\kappa = W_2^\kappa(G)\times\prod_{j=1}^m W_2^{\gamma_j+\kappa}(\partial G)$$

и положим

$$\|\langle f,\vec{\varphi}\rangle, \mathfrak{M}^{\kappa}\| = \|f, W_2^{\kappa}(G)\| + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j, W_2^{\tau_j+\kappa}(\partial G)\|.$$

Будем искать решение задачи (1.6) в виде $U = R_n\langle f,\vec{\varphi}\rangle$. Из (2.2), используя определение R_n , имеем

$$f(\tau,x) + T_0\langle f,\vec{\varphi}\rangle + \sum a_{\beta i}\tau^{i-\ell} D_x^{\beta} R_n\langle f,\vec{\varphi}\rangle =$$
$$= \frac{1}{\tau^{\ell}} g(\tau,x) = G(\tau,x), \quad x\in G,$$
$$\varphi_j(\tau,x') + T_j\langle f,\vec{\varphi}\rangle + \sum b_{\beta i}\tau^{i-\ell_j} D_x^{\beta} R_n\langle f,\vec{\varphi}\rangle =$$
$$= \frac{1}{\tau^{\ell_j}}\psi_j(\tau,x') = \Psi_j(\tau,x'), \quad x'\in\partial G, \quad j=1,\dots,m,$$

или в векторной записи

$$(I + T + M(\tau))\langle f,\vec{\varphi}\rangle = \langle G,\vec{\Psi}\rangle. \qquad (2.3)$$

Покажем, что $\exists$ достаточно большое $\gamma>0$ такое, что при $\forall$ фиксированном τ, $\operatorname{Re}\tau>\gamma$ норма оператора $M(\tau)$ будет меньше 1.

В силу свойств оператора R_n при $\forall$ фиксированном τ, $\operatorname{Re}\tau\geq\gamma>1$ имеем:

$$\sum_{|\beta|\leq 2m,\, i\leq \ell-1} \|a_{\beta i}(x)\tau^{i-\ell} D_x^{\beta} R_n\langle f,\vec{\varphi}\rangle, W_2^{\kappa}(G)\| \leq$$

(так как коэффициенты гладкие и $i\leq \ell-1$)

$$\leq \frac{C}{|\tau|}\|R_n\langle f,\vec{\varphi}\rangle, W_2^{2m+\kappa}(G)\| \leq \frac{C'}{|\tau|}\Big[\|f, W_2^{\kappa}(G)\| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j, W_2^{\tau_j+\kappa}(\partial G)\|\Big].$$

Аналогично

$$\sum_{|\beta|\leq\mu_j,\, i\leq\ell_j-1} \|b_{\beta i}(x')\tau^{i-\ell_j} D_x^{\beta} R_n\langle f,\vec{\varphi}\rangle, W_2^{\tau_j+\kappa}(\partial G)\| \leq$$
$$\leq \frac{C}{|\tau|}\|R_n\langle f,\vec{\varphi}\rangle, W_2^{2m-1/2+\kappa}(\partial G)\| \leq$$
$$\leq \frac{C''}{|\tau|}\Big[\|f, W_2^{\kappa}(G)\| + \sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j, W_2^{\tau_j+\kappa}(\partial G)\|\Big],$$

причем константы C' и C'' не зависят от τ . Следовательно, при достаточно большом $\gamma>1$ имеем $\|M\langle f,\vec{\varphi}\rangle, \mathfrak{M}^{\kappa}\| \leq \frac{1}{2}\|\langle f,\vec{\varphi}\rangle, \mathfrak{M}^{\kappa}\|$. Отсюда при $\forall$ фиксированном τ, $\operatorname{Re}\tau>\gamma$, операторное уравнение (2.3) можно записать в виде:

$$\left[I+T\circ\left(I+M(\tau)\right)^{-1}\right]<\tilde f,\tilde{\vec\varphi}> = <G,\vec\Psi>, \tag{2.4}$$

где $<\tilde f,\tilde{\vec\varphi}> = \left(I+M(\tau)\right)<f,\vec\varphi>$.

Так как оператор $(I+M)^{-1}$ ограниченный в $\mathfrak{M}^K$ при $\forall$ фиксированном $\tau, Re\,\tau>\gamma$, причем норма $\|(I+M)^{-1}\|\leqslant c(\gamma)$; $c(\gamma)$ не зависит от τ, а оператор T вполне непрерывен в $\mathfrak{M}^K$ и от τ не зависит, то оператор $T\circ(I+M)^{-1}$ также вполне непрерывен в $\mathfrak{M}^K$, причем $\sup\limits_{\tau:\,Re\,\tau\geqslant\gamma}\|T\circ(I+M)^{-1}\|\leqslant d(\gamma)$. Поэтому при $\forall$ фиксированном $\tau, Re\,\tau>\gamma$, операторное уравнение (2.4) является уравнением Фредгольма второго рода.

Итак, вопрос о существовании решения краевой задачи (2.1) свелся к нахождению $<\tilde f,\tilde{\vec\varphi}>$ из уравнения (2.4). По альтернативе Фредгольма решение $<\tilde f,\tilde{\vec\varphi}>\in\mathfrak{M}^K$ существует либо при $\forall<G,\vec\Psi>\in\mathfrak{M}^K$, и в этом случае решение единственно, либо $<G,\vec\Psi>$ должно удовлетворять некоторым условиям ортогональности. В последнем случае решение $<\tilde f,\tilde{\vec\varphi}>$ определяется неоднозначно, однако если дополнительно потребовать, чтобы $<\tilde f,\tilde{\vec\varphi}>$ было ортогонально всем решениям однородного уравнения (2.4), то такое решение $<\tilde f,\tilde{\vec\varphi}>$ будет единственным. Из теорем Фредгольма следует также, что единственное решение уравнения (2.4) при $\forall$. фиксированном $\tau, Re\,\tau\geqslant\gamma$, удовлетворяет оценке:

$$\|<\tilde f,\tilde{\vec\varphi}>,\mathfrak{M}^K\|\leqslant c\left(\|T\circ(I+M)^{-1}\|\right)\|<G,\vec\Psi>,\mathfrak{M}^K\|\leqslant$$

$$\leqslant c(\gamma)\|<G,\vec\Psi>,\mathfrak{M}^K\|.$$

Отсюда в силу ограниченности оператора $(I+M)^{-1}$ имеем:

$$\|<f,\vec\varphi>,\mathfrak{M}^K\|\leqslant c_1(\gamma)\|<G,\vec\Psi>,\mathfrak{M}^K\|. \tag{2.5}$$

Поскольку решение краевой задачи (2.1) находится в виде $V=R_n<f,\vec\varphi>$, то, принимая во внимание свойства R_n и оценку (2.5) при фиксированном $\tau, Re\,\tau\geqslant\gamma$, получаем:

$$\|\sigma(\tau,\cdot)\|,W_2^{2m+k}(G)\|\leqslant c(\gamma)\|<G,\vec\Psi>,\mathfrak{M}^K\|.$$

Отсюда

$$\|\sigma,W_\gamma^{4m,2\ell}(G\times C_\gamma)\|\leqslant c(\gamma)\Big[\|G,W_\gamma^{2m,2\ell}(G\times C_\gamma)\|+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\|\Psi_j,W_\gamma^{4m-\mu_j-1/2,2\ell}(\partial G\times C_\gamma)\|\Big]\leqslant$$

(учитывая, что $G(\tau,x)=\tau^{-\ell}g(\tau,x)$, $\Psi_j(\tau,x')=\tau^{-\ell_j}\psi_j(\tau,x')$ имеем

$$\leqslant C(\gamma)\left[\| g, W_\gamma^{2m,\ell}(G\times C_\gamma)\| + \sum_{j=1}^{m}\|\psi_j, W_\gamma^{4m-\mu_j-1/2,\,2\ell-\ell_j}(\partial G\times C_\gamma)\|\right]. \qquad (2.6)$$

Тогда, в силу обобщенной теоремы Пэли-Винера, функция $u=\mathcal{L}_t^{-1} v$ есть решение смешанной задачи (1.1), причем имеет место оценка (1.7). Вопрос о единственности решения можно аналогичным образом свести к решению уравнения Фредгольма второго рода, используя левый регуляризатор R_ℓ векторного оператора $\mathcal{A}(x,D_x)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия. С учетом условий регуляризатор R_n в данном случае является обратным к оператору $\langle L_{2m}(D_x), B_1(D_x)|_{\partial G},\dots,B_m(D_x)|_{\partial G}\rangle$. Следовательно, уравнение (2.3) запишется в виде:

$$(I+M(\tau))\langle f,\vec{\varphi}\rangle = \langle G,\vec{\Psi}\rangle.$$

Поскольку норма оператора $M(\tau)$ при достаточно большом $\gamma>0$ мала, то $\langle f,\vec{\varphi}\rangle=(I+M(\tau))^{-1}\langle G,\vec{\Psi}\rangle$. Тогда функция $u=\mathcal{L}_t^{-1}(R_n\langle f,\vec{\varphi}\rangle)$ будет решением смешанной задачи (1.6). Единственность решения показывается аналогично. Оценка (1.7) в силу теоремы Пэли-Винера следует из (2.6).

§3. Оценки решения первой смешанной краевой задачи для уравнения С.Л.Соболева при $t\to\infty$

Рассмотрим смешанную краевую задачу (1.8). Как известно [1], для решения этой задачи имеет место закон сохранения интеграла энергии

$$\mathcal{J}(t) = \int_G \sum_{k=1}^{n}(D_{tx_k}^2 u)^2 + (D_n u)^2\,dx \equiv \mathcal{J}(0). \qquad (3.1)$$

Отсюда получаем

$$\|u(t,x), L_2(G)\| \leqslant C_1, \qquad (3.2)$$

$$\|D_t u(t,x), \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)\| \leqslant C_2, \qquad (3.3)$$

где C_1, C_2 - константы, не зависящие от u и t. Оценка (3.3) может быть обобщена для производных u по t высших порядков.

Лемма 1. *Для решения задачи* (1.8) *имеют место равномерные по* t *оценки*

$$\|D_t^\ell u(t,x), \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)\| \leqslant C, \quad \ell \geqslant 1. \qquad (3.4)$$

Доказательство. Умножая уравнение Соболева (1.8) на произвольную функцию $v(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ и интегрируя по частям, получаем:

$$\langle D_t^2 \nabla u, \nabla v\rangle_{L_2} + \langle D_n u, D_n v\rangle_{L_2} = 0.$$

Отсюда из тождества интеграла энергии имеем:

$$|\langle D_t^2 u, v\rangle_{\overset{\circ}{W}{}_2^1}| \leqslant C\|D_n v, L_2(G)\| \leqslant C\|v, \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)\|$$

и, следовательно, в силу произвольности $v(x)$ получаем оценку (3.4) при $\ell=2$. Аналогично при $\ell\geqslant 3$.

Теорема 2. *Решение* u *смешанной задачи* (1.8) для почти всех $x\in\bar{G}$ удовлетворяет условию

$$\frac{u^2(t,x)}{t\ln^{1+\varepsilon}t}\longrightarrow 0,\quad t\to\infty,\quad \forall\varepsilon>0.$$

Доказательство. Из оценок (3.2),(3.3) для $\forall\varepsilon>0$ имеем:

$$\int\limits_R^\infty\int\limits_G\frac{|D_t u|^2}{t\ln^{1+\varepsilon}t}\,dx\,dt<\infty,\quad \int\limits_R^\infty\int\limits_G\frac{|u|^2}{t\ln^{1+\varepsilon}t}\,dx\,dt<\infty,$$

поэтому при почти всех $x\in\bar{G}$ интегралы

$$\int\limits_R^\infty\frac{|D_t u|^2}{t\ln^{1+\varepsilon}t}\,dt\quad \text{и}\quad \int\limits_R^\infty\frac{|u|^2}{t\ln^{1+\varepsilon}t}\,dt$$

конечны. Следовательно, существует такая последовательность $t_k\to\infty$, что

$$\frac{|u(t_k,x)|^2}{t_k\ln^{1+\varepsilon}t_k}\longrightarrow 0$$

при почти всех $x\in\bar{G}$. Для почти всех $x\in\bar{G}$ имеем

$$\frac{|u(t,x)|^2}{t\ln^{1+\varepsilon}t}-\frac{|u(t_k,x)|^2}{t_k\ln^{1+\varepsilon}t_k}=\int\limits_{t_k}^{t}\frac{D_\tau|u(\tau,x)|^2}{\tau\ln^{1+\varepsilon}\tau}\,d\tau-$$
$$-\int\limits_{t_k}^{t}|u(\tau,x)|^2\left(\frac{1}{\tau^2\ln^{1+\varepsilon}\tau}+\frac{1+\varepsilon}{\tau\ln^{2+\varepsilon}\tau}\right)d\tau.$$

Так как оба интеграла конечны при $t\geqslant R$, то, переходя к пределу при $K\to\infty$, получаем

$$\frac{|u(t,x)|^2}{t\ln^{1+\varepsilon}t}\leqslant 2\left[\int\limits_t^\infty\frac{|D_\tau u|^2}{\tau|\ln^{1+\varepsilon}\tau|}\,d\tau\right]^{1/2}\left[\int\limits_t^\infty\frac{|u|^2}{\tau|\ln^{1+\varepsilon}\tau|}\,d\tau\right]^{1/2}+$$
$$+\int\limits_t^\infty\frac{|u|^2}{\tau^2|\ln^{1+\varepsilon}\tau|}\,d\tau+\int\limits_t^\infty\frac{|u|^2(1+\varepsilon)}{\tau|\ln^{2+\varepsilon}\tau|}\,d\tau. \tag{3.5}$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.

Доказательство следствия (1.10) к теореме 2. Функции

$$f_1(x)=\int\limits_R^\infty\frac{|u|^2}{t\ln^{1+\varepsilon}t}\,dt,\quad f_2(x)=\int\limits_R^\infty\frac{|D_t u|^2}{t\ln^{1+\varepsilon}t}\,dt$$

являются суммируемыми на G. По теореме Лузина, для любого $\delta > 0$ существует множество $G_\delta \subset G$, $mG_\delta < \delta$ такое, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны на $G \setminus G_\delta$. Следовательно, существует константа K_δ, зависящая только от δ, такая, что

$$\int_R^\infty \frac{|u|^2}{t \ln^{1+\varepsilon} t} dt < K_\delta, \quad \int_R^\infty \frac{|D_t u|^2}{t \ln^{1+\varepsilon} t} dt < K_\delta$$

для всех $x \in G \setminus G_\delta$. Тогда утверждение следствия (1.10) получается из оценки (3.5).

Лемма 2. *Пусть G' - подобласть области G, $\bar{G}' \subset G$. Тогда для решения задачи* (1.8) *имеют место оценки:*

$$\| D_t^\ell D^2_{x_j x_k} u, L_2(G') \| \leqslant c_1 t + c_2, \; j,k = 1, \ldots, n, \tag{3.6}$$

$$\| D_t^{\ell-1} D_{x_n} \nabla u, L_2(G') \| < c_3 t + c_4, \; \ell \geqslant 1, \tag{3.7}$$

где константы c_i зависят от области G' и начальных условий.

Доказательство. Пусть функция $\chi(x) \in C_0^\infty(G)$ тождественно равна 1 на $\bar{G}'$ и 0 вне G'', где $\bar{G}'' \subset G$, $\bar{G}' \subset G''$. Действуя оператором С.Л.Соболева на функцию $v(t,x) = \chi(x) u(t,x)$, получаем

$$D_t^2 \Delta v + D^2_{x_n} v = a_1(x) D_t^2 u + a_2(x) u + (\vec{a}_3(x), D_t^2 \nabla u) + a_4(x) D_{x_n} u, \tag{3.8}$$

где коэффициенты $a_i(x) \in C_0^\infty$ зависят от $\chi(x)$. Обозначим правую часть (3.8) через $f(t,x)$. Из оценок (3.2)-(3.4) вытекает равномерная по t оценка:

$$\| f(t,x), L_2(G) \| \leqslant c. \tag{3.9}$$

Умножая скалярно в $L_2(G)$ обе части равенства (3.8) на функцию $D_t \Delta v(t,x)$ и интегрируя от 0 до t, получаем

$$\frac{1}{2} \int_G (D_t \Delta v)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_G (D^2_{in} v)^2 dx \Big|_0^t = \int_0^t \int_G f \cdot D_{t'} \Delta v \, dx \, dt'. \tag{3.10}$$

Из (3.9) следует равномерная по t оценка

$$\| D_t \Delta v(t,x), L_2(G) \| \leqslant c_1 + c_2 t.$$

Поскольку $v(t,x) \equiv 0$ при $x \in \bar{G} \setminus G''$, то для $\forall j,k = 1, \ldots, n$ имеет место оценка

$$\| D_t D^2_{kj} v(t,x), L_2(G) \| \leqslant c_1 + c_2 t. \tag{3.11}$$

Учитывая эту оценку, из (3.10) получаем также, что

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_G |D^2_{in} v(t,x)|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant c_3 + c_4 t. \tag{3.12}$$

Так как $v(t,x)=\chi(x)u(t,x)$, то из (3.11)-(3.12) следуют оценки (3.6),(3.7) при $\ell=1$. Для доказательства оценок (3.6),(3.7) при $\ell=2$ продифференцируем обе части (3.8) по t и, умножив скалярно на функцию $D_t^2\Delta u$, повторим предыдущие рассуждения.

Лемма 3. *Пусть u - решение задачи* (1.8), *а G' - подобласть области G, $\bar G'\subset G$. Тогда для решения u имеют место оценки:*

$$\|D_t^\ell u(t,x), W_2^m(G')\|\le c_1 t^{m-1}+c_2,\quad m\ge 1,\ \ell\ge 1,$$

$$\|u(t,x), W_2^m(G')\|\le c_3 t^m+c_4, \tag{3.13}$$

где константы c_i зависят только от G' и начальных данных.

Доказательство. Из (3.4),(3.6) следует оценка (3.13) при $m=2$. Докажем справедливость (3.13) при $m\ge 3$. Рассмотрим случай $m=3$. Пусть u - решение краевой задачи (1.8). Тогда, сохранив обозначения леммы 2, получим что для функции $v(t,x)=\chi(x)u(t,x)$ имеет место тождество (3.8). Применив к обеим частям этого тождества оператор Δ, умножим полученное тождество на функцию $D_t\Delta v$ и проинтегрируем по области G''' такой, что $\bar G''\subset G'''\subset \bar G'''\subset G$. Учитывая, что $v(t,x)=0$ при $x\in \bar G'''\setminus G''$, имеем

$$\langle D_t^2\nabla\Delta v, D_t\nabla\Delta v\rangle_{L_2}+\langle D_n\Delta v, D_t D_n\Delta v\rangle=$$

$$=\langle\vec\varphi, D_t\nabla\Delta v\rangle_{L_2},$$

где $\vec\varphi(t,x)=\nabla f(t,x)$.

После интегрирования от 0 до t получим

$$\|D_t\nabla\Delta v(t,x),L_2(G''')\|^2+\|D_n\Delta v(t,x),L_2(G''')\|^2\Big|_0^t=2\int_0^t\langle\vec\varphi,D_\tau\nabla\Delta v\rangle_{L_2}d\tau. \tag{3.14}$$

Поскольку из оценок (3.4),(3.6),(3.7) следует, что

$$\|\vec\varphi(t,x),L_2(G''')\|<c'+c''t,$$

где c', c'' - константы, зависящие от G'', $u_i(x)$, то из (3.14) получаем равномерную по t оценку

$$\|D_t\nabla\Delta v(t,x),L_2(G''')\|<c_1+c_2t^2.$$

Так как $v(t,x)=0$ при $x\in\bar G'''\setminus G''$, то для $\forall i,j,k=1,\dots,n$ имеем:

$$\|D_tD_{ijk}^3 v(t,x),L_2(G)\|\le c_1+c_2t^2.$$

Тогда из (3.14) получаем также:

$$\|D_nD_{ij}^2 v(t,x),L_2(G)\|<c_3+c_4t^2.$$

Следовательно, при $\ell=1$ имеют место оценки, равномерные по t:

$$\| D_t^{l} D_{ijk}^{3} u(t,x), L_2(G')\| \le c_1 + c_2 t^2, \tag{3.15}$$

$$\| D_t^{l-1} D_{ij}^{2} D_n u(t,x), L_2(G')\| \le c_3 + c_4 t^2, \tag{3.16}$$

$k, i, j = 1, \ldots, n.$

Доказательство их при $l \geq 2$ аналогично.

Из оценок (3.4), (3.6), (3.15) следует первая оценка (3.13) при $m=3$. Оценки при произвольном $m \geq 4$ доказываются по индукции аналогично. Вторая оценка в (3.13) следует из оценок для $D_t u$.

Теорема 3. *Пусть* u *- решение смешанной задачи* (1.8), G' *- подобласть области* G, $\bar{G}' \subset G$, $m > \frac{n}{k} + k$, *где* n *- размерность области* G, *а* m *- целое. Тогда имеет место оценка*

$$\sup_{\substack{x \in G' \\ |\alpha| = k}} |D_x^{\alpha} u(t,x)| < c_1 t^{\frac{n}{2}+k} + c_2, \tag{3.17}$$

$$\sup_{\substack{x \in G' \\ |\alpha| = k}} |D_t^{l} D_x^{\alpha} u(t,x)| \le c_3 t^{(\frac{n}{2}+k)(\frac{m-1}{m})} + c_4, \quad l \geq 1, \tag{3.18}$$

где константы c_i *зависят от области* G', *начальных данных задачи* (1.8) *и не зависят от* t.

Доказательство. Пусть функция $f \in W_2^m(g)$. Положим $\varkappa = (|\rho| + \frac{n}{2})\frac{1}{m}$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$. Из работы [17, с.138] следует, что при $\varkappa < 1$ имеет место оценка

$$\sup_{x \in g} |D_x^{\rho} f(x)| \le c_1 h^{1-\varkappa} \sum_{j=1}^{n} \| D_{x_j}^{m} f(x), L_2(g)\| + c_2 h^{-\varkappa} \| f(x), L_2(g)\|, \tag{3.19}$$

где c_1, c_2 не зависят от f и h, а $h > 0$ - произвольный параметр.

Полагая в (3.19) $h = t^{-(m-1)}$, $|\rho| = k$, $f = D_t u$, а $g = G'$, получаем

$$\sup_{x \in G'} |D_t^{l} D_x^{\alpha} u(t,x)| \le c_3 t^{(\frac{n}{2}+k)(\frac{m-1}{m})} + c_4, \quad |\alpha| = k.$$

Полагая в (3.19) $h = t^{-m}$, $|\rho| = k$, $f = u$, $g = G'$, имеем

$$\sup_{x \in G'} |D_x^{\alpha} u(t,x)| \le c_1 t^{(\frac{n}{2}+k)} + c_2 .$$

Утверждения теоремы 3 доказаны.

§4. Оценки решения смешанной краевой задачи (1.8) в окрестности границы области G

Лемма 4. *Пусть* G *- область с гладкой границей* $\partial G \in C^{m+1}$. *Тогда решение смешанной краевой задачи* (1.8) *удовлетворяет оценке*

$$\| D_t^\ell u(t,x), W_2^m(G) \| \leq c_1 t^{4(m-1)} + c_2 , \quad \ell \geq 1, \quad m \geq 2, \tag{4.0}$$

где константы c_1, c_2 *не зависят от* t.

Доказательство. Пусть x_0 - произвольная точка границы ∂G. Допустим, что в некоторой 3ε-окрестности точки x_0 уравнение поверхности $\partial G \cap \cap \{ |x - x_0| < 3\varepsilon \}$ имеет вид: $x_1 = \varphi(x')$, $x' = (x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть функция $\chi(x) \in C_0^\infty(R_n)$, $\chi(x) \equiv 1$ при $|x - x_0| < \varepsilon$, $\chi(x) \equiv 0$ при $|x - x_0| > 2\varepsilon$. Тогда для функции $v(t,x) = \chi(x) u(t,x)$ имеет место тождество:

$$D_t^3 \Delta v + D_{x_n}^2 v = a_1 D_t^2 u + a_2 u + (\vec{a}_3, D_t^2 \nabla u) + a_4 D_n u, \tag{4.1}$$

причем на множестве $\{ |x - x_0| \geq 2\varepsilon \cap \bar{G} \}$ выполняется $v(t,x) \equiv 0$. Сделаем замену переменных:

$$y_1 = x_1 - \varphi(x'), \quad y_j = x_j, \quad j \geq 2.$$

Сохраняя прежние обозначения для функций u и v, запишем уравнение (4.1) в новых переменных:

$$D_t^2 \left[\Delta v + D_1^2 v \cdot \sum_2^n (D_k \varphi)^2 - 2 \sum_2^n D_{1k}^2 v \cdot (D_k \varphi) \right] +$$

$$+ D_n^2 v + D_1^2 v (D_n \varphi)^2 - 2 D_{1n}^2 v (D_n \varphi) = F(t,y), \tag{4.2}$$

$$F = D_t^2 D_1 v \left(\sum_2^n D_k^2 \varphi \right) + D_1 v (D_n^2 \varphi) + a_1 D_t^2 u + a_2 u +$$

$$+ (\vec{a}_3, D_t^2 \nabla u) + (\vec{a}_4, \nabla u),$$

причем

$$v(t, 0, y_2, \ldots, y_n) \equiv 0.$$

Докажем, что для $\forall j = 2, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, n$ имеют место равномерные по t оценки:

$$\| D_t^\ell D_{ji} v(t,y), L_2 \| \leq c_1 + c_2 t^2, \quad \ell \geq 1. \tag{4.3}$$

Рассмотрим, например, случай $j = 2$. Продифференцируем обе части (4.2) по y_2 и умножим скалярно на функцию $D_t D_2 v$. Обозначим $D_2 v$ через w. Тогда будем иметь равенство

$$< D_t^2 \Delta w + D_t^2 D_1^2 w \sum_2^n (D_k \varphi)^2 - 2 D_t^2 \sum_2^n D_{1k}^2 w (D_k \varphi) +$$

$$+D_n^2 w + D_1^2 w (D_n \varphi)^2 - 2D_{1n}^2 w (D_n \varphi), D_t w>_{L_2} =$$

$$=<D_2 F - \sum_2^n D_2 (\alpha_k^2) D_t^2 D_1^2 v + 2\sum_2^n D_2 (\alpha_k) D_t^2 D_{1k}^2 v -$$

$$-D_2 (\alpha_n^2) D_1^2 v + 2D_2 (\alpha_n) D_{1n}^2 v, D_t w>_{L_2}, \tag{4.4}$$

$$\alpha_k = D_k \varphi, \quad k=2,\dots,n.$$

Учитывая равенства

$$2<D_t^2 D_{1k}^2 w \cdot \alpha_k, D_t w>_{L_2} = -D_t <D_t D_k w \alpha_k, D_t D_1 w>_{L_2} +$$

$$+<D_t^2 w \cdot D_k (\alpha_k), D_t D_1 w>_{L_2}, \tag{4.5}$$

$$2<D_{1n}^2 w \cdot \alpha_n, D_t w>_{L_2} = -D_t <D_n w \cdot \alpha_n, D_1 w>_{L_2} +$$

$$+<w \cdot D_n (\alpha_n), D_t D_1 w>_{L_2}, \tag{4.6}$$

после интегрирования по частям равенство (4.4) можно записать в виде:

$$-\frac{1}{2} D_t \| D_t \nabla w, L_2 \|^2 - \frac{1}{2}\sum_2^n D_t \| D_t D_1 w \cdot \alpha_k, L_2 \|^2 +$$

$$+\sum_2^n \Big[D_t < D_t D_k w, \alpha_k D_t D_1 w>_{L_2} - <D_t^2 w \cdot D_k \alpha_k,$$

$$D_t D_1 w>_{L_2} \Big] - \frac{1}{2} D_t \| D_n w, L_2 \|^2 - \frac{1}{2} D_t \| \alpha_n D_1 w, L_2 \|^2 +$$

$$+ D_t <D_n w, \alpha_n D_1 w>_{L_2} - <w \cdot D_n (\alpha_n), D_t D_1 w>_{L_2} =$$

$$= - <F, D_t D_2 w>_{L_2} - <\varphi, D_t D_1 w>_{L_2},$$

$$\varphi = \sum_2^n \left(-D_2 (\alpha_k^2) D_t^2 D_1 v + 2D_2 (\alpha_k) D_t^2 D_k v\right) -$$

$$- D_2 (\alpha_n^2) D_1 v + 2D_2 (\alpha_n) D_n v.$$

Проинтегрировав это равенство от 0 до t и обозначив

$$\| D_t D_1 w, L_2 \|^2 + \sum_2^n \| D_t D_k w - \alpha_k D_t D_1 w, L_2 \|^2 +$$

$$+ \| D_n w - \alpha_n D_1 w, L_2 \|^2$$ через $\mathcal{A}(t)$, получим

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(0) + 2\int_0^t \langle F, D_\tau D_2 w\rangle_{L_2} d\tau + \\ +2\int_0^t \langle \varphi + f, D_\tau D_1 w\rangle_{L_2} d\tau, \tag{4.7}$$

где

$$f = -\sum_2^n D_t^2 w \cdot D_\kappa(\alpha_\kappa) - w \cdot D_n(\alpha_n).$$

Поскольку из оценок (3.2)-(3.4) следует равномерная по t оценка

$$\| F(t,\cdot), L_2\| + \|\varphi(t,\cdot) + f(t,\cdot), L_2\| \leqslant c_1 + c_2 t,$$

то из (4.7) имеем

$$\mathcal{A}(t) \leqslant \mathcal{A}(0) + 2\int_0^t (c_1 + c_2\tau)\Big[\| D_\tau D_2 w(\tau,\cdot), L_2\| + \\ + \| D_\tau D_1 w(\tau,\cdot), L_2\|\Big] d\tau \leqslant \\ \leqslant \mathcal{A}(0) + 2\int_0^t (c_1 + c_2\tau)\Big[\| D_\tau D_2 w(\tau,\cdot) - \alpha_2 D_\tau D_1 w(\tau,\cdot), L_2\| + \\ + \|(1+\alpha_2) D_\tau D_1 w(\tau,\cdot), L_2\|\Big] d\tau \leqslant \\ \leqslant \mathcal{A}(0) + 2\int_0^t (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2\tau)\Big[\| D_\tau D_2 w(\tau,\cdot) - \\ - \alpha_2 D_\tau D_1 w(\tau,\cdot), L_2\| + \| D_\tau D_1 w(\tau,\cdot), L_2\|\Big] d\tau \leqslant \\ \leqslant \mathcal{A}(0) + 2\int_0^t (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2\tau)\Big[\| D_\tau D_1 w(\tau,\cdot), L_2\| + \\ + \sum_2^n \| D_t D_\kappa w(\tau,\cdot) - \alpha_\kappa D_\tau D_1 w(\tau,\cdot), L_2\|\Big] d\tau.$$

Отсюда

$$\Big[\| D_t D_1 w(t,\cdot), L_2\| + \sum_2^n \| D_t D_\kappa w(t,\cdot) - \alpha_\kappa D_t D_1 w(t,\cdot), L_2\|\Big]^2 \leqslant \\ \leqslant c_3 + \int_0^t (c_4 + c_5\tau)\Big[\| D_\tau D_1 w, L_2\| + \sum_2^n \| D_\tau D_\kappa w - \alpha_\kappa D_\tau D_1 w, L_2\|\Big] d\tau.$$

Равномерно по t имеем:

$$\| D_t D_1 w(t,\cdot), L_2\| + \sum_2^n \| D_t D_\kappa w(t,\cdot) - \alpha_\kappa D_t D_1 w(t,\cdot), L_2\| \leqslant c' + c'' t^2,$$

и, значит, для $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\| D_t D_i w(t,\cdot), L_2\| \leqslant \tilde{c} + \tilde{c}' t^2.$$

Так как $w(t,x)=\mathcal{D}_2 v(t,x)$, то оценка (4.3) доказана при $\ell=1$, $j=2$. Аналогично по индукции доказывается оценка при $j\geq 3$, $\ell\geq 2$. Оценим теперь функцию $\mathcal{D}_t \mathcal{D}_1^2 v$. Из тождества (4.2) имеем

$$(1+\sum_2^n \alpha_k^2)\mathcal{D}_t^2 \mathcal{D}_1^2 v + \alpha_n^2 \mathcal{D}_1^2 v = -\mathcal{D}_t^2 \Delta' v +$$
$$+2\sum_2^n \mathcal{D}_t^2 \mathcal{D}_{1k}^2 v\cdot\alpha_k - \mathcal{D}_n^2 v + 2\mathcal{D}_{1n}^2 v\cdot\alpha_n + F.$$

Обозначив правую часть этого равенства через Φ и умножив скалярно в L_2 на $\mathcal{D}_t \mathcal{D}_1^2 v$, получим

$$\mathcal{D}_t \left\| \sqrt{1+\sum_2^n \alpha_k^2}\cdot \mathcal{D}_t \mathcal{D}_1^2 v(t,\cdot), L_2 \right\|^2 +$$
$$+\mathcal{D}_t \left\|\alpha_n \mathcal{D}_1^2 v(t,\cdot), L_2\right\|^2 = 2<\Phi, \mathcal{D}_t \mathcal{D}_1^2 v>_{L_2}.$$

Отсюда

$$\left\|\sqrt{1+\sum_{k=2}^n \alpha_k^2}\,\mathcal{D}_t \mathcal{D}_1^2 v(t,\cdot), L_2\right\|^2 + \left\|\alpha_n \mathcal{D}_1^2 v(t,\cdot), L_2\right\|^2\Big|_0^t =$$
$$= 2\int_0^t <\Phi, \mathcal{D}_\tau \mathcal{D}_1^2 v>_{L_2} d\tau. \tag{4.8}$$

Так как из оценок (4.3) вытекает равномерная по t оценка

$$\|\Phi(t,\cdot), L_2\| \leq c_1 + c_2 t^3,$$

то из тождества (4.8) при $\ell=1$ получаем

$$\|D_t^\ell D_1^2 v(t,\cdot), L_2\| \leq c' + c'' t^4. \tag{4.9}$$

Доказательство при $\ell\geq 2$ проводится по индукции аналогично.

Из оценок (4.3),(4.9) следует оценка (4.0) в ε-окрестности точки $x_0\in\partial G$ при $m=2$. Докажем оценку (4.0) при $m=3$. Сохранив прежние обозначения, доказательство проведем в три этапа: вначале оценим функции $\mathcal{D}_t^\ell \mathcal{D}_{jq}\nabla v(t,y)$ при $j,q\geq 2$, $\ell\geq 1$; затем - функции $\mathcal{D}_t^\ell \mathcal{D}_{11}^2 \mathcal{D}_j v$ при $j\geq 2$, $\ell\geq 1$ и, наконец, - функции $\mathcal{D}_t^\ell \mathcal{D}_{111}^3 v(t,y)$ при $\ell\geq 1$. В результате будут оценены все производные 3-го порядка по переменным y. Следовательно, возвращаясь к старым переменным и используя оценки при $m=2,1$, получаем оценки (4.0) при $m=3$. Действуя оператором $\mathcal{D}_{pq}^2 (p,q\geq 2)$ на тождество (4.2), имеем

$$\mathcal{D}_t^2\left[\Delta \mathcal{D}_{pq}^2 v + \mathcal{D}_1^2 \mathcal{D}_{pq}^2 v\cdot\sum_2^n \alpha_k^2 - 2\sum_2^n \mathcal{D}_{1k}^2 \mathcal{D}_{pq}^2 v\alpha_k\right] +$$
$$+\mathcal{D}_n^2 \mathcal{D}_{pq}^2 v + \mathcal{D}_1^2 \mathcal{D}_{pq}^2 v(\alpha_n)^2 - 2\mathcal{D}_{1n}^2 \mathcal{D}_{pq}^2 v\alpha_n = \mathcal{D}_{pq}^2 F -$$
$$-\sum_2^n \mathcal{D}_t^2\left[\mathcal{D}_1^2(\mathcal{D}_p v\cdot \mathcal{D}_q\alpha_k^2 + \mathcal{D}_q v\mathcal{D}_p\alpha_k^2 + v\mathcal{D}_{pq}^2\alpha_k^2) -\right.$$
$$\left.-2\mathcal{D}_{1k}^2(\mathcal{D}_p v\mathcal{D}_q\alpha_k + \mathcal{D}_q v\mathcal{D}_p\alpha_k + v\mathcal{D}_{pq}^2\alpha_k)\right] -$$

$$-D_1^2\left(D_p v D_q \alpha_n^2 + D_q v D_p \alpha_n^2 + v D_{pq}^2 \alpha_n^2\right)+$$

$$+2D_{1n}^2\left(D_p v D_q \alpha_n + D_q v D_p \alpha_n + v D_{pq}^2 \alpha_n\right). \tag{4.10}$$

Умножим обе части этого тождества скалярно в L_2 на функцию $D_t D_{pq}^2 v = D_t w$. Учитывая равенства (4.5)-(4.6), после интегрирования по частям получаем:

$$-\frac{1}{2}D_t\left[\| D_t D_1 w, L_2 \|^2 + \sum_2^n \| D_t D_k w - \alpha_k D_t D_1 w, L_2 \|^2\right] -$$

$$-\frac{1}{2}D_t \| D_n w - \alpha_n D_1 w, L_2 \|^2 = \sum_2^n < D_t^2 w, D_k \alpha_k D_t D_1 w >_{L_2} +$$

$$+ < w \cdot D_n \alpha_n + \varphi, D_t D_1 w >_{L_2} - < D_q F, D_t D_p w >_{L_2},$$

где

$$\varphi = \sum_2^n D_t^2 \left[D_1\left(D_p v D_q \alpha_k^2 + D_q v D_p \alpha_k^2 + v D_{pq}^2 \alpha_k^2\right) -\right.$$

$$\left. - 2D_k\left(D_p v D_q \alpha_k + D_q v D_p \alpha_k + v D_{pq}^2 \alpha_k\right)\right] +$$

$$+ D_1\left(D_p v D_q \alpha_n^2 + D_q v D_p \alpha_n^2 + v D_{pq}^2 \alpha_n^2\right) -$$

$$-2D_n\left(D_p v D_q \alpha_n + D_q v D_p \alpha_n + v D_{pq}^2 \alpha_n\right).$$

Из оценок (4.3) вытекает, что

$$\| D_t^2 w(t,\cdot), L_2 \| \le c_1 + c_2 t^2; \quad \| w(t,\cdot), L_2 \| \le c_3 + c_4 t^3;$$

$$\| D_q F(t,\cdot), L_2 \| \le c_5 + c_6 t^3; \quad \| \varphi(t,\cdot), L_2 \| \le c_7 + c_8 t^3,$$

где c_i - константы, не зависящие от t. Повторяя рассуждения, проведенные при выводе оценки (4.3), получаем равномерную по t оценку

$$\| D_t^\ell D_{ipq}^3 v(t,\cdot), L_2 \| \le c' + c'' t^4, \tag{4.11}$$

$$p, q \ge 2, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \ell \ge 1.$$

Оценим функции $D_t^\ell D_1^2 D_j v$, $j \ge 2$, $\ell \ge 1$. Продифференцировав тождество (4.2) по y_j, имеем:

$$D_t^2 D_1^2 D_j v\left(1 + \sum_2^n (\alpha_k)^2\right) + D_1^2 D_j v \cdot \alpha_n^2 = D_j F -$$

$$-D_t^2\left[\Delta' D_j v + D_1^2 v\cdot\sum_2^n D_j(\alpha_k^2) - 2\sum_2^n D_j\,(D_{1k}^2\, v\alpha_k)\right] -$$

$$- D_n^2 D_j v - D_1^2 v\, D_j\,\alpha_n^2 + 2D_j\,(D_m^2\, v\cdot\alpha_n).$$

Обозначим правую часть этого тождества через $\Phi(t,y)$. Из оценок (4.3),(4.9) следует, что

$$\|\Phi(t,\cdot),L_2\| \leqslant c_1 + c_2 t^5.$$

Поэтому, как и при выводе оценки (4.9), получаем равномерную по t оценку

$$\| D_t^\ell D_1^2 D_j\, v(t,\cdot), L_2\| \leqslant c' + c'' t^6, \quad \ell \geqslant 1,\ j\geqslant 2. \tag{4.12}$$

Наконец, оценим функцию $D_t^\ell D_1^3 v$. Продифференцировав тождество (4.2) по y_1, имеем:

$$D_t^2 D_1^3 v\cdot\left(1+\sum_2^n \alpha_k^2\right) + D_1^3 v\cdot\alpha_n^2 = D_1 F -$$

$$- D_t^2\left[\Delta' D_1 v - 2\cdot\sum_2^n D_{1k}^3\, v\cdot\alpha_k\right] - D_n^2 D_1 v + 2D_{1n}^3\, v\cdot\alpha_n.$$

Обозначив правую часть этого тождества через $\Phi(t,y)$, из оценок (4.3), (4.9),(4.12) имеем:

$$\|\Phi(t,\cdot),L_2\| \leqslant c_1 + c_2 t^7.$$

Как и при выводе оценки (4.9), имеем равномерную по t оценку

$$\| D_t^\ell D_1^3\, v(t,\cdot), L_2\| < c' + c'' t^8. \tag{4.13}$$

Итак, из оценок (4.3),(4.9),(4.11)-(4.13) следует, что в ε-окрестности точки $x_0\in\partial G$ имеет место равномерная по t оценка:

$$\| D_t^\ell u(t,\cdot), W_2^3\| \leqslant c_1 + c_2 t^8.$$

В силу компактности границы ∂G оценка (4.0) при $m=3$ доказана. Доказательство оценки в случае $m\geqslant 4$ проводится по индукции аналогично. Лемма 4 полностью доказана.

Лемма 5. *Пусть G – область с гладкой границей $\partial G\subset C^{m+1}$. Обозначим через $G_2\subset G$ полоску, прилегающую к куску границы, имеющей представление $x_n=\varphi(x')$, $\varphi\in C^{m+1}$. Тогда решение смешанной краевой задачи* (1.8) *на G_2 удовлетворяет оценке*

$$\| D_t^\ell u(t,x), W_2^m(G_2)\| \leqslant c_1 t^{3m-4} + c_2, \tag{4.14}$$

где $\ell\geqslant 1$, $m\geqslant 2$, а константы c_i не зависят от t.

Доказательство. Пусть в некоторой 3ε-окрестности точки $x_0\in\partial G$

уравнение поверхности $\partial G \cap \{|x_0 - x| < 3\varepsilon\}$ имеет вид $x_n = \varphi(x')$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Сделаем замену переменных:

$$y_j = x_j, \quad j \leqslant n-1, \quad y_n = x_n - \varphi(x').$$

Сохранив обозначения, как при доказательстве леммы 4, запишем равенство (4.1) в новых переменных:

$$D_t^2\Big[\Delta v + D_n^2 v \cdot \sum_1^{n-1} (D_k\varphi)^2 - 2\sum_1^{n-1} D_{nk}^2 v\,(D_k\varphi)\Big] + D_n^2 v = F(t,y), \qquad (4.15)$$

где

$$F = D_t^2 D_n v\Big(\sum_1^{n-1} D_k^2\varphi\Big) + a_1 D_t^2 u + a_2 \cdot u + \vec{a}_3 D_t^2 \nabla u + \vec{a}_4 \nabla u,$$

причем $v(t, y', 0) \equiv 0$.

Докажем, что для $\forall j = 1, \ldots, n-1,\ i = 1, \ldots, n$ имеют место равномерные по t оценки

$$\| D_t^\ell D_{ji}^2 v(t,\cdot), L_2 \| \leqslant c_1 + c_2 t, \quad \ell \geqslant 1. \qquad (4.16)$$

Рассуждения будем проводить по той же схеме, что и при выводе оценки (4.3).

Дифференцируя тождество (4.15) по y_j, $j \leqslant n-1$, имеем

$$D_t^2\Big[\Delta D_j v + D_n^2 D_j v \cdot \sum_1^{n-1} \alpha_k^2 - 2\sum_1^{n-1} D_{nk}^2 D_j v \cdot \alpha_k\Big] +$$
$$+ D_n^2 D_j v = D_j F - D_t^2 D_n^2 v \cdot D_j \sum_1^{n-1} \alpha_k^2 +$$
$$+ 2 D_t^2 \sum_1^{n-1} D_{nk}^2 v \cdot D_j \alpha_k .$$

Обозначив $D_j v$ через w и умножив обе части этого тождества скалярно в L_2 на функцию $D_t w$, получим:

$$-\frac{1}{2} D_t \| D_t \nabla w, L_2 \|^2 - \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} D_t \| \alpha_k D_t D_n w, L_2 \|^2 +$$
$$+ \sum_1^{n-1} \Big[D_t < D_t D_k w, \alpha_k D_t D_n w >_{L_2} - < D_t^2 w \cdot D_k \alpha_k ,$$
$$D_t D_n w >_{L_2} \Big] - \frac{1}{2} D_t \| D_n w, L_2 \|^2 = - < F, D_t D_j w >_{L_2} +$$
$$+ < D_t^2 D_n v D_j \Big(\sum_1^{n-1} \alpha_k^2\Big) - 2 D_t^2 \sum_1^{n-1} D_k v D_j (\alpha_k), D_t D_n w >_{L_2} .$$

Интегрируя это тождество от 0 до t, имеем

$$\|D_t D_n w, L_2\|^2 + \sum_1^{n-1} \|D_t D_k w - \alpha_k D_t D_n w, L_2\|^2 +$$

$$+ \|D_n w, L_2\|^2 \Big|_0^t = 2\int_0^t \langle F, D_\tau D_j w\rangle_{L_2} d\tau -$$

$$- 2\int_0^t \langle \varphi, D_\tau D_n w\rangle d\tau,$$

где $\varphi = D_t^2 D_n v D_j \sum_1^{n-1} \alpha_k^2 - 2D_t^2 \sum_1^{n-1} D_k v D_j \alpha_k + D_t^2 w \cdot D_k (\alpha_k)$.

Из оценок (3.2)-(3.4) следует, что

$$\|F(t,\cdot)\|, L_2\| + \|\varphi(t,\cdot), L_2\| < c,$$

поэтому, как и при выводе оценки (4.3), получаем равномерно по t оценку

$$\|D_t D_n w(t,\cdot), L_2\| + \sum_1^{n-1} \|D_t D_k w(t,\cdot) - \alpha_k D_t D_n w(t,\cdot), L_2\| \le c' + c''t,$$

и, следовательно, оценка (4.16) при $\ell = 1$ доказана. При $\ell \geq 2$ доказательство аналогично.

Оценим теперь функцию $D_t D_n^2 v$. Из тождества (4.15) имеем равенство

$$D_t^2 D_n^2 v \left(1 + \sum_1^{n-1} \alpha_k^2\right) + D_n^2 v = F - D_t^2 \Delta' v + 2D_t^2 \sum_1^{n-1} D_{nk}^2 v \cdot \alpha_k .$$

Умножая его скалярно в L_2 на функцию $D_t D_n^2 v$ и интегрируя от 0 до t, получаем

$$\left\|\sqrt{1 + \sum_1^{n-1} \alpha_k^2}\, D_t D_n^2 v(t,\cdot), L_2\right\|^2 + \|D_n^2 v(t,\cdot), L_2\|^2 \Big|_0^t =$$

$$= 2\int_0^t \langle F - D_\tau^2 \Delta' v + 2D_\tau^2 \sum_1^{n-1} D_{nk}^2 v \cdot \alpha_k , D_\tau D_n^2 v\rangle_{L_2} d\tau.$$

Тогда, учитывая (4.16), имеем равномерную по t оценку:

$$\|D_t^\ell D_n^2 v(t,\cdot), L_2\| \le c' + c''t^2. \tag{4.17}$$

Итак, оценка (4.14) при $m=2$ доказана. Доказательство при $m \geq 3$ проводится по индукции аналогично.

Теорема 4. *Пусть G - область с гладкой границей $\partial G \in C^{m+1}$. Обозначим через G_2 приграничную полоску, прилегающую к регулярной границе (локально представляемой уравнением вида $x_n = \varphi(x')$). Тогда решение смешанной задачи* (1.8) *при $m > \frac{n}{2} + k$, m -целом, имеет оценку*

$$\sup_{\substack{x \in G_2 \\ |\alpha| = k}} |D_t^\ell D_x^\alpha u(t,x)| \le c_1 t^{\left(\frac{3m-4}{m}\right)\left(\frac{n}{2}+k\right)} + c_2, \quad \ell \geq 1, \tag{4.18}$$

$$\sup_{\substack{x\in G_2\\ |\alpha|=k}} |D_x^\alpha u(t,x)| \le c_3 t^{3\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{n}{2}+k\right)} + c_4 , \tag{4.19}$$

где константы c_i *не зависят от* t .

Доказательство. Полагая $g=G_2$, $|p|=k$, $h=t^{-(3m-4)}$ и используя лемму 5, из оценки (3.19) получаем

$$\sup_{\substack{x\in G_2\\ |\alpha|=k}} |D_t^\ell D_x^\alpha u(t,x)| \le c_1 t^{\left(\frac{3m-4}{m}\right)\left(\frac{n}{2}+k\right)} + c_2 , \quad \ell\ge 1.$$

Аналогично получаем (4.19).

Теорема 5. *Пусть* G *- область с гладкой границей* $\partial G\in C^{m+1}$, $m>\frac{n}{2}+k$ *,* m *- целое. Тогда решение смешанной задачи* (1.8) *имеет оценку*

$$\sup_{\substack{x\in G\\ |\alpha|=k}} |D_t^\ell D_x^\alpha u(t,x)| \le c_1 t^{\frac{4(m-1)}{m}\left(\frac{n}{2}+k\right)} + c_2 , \quad \ell\ge 1, \tag{4.20}$$

$$\sup_{\substack{x\in G\\ |\alpha|=k}} |D_x^\alpha u(t,x)| \le c_3 t^{\left(\frac{4m-3}{m}\right)\left(\frac{n}{2}+k\right)} + c_4 , \tag{4.21}$$

где константы c_i *не зависят от* t .

Доказательство. Из оценки (3.19), полагая $g=G$, $h=t^{-4(m-1)}$ и используя лемму 4, получаем оценку

$$\sup_{\substack{x\in G\\ |\alpha|=k}} |D_t^\ell D_x^\alpha u(t,x)| \le c_1 t^{\frac{4(m-1)}{m}\left(\frac{n}{2}+k\right)} + c_2 , \quad \ell\ge 1.$$

Аналогично получается оценка (4.21).

Лемма 6. *Пусть функция* $u_1(x)\in W_2^m(G)$ *и граница* $\partial G\in C^{m+1}$. *Тогда для решения краевой задачи* (1.14) *имеют место оценки:*

$$\| u(t,x), W_2^m(G)\| \le c_1 t^{m-1} + c_2 , \quad m\ge 1, \tag{4.22}$$

где c_1, c_2 *- константы, зависящие от* G, $\| u_1, W_2^m \|$.

Доказательство. Для краевой задачи (1.14) интеграл энергии имеет вид:

$$\mathcal{I}(t) = \int_G \sum_{i=1}^n (D_i u)^2 dx \equiv \mathcal{I}(0). \tag{4.23}$$

Отсюда в силу неравенства Стеклова

$$\| u(t,\cdot), L_2(G)\| \le c. \tag{4.24}$$

Аналогично, как в случае уравнения С.Л.Соболева, имеем

$$\| D_t^\ell u(t,\cdot), \overset{\circ}{W}{}_2^1 \| \le c, \quad \ell\ge 0. \tag{4.25}$$

Запишем постановку краевой задачи (1.14) в интегральной форме:

$$\Delta u = -\int_0^t D_{x_n} u\, d\tau + \Delta u_1, \tag{4.26}$$

$$u\big|_{\partial G} = 0.$$

Из оценок для эллиптических краевых задач имеем равномерно по t оценку

$$\| u(t,\cdot), W_2^m(G) \| \leq c \left[\int_0^t \| D_n u(\tau,\cdot), W_2^{m-2}(G) \| d\tau + \right.$$

$$\left. + \| \Delta u_1(\cdot), W_2^{m-2}(G) \| \right] \quad \text{при } m \geq 2 . \tag{4.27}$$

Используя оценку (4.25), при $m=2$ равномерно по t имеем

$$\| u(t,\cdot), W_2^2(G) \| \leq c_2 t^1 + c_1 .$$

Учитывая эту оценку, из (4.27) получаем

$$\| u(t,\cdot), W_2^3(G) \| \leq c_3 t^2 + c_4 .$$

Применяя индукцию, аналогично получаем оценку (4.22) при любом m .

Теорема 6. *Пусть G - область с гладкой границей $\partial G \in C^{m+1}$, $m > \frac{n}{2} + \kappa$, m -целое, n -размерность области G . Тогда решение задачи* (1.14) *имеет оценку*

$$\sup_{x \in G} |D_x^\alpha u(t,x)| \leq c_1 t^{\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{n}{2}+\kappa\right)} + c_2 , \quad |\alpha| = \kappa, \tag{4.28}$$

где константы c_1, c_2 не зависят от t .

Доказательство. Из оценки (3.19), полагая $g=G$, $h=t^{-(m-1)}$, $|p|=\kappa$ и используя лемму 6, получаем оценку

$$\sup_{x \in G} |D_x^\alpha u(t,x)| \leq c_1 t^{\left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{n}{2}+\kappa\right)} + c_2 , \quad |\alpha| = \kappa,$$

где c_1, c_2 не зависят от t .

Литература

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики.-Изв. АН СССР. Серия мат., 1954, т.18, №1, с.3-50.
2. Соболев С.Л. О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью.- Прикл.механика и теор.физика, 1960, №3, с.20-55.
3. Sobolev S.L. Sur une classe des problèmes des physique mathématique, 48 Riunione della Societa Italiana per il progresso della Scienze,Roma,1965, p.192-208.
4. Дезин А.А., Масленникова В.Н. Неклассические граничные задачи.- В кн.: Дифференциальные уравнения. Труды симпозиума , М.,Наука,1970,с.81-95.

5. Зеленяк Т.И.,Михайлов В.П. Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики при $t\to\infty$.- В кн.: Дифференциальные уравнения. Труды симпозиума., М.Наука, 1970, с.96-118.

6. Масленникова В.Н. Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для системы Соболева.- Сиб.мат.журн.,1968, т.9, №5, с.1182-1198.

7. Вишик М.И. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения.- Мат.сб., 1956, т.39, №1, с.51-148.

8. Showalter R.E. Partial differential equations of Sobolev-Galpern type.- Pacif.J.Math., 1969, v. 31, № 3, p.387-393.

9. Lagnesse J. Exponential stability of solutions of differential equations of Sobolev type.- SIAM J.Math.Anal., 1972, v. 3,№ 4, p.625-636.

10. Lighthill M.I. On waves generated in dispersive systems by travelling forcing effects,with applications to the dynamics of rotating fluids.- J.Fluid. Mech., 1967, v.27, № 4, p.725-752.

11. Ильин А.М. О поведении решения одной краевой задачи при $t\to\infty$.-Мат. сб.,1972, т.87, №4, с.529-553.

12. Зеленяк Т.И. Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными.- Новосибирск, НГУ, 1970.-164 с.

13. Григорьев Ю.Н. О качественных свойствах решений некоторых задач в проблеме С.Л.Соболева: Дис. на соиск.учен.степ.канд.физ-мат.наук (00.01.02)- Новосибирск, Б.И., 1974.

14. Капитонов Б.В. Асимптотика решений краевых задач для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости.- Дис.на соиск.учен.степ.канд.физ.-мат.наук (00.01.02).-Новосибирск, Б.И., 1977.

15. Капитонов Б.В. Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости.- Мат.сб., 1979, т.109, №4, с.607-628.

16. Сказка В.В. Асимптотические оценки при $t\to\infty$ смешанных задач для одного уравнения математической физики.- Сиб.матем.журн., 1981, т.22, №1.

17. Бесов О.В.,Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.- М.:Наука, 1975.- 480 с.