УДК.517.946

СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Р.С. Сакс (Новосибирск)

Настоящая статья является продолжением работы [1] (см.также [2]), где был выделен и изучен класс слабоэллиптических систем п.д.(псевдодифференциальных) уравнений на компактном многообразии без края. Для них,в частности, были доказаны теоремы о гладкости решений и о нётеровости оператора системы в соответствующих пространствах С.Л.Соболева.

Используя эти результаты, мы докажем для эллиптических систем дифференциальных уравнений на многообразии с краем нётеровость некоторого класса некоэрцитивных краевых задач. Эти задачи мы также назовем слабоэллиптическими, так как они сохраняют основные свойства эллиптических задач, а также редуцируются к слабоэллиптическим системам п.д. уравнений на границе многообразия. Известны два общих метода сведения краевой задачи к нётерово эквивалентной системе п.д. уравнений на границе многообразия. Первый из них (см. Л.Хёрмандер [3])использует обобщенную формулу Грина эллиптического оператора и вспомогательную эллиптическую краевую задачу.

Другой метод, предложенный Б.Р.Вайнбергом и В.В. Грушиным [4, ч.П] , также использует регуляризатор вспомогательной эллиптической краевой задачи. Мы воспользуемся этим методом. Он более удобен для наших целей, поскольку в [4] указывается также алгоритм вычисления полного символа полученной системы п.д. уравнений через коэффициенты краевой задачи.

Класс слабоэллиптических систем шире класса равномерно неэллиптических систем п.д. уравнений, поэтому наши результаты обобщают результаты работы [4]. Кроме того, условия слабой эллиптичности краевой задачи необходимы и достаточны для ее нётеровости в соответствующих пространствах.

Полученные результаты применимы при изучении различных классов неэллиптических систем дифференциальных уравнений (в частности, слабоэллиптических).

Работа состоит из двух параграфов. В §1, п$^{\circ}$1, кратко излагаются известные результаты относительно общих эллиптических систем и показывается, как для любого эллиптического оператора A можно подобрать граничный оператор B , который накрывает A . Там же, п$^{\circ}$2, приводится еще один способ построения левого регуляризатора оператора краевой задачи с постоянными коэффициентами в полупространстве (см. В.А.Солонников [6]).

В §2 изучаются слабоэллиптические краевые задачи и доказываются основные теоремы 4-7 , здесь же (п.5.) рассматривается один простой пример.

§1. Эллиптические краевые задачи

п°1. Пусть на гладком многообразии G с границей $\Gamma\in C^\infty$ задан $(L\times\ell)$-матричный дифференциальный оператор $A(x,D)$ с коэффициентами класса $C^\infty(\bar G)$, $\ell\le L$, порядка (s,t). Это означает, что порядки элементов a_{ij} матрицы A не превышают чисел s_i+t_j, где s_i и t_j - компоненты целочисленных векторов s и t. Как обычно, будем считать, что $s_i\le 0, \max\limits_i s_i=0$, $a_{ij}\equiv 0$ при $s_i+t_j<0$ и что скалярный порядок m оператора A $(m=\max\limits_{ij} s_i+t_j)$ положителен; $D_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $|t|=t_1+\ldots+t_\ell$. Мы предполагаем, что оператор A является (s,t)-эллиптическим в $\bar G=G\cup\Gamma$, т.е. что матрица $A_0(x,\xi)$, составленная из операторов a^0_{ij} порядков s_i+t_j без младших членов, имеет максимальный ранг ℓ для всех $(x,\xi)\in T'(\bar G)$, т.е. $x\in\bar G$, $\xi_x\in R^n\setminus 0$. Эта матрица по ξ удовлетворяет следующему условию однородности:

$$A_0(x,c\xi)=J_s(c)A_0(x,\xi)J_t(c),\quad \forall c>0,$$

где $J_t(c)$ - диагональная матрица с ненулевыми элементами $c^{t_1},\ldots,c^{t_\ell}$, стоящими вдоль главной диагонали. Оператор A будем рассматривать в пространствах С.Л.Соболева

$$H^{\kappa+t}(G)=W_2^{(\kappa+t_1)}(G)\times\ldots\times W_2^{(\kappa+t_\ell)}(G);$$

$$A:H^{\kappa+t}(G)\longrightarrow H^{\kappa-s}(G),\quad Au=f. \qquad (1)$$

При изучении ядра и коядра оператора (1) вводится линейное пространство $\mathfrak{M}_+(A)$ ограниченных на полупрямой $t>0$ решений системы

$$A_0\left(y,\tau+i\nu\frac{d}{dt}\right)v(y,\tau;t)=0, \qquad (2)$$

зависящих от параметра $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$, т.е. $y\in\Gamma$, τ - ненулевой касательный вектор; ν - единичный вектор внутренней нормали к Γ в точке y.

Если пространство $\mathfrak{M}_+(A)$ тривиально при любых $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$, что возможно даже при $L=\ell$, когда $\omega\equiv|s|+|t|\equiv 0$, то оператор (1) нормально разрешим (его образ замкнут) и его ядро конечномерно (см.,например, [5,6]).

В общем случае ядро оператора (1) конечномерно только при задании дополнительных краевых условий

$$B(x,D)u(x)|_\Gamma=g, \qquad (3)$$

где B - $(\tau\times\ell)$-матричный дифференциальный оператор порядка (b,t) с коэффициентом класса $C^\infty(\bar G)$, накрывающий оператор A, т.е. B таков, что пространство $\mathfrak{M}_+(A)$ не содержит нетривиальных решений, удовлетворяющих при $t=0$ условию

$$B_0\left(y,\tau+i\nu\frac{d}{dt}\right)v(y,\tau;0)=0 \qquad (4)$$

для любых $(y,\tau)\in T'(\Gamma)$ (см. [6]).

Это условие предполагает, что $r \geq r_0 = \max\limits_{T'(\Gamma)} \mu(q)$, где $\mu(q)$ - размерность пространства $\mathfrak{M}_+(A)$ в точке $q \equiv (y,\tau) \in T'(\Gamma)$.

Так, в случае $\ell = L$, $\omega > 0$ и правильной эллиптичности оператора A функция $\mu(q)$ постоянна в $T'(\Gamma)$ и равна $\omega/2$.

Тогда если $r = \omega/2$, то условие на B совпадает с условием Лопатинского и краевая задача (1),(3) называется эллиптической. Эллиптическая краевая задача задает нётеров оператор $\mathcal{O}\!\ell$ в пространствах

$$\mathcal{O}\!\ell = \begin{pmatrix} A \\ B_\Gamma \end{pmatrix} : H^{\kappa+t}(G) \longrightarrow \begin{pmatrix} H^{\kappa-s}(G) \\ H^{\kappa-b-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{pmatrix} \qquad (5)$$

при $\kappa > b_0 = \max b_j$ (см. [7-10]).

М.З.Соломяк [11] указал пример правильно эллиптического оператора первого порядка с $\omega = 4$, для которого невозможно подобрать интегродифференциальный оператор B с $r = 2$, накрывающий A . Так что не каждая эллиптическая система имеет краевую задачу, удовлетворяющую условию Лопатинского. Известно [3] , что это ограничение на рассматриваемые операторы носит топологический характер.

Однако если рассматривать операторы B с числом строк r , бо́льшим r_0 , то имеет место следующая

Теорема 1. *Для любого эллиптического оператора A порядка (s,t) можно подобрать граничный оператор B порядка (b,t), накрывающий A .*

Доказательство. Пусть вначале $s=0$, $t=\overline{m}=(m,\dots,m)$. В силу формулы Грина (см., например, [3, § 22]), условия Коши $u|_\Gamma,\dots,D_\nu^{m-1}u|_\Gamma$, очевидно, накрывают оператор A . Поэтому можно поставить вопрос о выборе минимального числа краевых условий, накрывающих A . В окрестности границы Γ оператор B представим в виде

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_j D_\nu^j ,$$

где D_ν - дифференцирование в направлении внутренней нормали, а B_j - дифференциальные операторы порядка $m-j$, действующие по направлениям, параллельным Γ .

Для заданной точки $q\in T'(\Gamma)$ рассмотрим $(\ell\times\mu)$-матрицу $V(q,t)$, столбцы которой образуют базис пространства $\mathfrak{M}_+(A)$.

Тогда матрица

$$\tilde{V}(q) = \begin{pmatrix} V(q,+0) \\ D_\nu V(q,+0) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_\nu^{m-1} V(q,+0) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

имеет в точке q максимальный ранг $\mu(q)$. Пусть $W(q)$- ее ненулевой минор порядка μ . Так как $BV(q,+0) = \tilde{B}\tilde{V}$, $\tilde{B} \equiv (B_0,\dots,B_{m-1})$, выборем элементы матрицы $\widetilde{B}$ так, чтобы $\widetilde{B}\widetilde{V} = W(q)$. Оператор B будет тогда накрывать A в точке q, а следовательно, и в некоторой окрестности $\sigma(q)$. Если $\sigma = T'(\Gamma)$, то B - искомый оператор, и так как в каждой строке оператора B имеется только один ненулевой элемент порядка n_k, то, полагая $b_k = n_k - m$, получаем $B_0 = B$. Если $\sigma(q)$ не совпадает с $T'(\Gamma)$, то рассмотрим покрытие $T'(\Gamma)$ окрестностями σ, выбрав из него минимальное конечное подпокрытие $\{\sigma_j\}, j=1,\dots,N$. Тогда оператор B составим из $(\mu_j \times \ell)$-операторов $B^{(j)}$, накрывающих A в σ_j, как блок-матрицу

$$B = \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Затем уменьшим число строк этой матрицы, исключив эквивалентные, и зададим порядки строк матрицы B так, чтобы $B_0 = B$. Получим искомый оператор B.

В общем случае, когда A - эллиптический оператор порядка (s,t) и $t \neq m$, условия $u^k|_\Gamma, \dots, D_\nu^{t_k-1} u^k|_\Gamma$, $k=1,\dots,\ell$, где u^k - компонента вектора u, накрывают A (см. ниже формулы (12) и (40)). Поэтому, заменяя нулями в матрице (6) строки, соответствующие производным $D_\nu^j u^k|_\Gamma$ при $t_k \leq j \leq m-1$, получаем матрицу, также имеющую в точке q максимальный ранг. Дальнейшие построения аналогичны предыдущим.

Если оператор B порядка (b,t) накрывает (s,t)- эллиптический оператор A, то, согласно теореме В.А.Солонникова [6], оператор (5) нормально разрешим и его ядро конечномерно. При этом коядро оператора (5) бесконечномерно даже при $\ell = L$, если $\tau > \omega/2$. Доказательство этой теоремы сводится к построению левого регуляризатора оператора (5), и наиболее существенным моментом его является построение левого регуляризатора оператора $\mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_{0\Gamma} \end{pmatrix}$ с постоянными коэффициентами в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$. Так как эта теорема для нас важна в дальнейшем, то мы приведем другой, по-видимому, более простой способ построения левого регуляризатора оператора $\mathfrak{A}_0$ в полупространстве. При этом мы воспользуемся методом решения системы линейных алгебраических уравнений, изложенным в главе 1 книги С.Л.Соболева [12].

п°.2. Пусть $u(x)$ - гладкая достаточно быстро убывающая на бесконечности вектор-функция, заданная в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ $(x_n \geq 0)$ и удовлетворяющая соотношениям

$$A(D)u(x) = f(x), \tag{8}$$

$$B(D)u(x)\big|_{x_n=0} = g(x'), \tag{9}$$

в которых $A(D)$ и $B(D)$-$(L \times \ell)$ -и $(\tau \times \ell)$ -матричные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядков (s,t) и (b,t) соответственно без младших членов. Оператор A эллиптичен, а B накрывает его. Для простоты сначала рассмотрим случай, когда A - однородный эллиптический оператор порядка m, т.е. $s_i = 0$, $t_j = m \ \forall_{ij}$, и скалярный порядок оператора B меньше m, т.е.

все $b_l < 0$. Все функции $v(x)$, заданные в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$, продолжим нулем в $\mathbb{R}^n_-$ и обозначим их через v_+.

Обозначим $\widetilde{v}_+(\xi)$ и $\widehat{v}_+(\xi', x_n)$ преобразование Фурье по переменным x и x' таких функций. Тогда

$$\widetilde{(D^\alpha v)}_+ = \xi^\alpha \widetilde{v}_+, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \text{ если } \alpha_n = 0,$$

$$\widetilde{(D_n v)}_+ = \xi_n \widetilde{v}_+ + i\widehat{v}(\xi', +0),$$

$$\widetilde{(D_n^j v)}_+ = \xi_n^j \widetilde{v}_+ + i\sum_{l=0}^{j-1} \xi_n^{j-l-1} v_l(\xi'), \tag{10}$$

где $v_l(\xi') = D_n^l \widehat{v}(\xi', x_n)\Big|_{x_n = +0}$.

Положим $u = (v_0, v_1, \dots, v_{m-1})$

и

$$A(\xi) = \sum_{j=0}^{m} A_j(\xi')\xi_n^j, \tag{11}$$

где $A_j(\xi')$ - однородные матричные полиномы от ξ' степени $m-j$.

Применяя к системе (8) преобразование Фурье и учитывая (10), (11), получаем

$$A(\xi)\widetilde{u}_+ + i\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=0}^{j-1} A_j(\xi')\xi_n^{j-l-1} u_l(\xi') = \widetilde{f}_+ . \tag{12}$$

Второе слагаемое в (12) запишем в виде $\widetilde{A}w$; тогда, меняя порядок суммирования, имеем

$$\widetilde{A}w = i\sum_{l=0}^{m-1}\Big[A(\xi) - \sum_{j=0}^{l} A_j(\xi')\xi_n^j\Big]\xi_n^{-l-1} u_l(\xi') =$$
$$= i\sum_{l=0}^{m-1}\Big(\sum_{j=0}^{m-l-1} A_{j+l+1}(\xi')\xi_n^j\Big) u_l(\xi'), \tag{13}$$

так что $\widetilde{A} = (\widetilde{A}_0, \dots, \widetilde{A}_{m-1})$ - блок-матрица, составленная из

$$\widetilde{A}_l \equiv \sum_{j=0}^{m-l-1} A_{j+l+1}(\xi')\xi_n^j -$$

матричных полиномов по ξ_n степени $m-l-1$. В силу эллиптичности $A(D)$, матрица $A(\xi)$ имеет левую обратную A_n^{-1} для любых $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$. Выберем ее в виде

$$A_\Lambda^{-1}(\xi) = (A^* A)^{-1} A^*, \quad A^* = \overline{A'}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0. \tag{14}$$

Пусть

$$Q(\xi) = I_L - A(\xi)A_\Lambda^{-1}(\xi). \tag{15}$$

Система (12) разрешима тогда и только тогда, когда

$$Q(\xi)\left(\tilde{f}_{+}-\tilde{A}w\right)=0\,,\qquad \xi\in\mathbb{R}^{n}\setminus 0\,. \tag{16}$$

Это условие можно преобразовать, учитывая что

$$\left(A^{*}A\right)^{-1}=\frac{\mathcal{A}(\xi)}{\det\left(A^{*}A\right)}=\frac{C(\xi)}{q(\xi)}\,,\qquad \xi\in\mathbb{R}^{n}\setminus 0, \tag{17}$$

где $q(\xi)$ - правильно эллиптический многочлен степени $2k$, $m<k\leq m\ell$, $C(\xi)$-$(\ell\times\ell)$-матрица степени $2(k-m)$, получаемая после возможного сокращения. Тогда $qQ=qI_{L}-ACA^{*}$ - матричный многочлен степени $2k$. Однако $qQ\tilde{A}w$ является многочленом по ξ_n степени, меньшей $2k$. Действительно, из (13), учитывая $QA\equiv 0$, имеем

$$qQ\tilde{A}w=-iqQ\sum_{\ell=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\ell}A_j(\xi')\xi_n^{j-\ell-1}u_\ell(\xi')\,.$$

Так как $j\leq\ell$, то утверждение становится очевидным. Следовательно,

$$qQ\tilde{A}w=\sum_{j=1}^{2k}\xi_n^{j-1}P_j(\xi')w(\xi'). \tag{18}$$

Коэффициенты $P_j w$ этого многочлена можно выразить через f . Действительно, умножая равенство (16) на ζ_n^{i-1} и интегрируя по контуру γ_+ , охватывающему все корни многочлена $q(\xi',\zeta_n)$ от ζ_n при фиксированном ξ' , лежащие в верхней полуплоскости, получаем

$$\sum_{j=1}^{2k}\int_{\gamma_+}\frac{\zeta_n^{i+j-2}\,d\zeta_n}{q(\xi',\zeta_n)}\,P_j w(\xi')=\int_{\gamma_+}\zeta_n^{i-1}Q\tilde{f}_{+}\,d\zeta_n\,,\quad i=1,\dots,k. \tag{19}$$

Матрица

$$K(\xi')=\left\{k_{ij}\right\}_{i,j=1,\dots,k}\,,\quad k_{ij}=\int_{\gamma_+}\frac{\zeta_n^{i+j-2}\,d\zeta_n}{q(\xi',\zeta_n)}\,, \tag{20}$$

не вырождена при любых $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus 0$, в чем нетрудно убедиться, проверяя условие Лопатинского задачи Дирихле в $\mathbb{R}^{n}_{+}$ для эллиптического оператора $q(D)$. Поэтому, полагая $P_j w=0$ для $j>k$, определяем остальные $P_j w$, обращая матрицу K . Полученное решение системы (19) запишем в виде

$$Pw=\begin{pmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_{2k}\end{pmatrix}w=\begin{pmatrix}H\tilde{f}_{+}(\xi')\\ 0\end{pmatrix},\qquad \xi'\in\mathbb{R}^{n}\setminus 0. \tag{21}$$

Отметим, что при $f=0$ условия (16) и (21) эквивалентны.

Итак, при выполнении условия (16) имеем

$$\tilde{u}_+(\xi) = A_\Lambda^{-1}(\xi)\left(\tilde{f}_+ - \tilde{A}w\right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0. \tag{22}$$

Применяя обратное преобразование Фурье по ξ_n, получаем

$$\hat{u}(\xi', x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_n\xi_n} A_\Lambda^{-1}(\xi)\left(\tilde{f}_+ - \tilde{A}(\xi)w\right) đ\xi_n, \tag{23}$$

где $đ\xi_n = \frac{d\xi_n}{2\pi}$ и интеграл по действительной оси можно заменить интегралом по γ_+. Применив преобразование Фурье по x' в краевом условии (9), в силу (23) имеем

$$Sw \equiv \int_{\gamma_+} B(\xi)A_\Lambda^{-1}(\xi)\tilde{A}(\xi)d\xi_n w = \int_{\gamma_+} BA_\Lambda^{-1}\tilde{f}_+(\xi)d\xi_n - \hat{g}(\xi'). \tag{24}$$

Кроме того, записав аналогично (11) оператор $B(D)$ в виде

$$\sum_{j=0}^{m-1} B_j(D')D_n^j$$

и обозначив через $\tilde{B}$ блок-матрицу $(B_0, \ldots, B_{m-1})$, из краевого условия (9) получим

$$\tilde{B}(\xi')w(\xi') = \hat{g}(\xi'). \tag{25}$$

Тогда имеет место следующая

Лемма 1. *Если оператор A эллиптичен, B накрывает A, то однородная система* (2$1_0$) (2$4_0$) (2$5_0$) $(f=0,\ g=0)$ *относительно w имеет только тривиальное решение для всех $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0$.*

Пусть $w = (u_0, \ldots, u_{m-1})$ - решение однородной системы (2$1_0$),(2$4_0$),(2$5_0$). Тогда для любого $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0$ вектор-функция

$$U(x_n) \equiv -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_n\xi_n} A_\Lambda^{-1}(\xi)\tilde{A}(\xi)w\,d\xi_n \tag{26}$$

является ограниченным решением уравнения

$$A\left(\xi', -i\frac{d}{dx_n}\right)U(x_n) = 0 \qquad \text{при } x_n \neq 0 \tag{27}$$

и удовлетворяет краевым условиям

$$B\left(\xi', -i\frac{d}{dx_n}\right)U(x_n)\Big|_{x_n=\pm 0} = 0. \tag{28}$$

Величина разрыва в нуле функции $D_n^k U(x_n)$ равна u_k:

$$D_n^k U(+0) - D_n^k U(-0) = u_k, \quad k = 0, \ldots, m-1. \tag{29}$$

Действительно, если контурами γ_+ и γ_- ограничиваются полукруги в верхней и нижней полуплоскостях, содержащие внутри себя все особенности матрицы $(A^*A)^{-1}$, т.е. нули многочлена $q(\xi',\zeta_n)$, то интегрирование по вещественной оси можно заменить интегрированием по γ_+ при $x_n>0$ или по γ_- при $x_n<0$. Отсюда вытекает ограниченность функции $U(x_n)$ при $x_n\neq 0$. Применяя оператор A и учитывая (15), для $x_n\neq 0$ получаем

$$AU(x_n)=\int_{\gamma_\pm} e^{ix_n\xi_n} Q\tilde{A}\,w\,d\xi_n-\int_{\gamma_\pm} e^{ix_n\xi_n}\tilde{A}\,w\,d\xi_n. \tag{30}$$

Так как по условию (21_0) на действительной оси $Q\tilde{A}w\equiv 0$, то первый интеграл сводится к интегрированию по полуокружности $C_R^\pm$, не зависит от $R>R_0$ и при $R\to\infty$ в силу (18) стремится к нулю. Поэтому он равен нулю. Равенство нулю второго слагаемого в (30) очевидно.

Покажем теперь, что каждая из функций $U(x_n)$ удовлетворяет условиям (28). Первое из этих равенств, очевидно, следует из уравнения (24_0):

$$B\left(\xi',-i\frac{d}{dx_n}\right)U(+0)=-\int_{\gamma_+} B(\xi)A_\Lambda^{-1}\tilde{A}\,w\,d\xi_n=0. \tag{31}$$

Для доказательства второго воспользуемся соотношениями (31), (13) и (25):

$$BU(-0)=-\int_{\gamma_-} B(\xi)A_\Lambda^{-1}(\xi)\tilde{A}\,w\,d\xi_n=\int_{C_R} BA_\Lambda^{-1}\tilde{A}\,w\,d\zeta_n=$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\ell=0}^{m-1}B_k(\xi')\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\zeta_n^{k-\ell-1}d\zeta_n\right)u_\ell+i\sum_{\ell=0}^{m-1}\int_{C_R}BA_\Lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\ell}A_j(\xi')\zeta_n^{j-\ell-1}u_\ell\,d\zeta_n=$$
$$=\sum_{k,\ell=0}^{m-1}B_k\delta_{k\ell}u_\ell=\sum_{k=0}^{m-1}B_k u_k=\tilde{B}w=0, \tag{32}$$

причем последний интеграл равен нулю, так как подынтегральное выражение имеет при $\zeta_n\to\infty$ порядок $|\zeta_n|^{-2}$.

Докажем, наконец, формулу (29). Снова учитывая соотношение (13), имеем

$$D_n^k U(+0)-D_n^k U(-0)=\int_{\gamma_+}\dots-\int_{\gamma_-}\dots=-\int_{C_R}\zeta_n^k A_\Lambda^{-1}\tilde{A}\,w\,d\zeta_n=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\zeta_n^{k-\ell-1}d\zeta_n\right)u_\ell+i\sum_{\ell=0}^{m-1}\int_{C_R}\zeta_n^k A_\Lambda^{-1}\sum_{j=0}^{\ell}A_j(\xi')\zeta_n^{j-\ell-1}u_\ell\,d\zeta_n=\sum_{\ell=0}^{m-1}\delta_{k\ell}u_\ell=u_k, \tag{33}$$

так как при $k<m$ последний интеграл равен нулю.

Оператор B накрывает A, поэтому $U(x_n)\equiv 0$ при $x_n>0$, а следовательно, и при $x_n<0$, ибо любому нетривиальному решению $v(x_n,\xi')$ задачи (27), (28) на полуоси $\mathbb{R}^1_-$ соответствует решение $u(x_n,-\xi')\equiv(-1)^m v(-x_n,\xi')$ задачи (27), (28) на $\mathbb{R}^1_+$, а эта последняя имеет только тривиальное решение. Тогда, в силу формулы (29), $w\equiv 0$ для всех $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}\setminus 0$, что и требовалось доказать.

Другими словами, лемма 1 утверждает, что матрица

$$\begin{pmatrix} P \\ S \\ \widetilde{B} \end{pmatrix}(\xi')$$

системы (21),(24),(25) имеет левую обратную для всех $\xi' \in R^{n-1} \setminus 0$. Обозначим ее через $\mathscr{E}(\xi')$, а правую часть указанной системы через $\Phi(\widetilde{f}_+, \hat{g})$. Тогда

$$w = \mathscr{E}(\xi')\,\Phi(\widetilde{f}_+, \hat{g}). \tag{34}$$

Итак, если $f = Au$, $g = Bu|_\Gamma$ для некоторого $u(x)$, то из (34) имеем

$$w(\xi') = (\hat{u}(\xi', +0), \ldots, D_n^{m-1}\hat{u}(\xi', +0))^{\uparrow}. \tag{35}$$

Подставляя значение (34) в формулу (23), имеем

$$\hat{u}(\xi', x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_n\xi_n} A_\Lambda^{-1}(\xi)\left[\widetilde{f}_+ - \widetilde{A}(\xi)\mathscr{E}(\xi')\Phi(\widetilde{f}_+, \hat{g})\right] d\xi_n. \tag{36}$$

Откуда, применяя обратное преобразование Фурье по ξ', можно получить (см. [6]) формулу для решения задачи (8), (9) в виде оператора - свертки f и g с матрицами из ядер Пуассона.

Однако нам достаточно иметь левый регуляризатор задачи (8), (9). Для этого умножим подынтегральное выражение в (36) на неотрицательную функцию $\beta(\xi)$ класса $C^\infty(R^n)$, равную единице при $|\xi| > 1$ и нулю при $|\xi| < \frac{1}{2}$, и применим обратное преобразование Фурье по ξ'. Мы получим оператор

$$R\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\beta(\xi)A_\Lambda^{-1}(\xi)\left[\widetilde{f}_+ - \widetilde{A}(\xi)\mathscr{E}(\xi')\Phi(\widetilde{f}_+, \hat{g})\right] d\xi, \tag{37}$$

который является левым регуляризатором задачи (8), (9). Действительно, используя формулы (12), (34) и (35), имеем

$$R\begin{pmatrix} Au \\ Bu|_\Gamma \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\beta(\xi)A_\Lambda^{-1}(\xi)\left[A(\xi)\widetilde{u}_+ + \widetilde{A}w - \widetilde{A}w\right] d\xi =$$

$$= u + \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}(\beta - 1)\widetilde{u}_+(\xi)\, d\xi = u + Tu \quad \text{в} \quad R_+^n, \tag{38}$$

причем T - оператор порядка $-\infty$. Что и требовалось.

Рассмотрим теперь те дополнения, которые следует внести в доказательство в общем случае, когда A - эллиптический оператор порядка (s, t). Формула (37) для левого регуляризатора и другие основные формулы останутся неизменными. Отметим, что без ограничения общности можно считать, что вектор $s = 0$. Так как если $s_i < 0$, то можно подравнять порядок i-й строки оператора A, применив к ней операторы D^α со всевозможными α такими, что $|\alpha| = -s_i$ (см. [6]). Другими словами, можно подобрать матричный эллиптический дифференциальный оператор S порядка $(0, -s)$ с постоянными коэффициентами, имеющий конечномерное ядро, так что оператор SA имеет порядок $(0, t)$ и оператор B накрывает SA. Тогда композиция RS оператора S и левого регуляризатора R задачи $\begin{pmatrix} SA \\ B_\Gamma \end{pmatrix}$ является искомым регуляризатором оператора $\mathfrak{A}_0$. Итак, пусть $S=0$, $m=\max_j t_j$ - скалярный порядок оператора A. Разложение (11) останется справедливым, однако теперь $A_j(\xi')$ - возможно, неоднородные матричные полиномы от ξ' степени не выше $m-j$, причем некоторые из них могут тождественно равняться нулю. Для компонент $a_{\mu\nu}$ матрицы A можно написать более точные разложения

$$a_{\mu\nu}(\xi)=\sum_{j=0}^{t_\nu} a_{\mu\nu}^{(j)}(\xi')\xi_n^j. \tag{39}$$

Аналогично, расписывая соотношение (13) покомпонентно, имеем

$$(\tilde{A}w)_\mu = i\sum_{\nu=1}^{\ell}\sum_{\kappa=1}^{t_\nu-1}\sum_{j=0}^{t_\nu-\kappa-1} a_{\mu\nu}^{(j+\kappa+1)}(\xi')\xi_\kappa^j u_\kappa^\nu(\xi'). \tag{40}$$

Отсюда видно, что вектор $\tilde{A}w$ полностью определяется компонентами $u_0^1,\dots$ $\dots,u_{t_1-1}^1,\dots,u_0^\ell,\dots,u_{t_\ell-1}^\ell$ вектора w, которые мы обозначим через w'; $\tilde{A}w=0$, если $w'=0$. Операторы A_Λ^{-1} и Q имеют порядки $(-t,0)$ и $(0,0)$ соответственно. Матрица A^*A имеет порядок (t,t), поэтому $\det A^*A(\xi)$ является однородным многочленом от ξ степени $2|t|$. Многочлен $q(\xi)$ в представлении (17) имеет степень $2k$, причем $\min_\nu t_\nu < k \leq |t|$. По-прежнему qQ является матричным многочленом степени $2k$, но степень многочлена $qQ\tilde{A}w$ по ξ_n меньше $2k$. Поэтому $Q\tilde{A}w \to 0$ при $\xi_n \to \infty$.

Оператор B имеет порядок (b,t), причем компоненты b_α вектора b отрицательны, если предполагать, что порядки элементов $B_{\alpha\nu}$ матрицы B не превосходят t_ν. Представляя $B_{\alpha\nu}$ аналогично (39), имеем

$$B_{\alpha\nu}(\xi)=\sum_{j=0}^{b_\alpha+t_\nu} b_{\alpha\nu}^{(j)}(\xi')\xi_n^j. \tag{41}$$

Поэтому вектор $\tilde{B}w$ так же, как и $\tilde{A}w$, полностью определяется частью w' вектора w. Следовательно, соотношения (21),(24),(25) можно рассматривать как систему относительно неизвестного вектора w'.

Тогда лемма 1 остается справедливой. Ее доказательство аналогично предыдущему, но вместо утверждения (29) имеем

$$D_n^\kappa \hat{u}^\nu(+0) - D_n^\kappa \hat{u}^\nu(-0) = u_\kappa^\nu,\quad \kappa=0,\dots,t_\nu-1, \tag{42}$$

для каждого элемента u^ν вектора u, $\nu=1,\dots,\ell$.

При доказательстве (32) и (42) в (32) и (33) следует перейти к покомпонентной записи и учесть, что операторы BA_Λ^{-1} и A_Λ^{-1} имеют порядки $(b,0)$ и $(-t,0)$. Тогда последние интегралы в (32) и (33) по-прежнему будут равны нулю, так как $b_\alpha<0$ и $\kappa<t_\nu$. Далее, если $v(x_n,\xi')$ - решение задачи (27),(28) на полуоси $\mathbb{R}_-^n$, то, в силу соответствующей однородности операторов A и B, вектор-функция $u(x_n,-\xi')\equiv J_t(-1)\,u(-x_n,\xi)$ является решением задачи (27),(28) на полуоси $\mathbb{R}_+^n$. Поэтому задача в $\mathbb{R}_-^n$ также имеет только тривиальное решение.

Наконец, в силу (42), вектор $w' \equiv 0$ для любых $\xi' \in R^{n-1} \setminus 0$, что и требовалось.

§2. Слабоэллиптические краевые задачи

п.°1. Пусть A и B - $(\ell\times\ell)$- и $(\tau\times\ell)$ -матричные дифференциальные операторы на G порядков (a,s) и (b,s) соответственно с коэффициентами класса $C^{\infty}(\bar{G})$, $\tau=(|a|+|s|):2$, и оператор A эллиптичен в $\bar{G}$.

Рассмотрим общую краевую задачу:

$$A(x,D_x)u(x) = f(x), \quad x\in G, \tag{1}$$

$$B(x,D_x)u(x)\big|_{\Gamma} = g(x'), \quad x'\in \Gamma. \tag{2}$$

Предположим вначале, что $f=0$, т.е. рассмотрим систему (1_0). Для изучения задачи (1_0),(2) рассмотрим также какую-либо вспомогательную эллиптическую задачу для системы (1_0):

$$D(x,D_x)u(x)\big|_{\Gamma} = \sigma(x'), \quad x'\in\Gamma, \tag{3}$$

где D - $(\tau\times\ell)$ -матричный оператор порядка (d, s) с гладкими коэффициентами. Эллиптической задаче (1_0),(3) соответствует оператор $D_\Gamma u \equiv Du\big|_\Gamma$ в пространствах

$$D_\Gamma : H^{k+s}(G)\cap \operatorname{Ker} A \longrightarrow H^{k-d-1/2}(\Gamma), \tag{4}$$

который имеет регуляризатор R (левый и правый одновременно), т.е.

$R = D_\Gamma^L = D_\Gamma^R$ и

$$AD_\Gamma^R\sigma = 0, \quad D_\Gamma D_\Gamma^R\sigma = \sigma + T'\sigma; \tag{5}$$

$$D_\Gamma^L D_\Gamma u = u + Tu, \quad \text{если} \quad Au=0, \tag{6}$$

где T' и T - сглаживающие операторы бесконечного порядка.

Мы скажем, что оператор (4) имеет порядок $(d+\frac{1}{2}, s)$. Тогда оператор R имеет порядок $(-s,-d-1/2)$. Ниже нам потребуются результаты работы [4, ч.II]. Поэтому мы коротко изложим их с некоторыми дополнениями, необходимыми для дальнейшего. Рассматривается оператор

$$\begin{gathered} S\sigma = B_\Gamma D_\Gamma^L\sigma = B_\Gamma R\sigma, \\ S : H^{k-d-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{k-b-1/2}(\Gamma), \end{gathered} \tag{7}$$

порядка $(b+\frac{1}{2}, -d-\frac{1}{2})$, что эквивалентно $(b,-d)$. Доказывается, что S является псевдодифференциальным оператором, и дается способ вычисления его полного символа $K(S)$. Причем оператор S эллиптичен тогда и только тогда, когда эллиптична задача (1_0),(2). Важно, что для получения теорем существования и гладкости решений(1_0),(2)достаточно изучить оператор (7). Точнее, пусть Φ_1, Φ_2 и Φ - банаховы пространства такие, что $\Phi_1, \Phi_2 \subset \bigcup_K H^K(\Gamma)$ и $\Phi \subset \bigcup_K H^K(G) \cap \mathrm{Ker}\, A$, $\Phi_2 \supset C^\infty(\Gamma)$, причем сходимость в Φ_1 влечет за собой сходимость в $\mathcal{D}'(\Gamma)=\bigcup_K H^K(\Gamma)$, и так же в остальных вложениях. Пусть в этих пространствах действуют операторы

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{B_\Gamma} & \Phi_2 \\ & {}_{D_\Gamma}\searrow \quad \nearrow_{S} & \\ & \Phi_1 & \end{array}, \qquad (8)$$

причем оператор D_Γ нётеров. Доказывается, что оператор B_Γ имеет регуляризатор (левый и правый одновременно) тогда и только тогда, когда таковой имеется у оператора S. Отсюда следует, что оператор B_Γ нётеров, если и только если нётеров оператор S.

Однако, как мы отмечали, для некоторых эллиптических операторов нельзя подобрать краевых значений (3), удовлетворяющих условию Лопатинского, и, следовательно, определить нётеров оператор D_Γ. В этом случае, в силу теоремы 1, возможен выбор D_Γ, накрывающего A, т.е. выбор оператора D_Γ, имеющего только левый регуляризатор D_Γ^L. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть существует левый регуляризатор D_Γ^L оператора D_Γ. Тогда оператор B_Γ нормально разрешим и имеет конечномерное ядро, если существует левый регуляризатор оператора S.*

Если оператор D_Γ имеет также правый регуляризатор D_Γ^R, то оператор B_Γ нётеров тогда и только тогда, когда нётеров оператор S.

Действительно, из существования D_Γ^L следует, что

$$B_\Gamma = B_\Gamma D_\Gamma^L D_\Gamma + T = SD_\Gamma + T, \qquad (9)$$

где T - оператор порядка $-\infty$, задающий вполне непрерывное отображение из Φ в Φ_2. Отсюда вытекает, что B_Γ имеет левый регуляризатор $B_\Gamma^L = D_\Gamma^L S^L$, и, следовательно, оператор $B_\Gamma : \Phi \to \Phi_2$ нормально разрешим и имеет конечномерное ядро.

Если, кроме того, операторы D_Γ и S имеют правые регуляризаторы D_Γ^R и S^R, то B_Γ также имеет правый регуляризатор $B_\Gamma^R = D_\Gamma^R S^R$ и, следовательно, является нётеровым. Обратно, нётеровость оператора S, очевидно, вытекает из нётеровости операторов B_Γ и R.

Из формулы (9) легко следует [4] также

Теорема 3. *Если теорема о гладкости решений имеет место для операторов D_Γ и S, то она справедлива и для оператора B_Γ, т.е. любое решение задачи (1_0), (2) из $\bigcup_K H^K(G)$ принадлежит пространству Φ, если $g \in \Phi_2$.*

n°.2. Изложим детальнее свойства системы $Sv = g$. Известно [4], что для вычисления полного символа $K(S)$ системы в окрестности заданной точки $(x,\xi) \in T'(\Gamma)$ достаточно воспользоваться вместо R локальным регуляризатором R_N краевой задачи (1_0), (3), т.е. таким оператором R_N, что для любой обобщенной вектор-функции ψ с носителем в окрестности V точки $x \in \Gamma$ имеем

$$AR_N\psi = T_N\psi, \quad \mathcal{D}_\Gamma R_N\psi = \psi + T'_N\psi, \tag{10}$$

где T_N и T'_N - сглаживающие операторы при достаточно больших N, порядок сглаживания которых растет при $N\to\infty$. При этом $S\psi$ отличается от $\mathcal{B}_\Gamma R_N\psi$ на сглаживающий оператор $T''_N\psi$ того же типа:

$$S\psi - \mathcal{B}_\Gamma R_N\psi = T''_N\psi, \quad \operatorname{supp}\psi\subset V. \tag{11}$$

Построение оператора R_N сводится к решению краевой задачи на полуоси R^1_+ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $(x,\xi)\in T'(\Gamma)$.

Пусть W - область в G такая, что $\overline{W}\cap\Gamma=\overline{V}$, где V - достаточно малая окрестность некоторой точки $x\in\Gamma$. В этой области вводятся такие координаты (y,t), что граница Γ в них задается уравнением $t=0$, а область W - неравенствами $t>0$, $|y|^2+t^2<\varepsilon$ при некотором $\varepsilon>0$.

Оператор $A(x,\mathcal{D}_x)$, записанный в этих координатах, обозначается через $A(y,t,\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_t)$, а его полный символ через $A(y,t,\xi,\tau)$. Здесь удобно использовать понятие обобщенной однородности. Матричная функция $P(z,t,\xi,\tau)$ называется обобщенно однородной по $(z,t)^-,(\xi,\tau)^+$ порядка (p,s), если для любых $\lambda>0$ выполняется

$$P(\lambda^{-1}z,\lambda^{-1}t,\lambda\xi,\lambda\tau) = J_p(\lambda)P(z,t,\xi,\tau)J_s(\lambda), \tag{12}$$

где p и s - заданные целочисленные векторы, а $J_s(\lambda)$ - диагональная матрица, соответствующая вектору s.

Для любых $x\in V$ и $N>0$ операторы $A,\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ представляются в виде

$$A(y,t,\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_t) = \sum_{k=0}^{N} A_k(x,y-x,t,\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_t) + A'_N(x,y-x,t,\mathcal{D}_y,\mathcal{D}_t),$$
$$\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{N}\mathcal{B}_k + \mathcal{B}'_N, \qquad \mathcal{D} = \sum_{k=0}^{N}\mathcal{D}_k + \mathcal{D}'_N, \tag{13}$$

где $A_k,\mathcal{B}_k,\mathcal{D}_k(x,z,t,\xi,\tau)$ - матричные многочлены по z,t,ξ,τ, зависящие от параметра x, обобщенно однородные по $(z,t)^-,(\xi,\tau)^+$ порядков $(a-k,s)$, $(b-k,s)$ и $(d-k,s)$ соответственно; коэффициенты операторов $A'_N,\mathcal{B}'_N$ и $\mathcal{D}'_N$ при больших N обращаются в нуль при всех x в точке $(z,t)=(0,0)$, причем порядок этого нуля растет при $N\to\infty$. Разложение (13) получается в результате применения формулы Тэйлора для каждого элемента матриц $A,\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ в точке $(y,t)=(x,0)$ и группировки членов разложения, имеющих одинаковый обобщенный порядок однородности. В частности, $A_0,\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{D}_0$ - это главные части соответствующих операторов с коэффициентами, замороженными в точке $(y,t)=(x,0)$.

Пусть $\tilde{A}_k = A_k(x,i\frac{\partial}{\partial\xi},t,\xi,\mathcal{D}_t)$ и аналогично $\tilde{\mathcal{B}}_k,\tilde{\mathcal{D}}_k$. На полупрямой $t>0$ рассматривается следующее семейство краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра $(x,\xi)\in T'(V)$:

$$\tilde{A}_0 E_0(x,\xi,t)=0,\quad t>0,$$
$$\tilde{D}_0 E_0(x,\xi,0)=I_\tau,\quad E_0\to 0,\ t\to+\infty, \tag{14_0}$$

. . . .

$$\tilde{A}_0 E_\kappa(x,\xi,t)=-\tilde{A}_1 E_{\kappa-1}(x,\xi,t)-\ldots-\tilde{A}_\kappa E_0(x,\xi,t),\ t>0,$$
$$\tilde{D}_0 E_\kappa(x,\xi,0)=-\tilde{D}_1 E_{\kappa-1}(x,\xi,0)-\ldots-\tilde{D}_\kappa E_0(x,\xi,0),\ E_\kappa\to 0,\ t\to\infty, \tag{14_κ}$$

относительно неизвестных $(\ell\times\tau)$ -матриц $E_\kappa(x,\xi,t)$, $\kappa=0,1,\ldots,N$.

Задачи (14_κ), $\kappa=0,\ldots,N$, однозначно разрешимы тогда и только тогда, когда краевая задача (1), (3) эллиптична, т.е. удовлетворяет условию Лопатинского. При этом $E_\kappa(x,\xi,t)$ - обобщенно однородная по ξ^+, t^- матрица порядка $(-s,-d-\kappa)$ с элементами класса C^∞ по $(x,\xi)\in T'(V)$.

Далее определяется оператор

$$G_\kappa\psi(x)=F^{-1}_{\xi\to y}F_{x\to\xi}\,\beta(\xi)E_\kappa(x,\xi,t)\,\psi(x), \tag{15}$$

который переводит обобщенные функции $\psi(x)$ на R^{n-1} с компактными носителями в V в обобщенные функции в W. Здесь $\beta(\xi)$ - функция класса $C^\infty(R^{n-1})$, равная нулю при $|\xi|<\frac{1}{2}$ и единице при $|\xi|>1$. Тогда семейство операторов

$$R_N=\sum_{\kappa=0}^{N}G_\kappa \tag{16}$$

является локальным регуляризатором задачи (1_0), (3).

Полный символ $K(S^*)$ оператора, сопряженного к S, в локальной системе координат $x=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ в окрестности V задается формальным рядом

$$K(S^*)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j^*(x,\xi),\quad a_j(x,\xi)=\sum_{\kappa+\ell=j}\tilde{B}_\ell E_\kappa(x,\xi,0), \tag{17}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. В частности, символ оператора S порядка $(b,-d)$ равен

$$\sigma(S)=\tilde{B}_0(x,\xi,D_t)E_0(x,\xi,0). \tag{18}$$

Из этой формулы вытекает, что задача (1_0), (2) эллиптична, если и только если эллиптична система S.

п°.3. В работе [4] рассмотрены краевые задачи, которые приводят к равномерно неэллиптическим системам на Γ. Мы рассмотрим краевые задачи, которые приводят к более широкому классу слабоэллиптических систем.

Определение. Задачу (1_0), (2) назовем слабоэллиптической, если слабоэллиптична система $Sv=g$. Величину $\omega+|d|$, где ω - степень слабой эллиптичности оператора S, назовем степенью слабой эллиптичности задачи (1_0), (2).

Так же, как в [4], корректность этого определения показывает следующая

Лемма 2. *Слабая эллиптичность краевой задачи* $(1_0),(2)$ *и ее степень не зависят от выбора вспомогательной эллиптической краевой задачи* $(1_0),(3)$.

Действительно, пусть имеется еще один оператор D'_Γ порядка (d',s), определяющий для системы (1_0) эллиптическую краевую задачу, и пусть R' - регуляризатор этой задачи. Тогда

$$S' = B_\Gamma R' \quad \text{и} \quad \mathscr{E} = D_\Gamma R' \tag{19}$$

являются матричными п.д. операторами на Γ порядков $(b,-d')$ и $(d,-d')$ соответственно, причем оператор $\mathscr{E}$ эллиптичен. Из (6) и (19) имеем

$$S'\psi = B_\Gamma D_\Gamma^{L} D_\Gamma R'\psi + T\psi = S\mathscr{E}\psi + T\psi, \tag{20}$$

где T - п.д. оператор порядка $-\infty$. Если оператор S слабоэллиптичен [1], т.е. если существует цепочка $C_p \dots C_1$ глобальных C -преобразований оператора S такая, что оператор $C_p \dots C_1 J_{-b} S$ имеет порядок $(0,-d)$ и эллиптичен в $\bar G$, то оператор S' также слабоэллиптичен, так как, в силу (20), оператор

$$C_p \dots C_1 J_{-b} S'\psi = C_p \dots C_1 J_{-b} S \cdot \mathscr{E}\psi + T'\psi \tag{21}$$

имеет порядок $(0,-d')$ и эллиптичен в $\bar G$. Причем если ω и ω' - степени слабой эллиптичности операторов S и S', то $\omega' = \omega + |d| - |d'|$ или

$$\omega' + |d'| = \omega + |d|,$$

т.е. величина $\beta \equiv \omega + |d|$ - степень слабой эллиптичности задачи $(1_0),(2)$ - не зависит от выбора вспомогательной задачи (1),(3).

Заметим, что для определения принадлежности задачи $(1_0),(2)$ к классу слабоэллиптических задач степени β достаточно от элементов a_{ij} эллиптического оператора A и b_{ij} граничного оператора B взять только значения на Γ коэффициентов, стоящих при производных порядка не ниже a_i+s_j-n и b_i+s_j-n, $n<|b|-\beta$, а также производные по нормам порядка не выше $n-k$ для коэффициентов, стоящих при производных порядка a_i+s_j-k и b_i+s_j-k соответственно, $k\le n$. Это вытекает из того, что в силу формулы (17) по этим данным уже однозначно определяются первые $n+1$ членов полного символа матрицы S.

Перейдем к рассмотрению функциональных пространств, в которых действует оператор B_Γ, соответствующий задаче $(1_0),(2)$. Напомним [1], что любая цепочка эллиптических операторов $C_1,\dots,C_p$ определяет пространство $H_C^{k-b-1/2}(\Gamma)$ обобщенных вектор-функций h таких, что $C_p \dots C_1 J_{-b} h \in H^{k-1/2}(\Gamma)$. Причем

$$H^{k-b-p-1/2}(\Gamma) \subset H_C^{k-b-1/2}(\Gamma) \subset H^{k-b-1/2}(\Gamma), \tag{22}$$

и одно и то же пространство $H_C^{k-b-1/2}$ может быть определено различными эквивалентными цепочками. В силу теоремы 3 из [1], слабоэллиптическому оператору S соответствует такое пространство $H_C^{k-b-1/2}(\Gamma)$, задаваемое произвольной цепочкой, приводящей S к эллиптическому оператору, что

$$S: H^{\kappa-d-1/2}(\Gamma) \longrightarrow H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma) \tag{23}$$

нётеров.

Обратно, если существует такое пространство $H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma)$, что оператор (23) нётеров, то S является слабоэллиптическим оператором и любая цепочка, определяющая $H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma)$, приводит S к эллиптическому оператору порядка $(0,-d)$.

Слабоэллиптической краевой задаче соответствует нётеров оператор B_Γ, действующий в пространствах

$$B_\Gamma: H^{\kappa+s}(G) \cap \operatorname{Ker} A \longrightarrow H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma), \tag{24}$$

причем последнее из них определяется произвольной цепочкой, приводящей S к эллиптическому оператору, и не меняется при выборе другой цепочки или другой вспомогательной краевой задачи (1_0), (3). Нётеровость оператора (24), в силу теоремы 2, следует из нётеровости операторов (4) и (23).

Обратно, если существует пространство $H_C^{\kappa-b-1/2}$ такое, что оператор (24) нётеров, то оператор $S = B_\Gamma D_\Gamma^L$ является нётеровым в пространствах (23) и, следовательно, является слабоэллиптическим. Итак, доказана

Теорема 4. *Если эллиптический оператор A имеет какую-либо краевую задачу (1), (3), удовлетворяющую условию Лопатинского, то оператор B_Γ, соответствующий задаче (1_0), (2), нётеров в пространствах (24) тогда и только тогда, когда задача (1_0), (2) слабоэллиптична.*

Из теоремы 2 с учетом того, что образ оператора S содержится в образе оператора B_Γ, легко вытекает

Теорема 5. *Ядро оператора (24) задачи (1_0), (2) состоит из вектор-функций класса $C^\infty(\bar G)$, а область значений определяется условиями ортогональности к вектор-функциям класса $C^\infty(\Gamma)$. Кроме того, если $u \in \bigcup H^\kappa(G_1)$ – любое обобщенное решение слабоэллиптической задачи (1_0), (2) и $U^\kappa \in H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma)$, то $u \in H^{\kappa+s}(G)$.*

Как обычно, индексом $\varkappa(B_\Gamma)$ оператора (24) назовем разность между числом линейно-независимых решений однородной задачи (1_0), (2) и числом линейно-независимых вектор-функций, ортогональность к которым обеспечивает разрешимость задачи (1_0), (2). В силу теоремы 5, индекс $\varkappa(B_\Gamma)$ не зависит от $k \in R^1$, $k > |b|$.

Теорема 6. *Пусть задача (1_0), (2) слабоэллиптична. Тогда индексы операторов (4), (23) и (24) связаны соотношением*

$$\varkappa(B_\Gamma) = \varkappa(S) + \varkappa(D_\Gamma). \tag{25}$$

Доказательство. В силу теоремы об индексе произведения нётеровых операторов, из формул (7) и (6) имеем

$$æ(S) = æ(B_\Gamma) + æ(R)\,, \quad æ(R) = -æ(D_\Gamma)\,,$$

откуда следует соотношение (25).

п.°4. Перейдем к изучению разрешимости задачи (2) для неоднородного уравнения (1). Следуя [4], рассмотрим вспомогательную краевую задачу (1), (3_0), положив $v \equiv 0$. Так как задача (1),(3) удовлетворяет условию Лопатинского, то оператор

$$A: H^{k+s}(G) \cap \operatorname{Ker} D_\Gamma \longrightarrow H^{k-a}(G) \tag{26}$$

нётеров. Следовательно, для любых f из $H^{k-a}(G)$ ортогональных конечному числу бесконечно дифференцируемых в G функций φ_j, $1 \leq j \leq n_1$, в $H^{k+s}(G)$ существует решение и этой задачи. Обозначим через $R_1 f$ оператор, который каждой такой функции f ставит в соответствие решение задачи (1),(3), ортогональное всем решениям однородной задачи (1_0),(3_0). На все пространство $H^{k-a}(G)$ оператор R_1 распространяется по линейности, причем $R_1 f = 0$, если f принадлежит коядру оператора (26). Тогда R_1 - регуляризатор оператора (26):

$$AR_1 f = f - T'f\,, \qquad DR_1 f\big|_\Gamma = 0 \tag{27}$$

и

$$R_1 Au = u - Tu, \text{если } Du\big|_\Gamma = 0\,,$$

здесь T и T' - операторы проектирования на ядро и коядро оператора (26), которые являются бесконечно сглаживающими. Пусть f ортогональна всем φ_j. Для таких f решение задачи (1),(2) ищется в виде

$$u = R_1 f + w. \tag{28}$$

Тогда для w имеем задачу (1_0),(2):

$$Aw = 0 \quad \text{в} \quad G, \qquad Bw\big|_\Gamma = h \tag{29}$$

с $h = g - B_\Gamma R_1 f \in H^{k-b-1/2}(\Gamma)$, поскольку $R_1 f \in H^{k+s}(G)$.

Так как задача (29) является слабоэллиптической, то, в силу теорем 4 и 5, она разрешима в $H^{k+s}(G)$, если h принадлежит пространству $H_c^{k-b-1/2}(\Gamma)$ и ортогональна конечному числу линейно-независимых функций ψ_j класса $C^\infty(\Gamma)$:

$$\int_\Gamma h(x)\psi_j(x)ds = 0, \quad n_1 < j \leq n. \tag{30}$$

Обозначая через φ_j при $j > n_1$ функционал

$$(\varphi_j, f) \equiv -\int_\Gamma \psi_j B_\Gamma R_1 f ds, \quad n_1 < j \leq n, \tag{31}$$

и считая $\psi_j = 0$ при $j \leq n_1$, условие разрешимости задачи (1), (2) можно переписать как условие ортогональности пары (f, g) всем парам (φ_j, ψ_j):

$$(\varphi_j, f) + (\psi_j, g) = 0\,, \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{32}$$

В силу свойств оператора R_1 и включения (22) для принадлежности h к пространству $H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma)$ достаточно потребовать, чтобы $f\in H^{\kappa-a+p}(G)$ и $g\in H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma)$. Довольно трудно найти необходимые условия принадлежности h к этому пространству отдельно на f и g, т.е. указать естественные пространства, в которые действует оператор слабоэллиптической задачи (1),(2). Поэтому мы ограничимся утверждением, менее точным, чем теорема 4.

Теорема 7. *Если задача* (1),(2) *слабоэллиптична степени* β, *то для любого* $k>\max(b',d')-p+\frac{1}{2}$ *она имеет в пространстве* $H^{k+s}(G)$ *решение для всех* $f\in H^{\kappa-a+p}(G)$, $g\in H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma)$, *удовлетворяющих конечному числу условий ортогональности* (32).

Однородная задача имеет конечное число линейно-независимых решений, и эти решения бесконечно дифференцируемы вплоть до границы. Кроме того, если имеется такое обобщенное решение $u(x)\in\bigcup_\kappa H^{\kappa}(G)$ *задачи* (1),(2), *что для нее имеет смысл выражение* $Bu|_\Gamma$ *и* $f\in H^{\kappa-a+p}(G)$, $g\in H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma)$, *то* $u\in H^{\kappa+s}(G)$.

Здесь b' *- максимальный порядок дифференцирования по нормали у оператора* B; p *- максимальный порядок композиции* $C_p\ldots C_1$ *цепочки, приводящей оператор* $J_{-b}S$ *к эллиптическому,* $p\leq|b|-\beta$.

Первая часть теоремы уже доказана нами. Докажем утверждение теоремы о гладкости решений. Рассмотрим обобщенное решение $u(x)$ задачи (1),(2). В силу (27), функция $w\equiv u-R_1 f$ является решением задачи

$$Aw=T'f\ ,\quad Bw|_\Gamma=h, \tag{33}$$

где $h=g-B_\Gamma R_1 f\in H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma)$, $T'f\in C^\infty(\bar G)$.

Поскольку $R_1 f\in H^{\kappa+s}(G)$, то достаточно показать, что $w\in H^{\kappa+s}(G)$. Для этого рассмотрим регуляризатор R оператора (4). Из соотношений (5),(6) и (33) имеем

$$A(RD_\Gamma w-w)=T'f\ ,\quad D_\Gamma(RD_\Gamma w-w)=T_1 w, \tag{34}$$

где $T_1'f$ и $T_1 w$ - бесконечно дифференцируемые функции в $\bar G$ и на Γ соответственно.

Из теоремы о гладкости решений эллиптической задачи следует, что $RD_\Gamma w-w\equiv Tw$ - функция класса $C^\infty(\bar G)$.

Применяя к этому равенству оператор B_Γ и учитывая (7) и (33), получаем, что

$$SD_\Gamma w=h-T_2 w,\quad T_2 w\in C^\infty(\bar G). \tag{35}$$

Так как оператор S порядка $(b,-d)$ слабоэллиптичен и $h-T_2 w\in H_C^{\kappa-b-1/2}(\Gamma)$, то, согласно теореме 5, $D_\Gamma w\in H^{\kappa-d-1/2}(\Gamma)$. Вспоминая, что $Aw\in C^\infty(\bar G)$ и еще раз используя теорему о гладкости решений эллиптической задачи, получаем, что $w\in H^{\kappa+s}(G)$. Итак, $u=w+R_1 f\in H^{\kappa+s}(G)$, что и требовалось доказать.

Что касается природы функционалов φ_j в условии ортогональности (32), то в [4] доказано для однородной эллиптической системы порядка $2m$, что $\varphi_j \in C^{\infty}(\bar{G}), \psi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, если порядок дифференцирования по нормали b' у оператора B меньше $2m$, в противном случае функционал φ_j представляется в виде суммы функции χ_j, бесконечно дифференцируемой в $\bar{G}$, и обобщенной функции с носителем на Γ:

$$\varphi_j = \chi_j + \sum_{i=0}^{b'-2m} \mu_{ij}(x)\delta^{(i)}(\Gamma), \qquad b' \geq 2m,$$

где $\delta^{(i)}(\Gamma)$ - производные δ - функции, а функции μ_{ij} бесконечно дифференцируемы. Аналогичный результат имеет место и в общем случае, причем условие $b' < 2m$, при котором φ_j и ψ_j - бесконечно дифференцируемые функции, заменяется условием

$$\max_k \operatorname{ord}' B_{kj} \leq \min_i \operatorname{ord} A_{ij} \qquad \forall j,$$

причем в $\operatorname{ord}' B_{kj}$ учитывается лишь порядок дифференцирования по нормали.

п.5. Пример. Рассмотрим вариант обратной задачи ньютонова потенциала. Линеаризованная задача об отыскании области и плотности по паре внешних потенциалов ρ_1 и ρ_2 приводится (В.М.Исаков) к следующей задаче: найти гармонические в области $G \subset \mathbb{R}^3$ функции u_1, u_2, удовлетворяющие следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} &(\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2)|_\Gamma = g_1, \\ &\left(\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} + \rho_2 \rho u_2\right)\Big|_\Gamma = g_2, \end{aligned} \tag{36}$$

где ρ_1, ρ_2 - положительные гармонические функции в области $G_1 \supset \bar{G}$; ν - внутренняя нормаль, а $\rho = \partial/\partial\nu \, \ln \rho_2/\rho_1$.

Покажем, что задача (36) является слабоэллиптической, если $\rho|_\Gamma \neq 0$. Порядки (a, s) и (b, s) операторов $A = \Delta I_2$ и B из (36) выберем так: $a = (0,0)$, $s = (2,2)$, $b = (-2,-1)$. Используем вспомогательную задачу Дирихле. Тогда оператор S приводится к эллиптическому п.д. оператору S_1 порядка $(\hat{b}_1, -d) = (-2,-2;2,2)$. Выберем ортогональную систему координат y в окрестности граничной точки x так, чтобы область G определялась неравенством $y_n = t \geq 0$, линии, параллельные оси t, были геодезическими нормалями к границе Γ, а величина t совпадала бы с длиной дуги. Следуя п.°2, для оператора Лапласа имеем разложение: $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \ldots$,

где

$$\Delta_0 = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j(x)\, \partial^2/\partial y_j^2, \tag{37}$$

$$\Delta_1 = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_i}(x)(y_i - x_i)\, \partial^2/\partial y_j^2 + \sum_{j=1}^{3} \beta_j(x)\, \partial/\partial y_j, \tag{38}$$

причем α_j и β_j выражаются через коэффициенты метрического тензора [13] и $\alpha_3 = 1$. Аналогично для матрицы B граничного условия (36) имеем

$$B = B_0 + B_1 + \dots ,$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} \rho_1(x) & -\rho_2(x) \\ \rho_1(x)\frac{\partial}{\partial t} & -\rho_2(x)\partial/\partial t \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \rho_1}{\partial y_j}(x)(y_j - x_j) & -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \rho_2}{\partial y_j}(y_j - x_j) \\ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \rho_1}{\partial y_j}(x)(y_j - x_j)\frac{\partial}{\partial t} & \rho_2(x)\rho(x) - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \rho_2}{\partial y_j}(y_j - x_j) \end{pmatrix}.$$

Задача (14_0) на полупрямой $t \geqslant 0$:

$$\tilde{\Delta}_0 E_0 \equiv \left(|\xi|^2 - \frac{d^2}{dt^2}\right) E_0(x,\xi,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$E_0(x,\xi,0) = I_2, \quad E_0 \to 0, \quad t \to +\infty,$$

имеет решение $E_0(x,\xi,t) = e^{-|\xi| t} I_2$,

где $|\xi|$ - длина вектора ξ ,кокасательного к Γ в точке x . Задача (14_1) имеет вид: $\tilde{\Delta}_0 E_1 = -\tilde{\Delta}_1 E_0$, $t > 0$,

$$E_1(x,\xi,0) = 0, \quad E_1 \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Легко подсчитать, что $\tilde{\Delta}_1 E_0 = (d_1 + d_2 t) e^{-|\xi| t} I_2$, поэтому $E_1 = (b_1 t + b_2 t^2) e^{-|\xi| t} I_2$.

Функции d_1, d_2 и b_1, b_2 вполне выражаются через коэффициенты операторов (37) и (38), однако, как мы увидим, окончательный результат не зависит от E_1 , поэтому мы не будем выписывать эти выражения. В силу формул (17) и (39), первые слагаемые $a_0^* + a_1^*$ полного символа сопряженного оператора S^* порядка $(d; b) = (2,2; -2,-1)$ имеют вид:

$$a_0^* + a_1^* = (\tilde{B}_0 E_0)^* \big|_{t=0} + (\tilde{B}_1 E_0 + \tilde{B}_0 E_1)^* \big|_{t=0} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_1(x) & -\rho_1(x)|\xi| \\ -\rho_2(x) & \rho_2(x)|\xi| \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \rho_1(x)\overline{b_1(x,\xi)} + i c_1(x,\xi) \\ 0 & \rho_2(x)\rho_2(x) - \rho_2(x)\overline{b_1(x,\xi)} - i c_2(x,\xi) \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где

$$c_k(x,\xi) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \rho_k}{\partial y_j}(x) \frac{\partial |\xi|}{\partial \xi_j};.$$

$b_1(x,\xi)$ и $c_1(x,\xi)$ имеют нулевой порядок по ξ .

Обозначим через $\rho(D)$ оператор с символом $\sigma_1(P) = |\xi|$ и положим

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & P(D) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Легко убедиться, что $S_1^* = S^* C^*$ - оператор нулевого порядка с символом

$$\sigma_0(S_1^*) = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_1 \bar{b}_1 + ic_1 \\ -\rho_2 & \rho_2 \rho - \rho_2 \bar{b}_1 - ic_2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det \sigma_0 (S_1^*) = \rho_1 \rho_2 \rho(x) - i(\rho_1 c_2 + \rho_2 c_1), \rho_1, \rho_2 > 0$, на Γ и мнимая часть $\rho_1 c_2 + \rho_2 c_1$, линейная по ξ при $|\xi| = 1$, всегда обращается в нуль для некоторого ξ, то оператор S_1^* эллиптичен тогда и только тогда, когда $\rho|_\Gamma \neq 0$.

Следовательно, оператор S приводим слева к оператору $S_1 = CS$ нулевого порядка (или порядка $(b_1; -d) = (-2, -2; 2, 2))$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 4 вытекает

Теорема 8. *Оператор B_Γ задачи* (36) *нётеров в пространствах*

$$B_\Gamma : H^{k+(2,2)}(G) \cap \mathrm{Ker}(\Delta I_2) \to H_C^{k+(2,2)-1/2}(\Gamma), \quad k \geqslant 0,$$

тогда и только тогда, когда $S|_\Gamma \neq 0$.

Здесь $H_C^{k+(2,2)-1/2}(\Gamma)$ - пространство обобщенных вектор-функций $g = (g_1, g_2)$ таких, что $Cg \in H^{k+(2,2)-1/2}(\Gamma)$, или, ввиду (41), таких g, что g_1 и $\rho g_1 + g_2$ принадлежат $H^{k+1\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Так как задача Дирихле имеет нулевой индекс и оператор C обратим, то из теоремы 6 имеем $\varkappa(B_\Gamma) = \varkappa(S_1)$.

Замечания. Двумерные краевые задачи в области $G \subset R^2$ можно приводить также к системе сингулярных интегральных уравнений на Γ и использовать теорию, развитую для таких систем в пространствах Гёльдера (см. [14,15]). Для эллиптических систем 2-го порядка с постоянными коэффициентами при старших производных в работе [16] указан способ вычисления коэффициентов системы на Γ через коэффициенты задачи Дирихле. Различные примеры рассмотрены в работах [15-18].

Литература

1. Сакс Р.С. Слабоэллиптические системы псевдодифференциальных уравнений на многообразии без края.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л.Соболева),1978, №2, с.103-126.
2. Сакс Р.С. Слабоэллиптические системы дифференциальных уравнений и их свойства.- В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального

анализа к задачам математической физики (Труды семинара С.Л.Соболева), 1979, №1, с.91-118.

3. Хермандер Л. Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи.- В кн.: Псевдодифференциальные операторы.-М., Мир, 1967, с.166-296.

4. Вайнберг Б.Р., Грушин В.В. О равномерно неэллиптических задачах. ч.I.-Мат.сб., 1967, т.72, №4, с.602-636; ч.П.- Мат.сб., 1967, т.73, №1, с.126-154.

5. Douglis A., Nirenberg L. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. - Comm.Pure Appl.Math.,1955,v.8, p. 503-538.

6. Солонников В.А. Переопределенные эллиптические краевые задачи.- Записки научных семинаров ЛОМИ, 1971, т.21, №5, с.112-158.

7. Солонников В.А. Об общих краевых задачах эллиптических в смысле А.Дуглиса-Л.Ниренберга. ч.I.-Изв.АН СССР., Сер.мат. , 1964, т.28, №3, с.665-706; ч.П - Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1966, т.92, с.233-297.

8. Агранович М.С., Дынин А.С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области.- Докл.АН СССР, 1962, т.142, №3, с.511-514.

9. Волевич Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем.- Мат.сб.,1965, т.68, №3, с.373-416.

10. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.-М.: Мир, 1965.-380 с.

11. Соломяк М.З. О линейных эллиптических системах первого порядка.- Докл. АН СССР, 1963, т.150, №1, с.48-51.

12. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.-М.: Наука, 1974.-808 с.

13. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов.- М.: Наука, 1978.- 296 с.

14. Сакс Р.С. К теории систем одномерных сингулярных интегродифференциальных уравнений, приводимых к системам нормального типа.- Докл.АН СССР, 1977, т.234, № 3, с.544-547.

15. Сакс Р.С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Новосибирск, изд-во НГУ, 1975.- 164 с.

16. Сакс Р.С. О задаче Дирихле для одного класса эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка.- Дифференц. уравнения, 1970,т.6, № 1, с. 72-85.

17. Сакс Р.С. Об одной неэллиптической задаче Дирихле.-Докл.АН СССР,1967, т.177, №4, с.786-789.

18. Сакс Р.С. О задаче Дирихле для эллиптической системы А.В.Бицадзе с младшими производными.- Дифференц.уравнения, 1971, т.7, №1, с.121-134.