УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ 3-ГО ПОРЯДКА

Р.А.Зуева (Ашхабад)

Рассмотрим в многомерной области уравнение составного типа

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial}{\partial t}\left(\kappa(x,t)\Delta u + |u_t|^{\rho} u_{tt} - |u|^{\rho_1}u\right) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + a(x,t)u_t - |u|^{\rho_2}u = f(x,t), \tag{1}$$

где $\kappa(x,t)>0,\ t>0,\ \kappa(x,0)=0,\ \ \Delta u=\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$,

$$\rho, \rho_1 = const \geq 0\ ;\ \ 0 \leq \rho_2 \leq \frac{8}{n-3}.$$

Краевые задачи для уравнений такого типа (как линейных, так и нелинейных) изучались в работах [1-3] .

Отличительной особенностью рассматриваемого уравнения является сильная нелинейность его главной части и также зависимость коэффициентов уравнения (1) от переменной t.

В настоящей работе при некоторых условиях на коэффициенты уравнения (1) доказывается обобщенная разрешимость в пространстве типа Соболева и единственность регулярного решения краевой задачи для уравнения (1).

Пусть $\mathcal{D}\subset R^n$- ограниченная односвязная область с гладкой границей γ . Положим $G=\mathcal{D}\times(0,1),\ S=\gamma\times(0,1),\ \partial G=\Gamma.$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области G , удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$u\big|_{\partial G}=0, \quad u_t\big|_{t=0}=0. \tag{2}$$

Всюду ниже будем предполагать, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu_1|\xi|^2, \quad |\xi|^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,$$

$$\mu_1>0\ ;\ \ \kappa(x,t),\ a_{ij}(x,t),\ a(x,t)\in C^2(\bar{G}).$$

Через $\|\cdot\|_p$ $(p\geq 0)$ будем обозначать норму в пространстве Соболева $W_2^p(G)$, через $\tilde{H}(G)$ - класс функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям (2) и таких, что

$$\|u\|_{\tilde{H}}^2=\int_G\left(\alpha\kappa(x,t)\sum_{i=1}^{n}u_{x_i t}^2+|u_t|^{\rho}u_{tt}^2+|u|^{\rho_1}u_t+|u|^{\rho_2+2}\right)dG+\|u\|_1^2<\infty,$$

где $\alpha = \alpha(t) = (1-t)^2$.

Определение. Функцию $u(x,t) \in \widetilde{H}(G)$ будем называть *обобщенным* решением краевой задачи (1)-(2), если для всех функций $v(x,t) \in C^{\infty}(\bar{G})$, таких, что $v\big|_{\partial G} = 0$, $v_t\big|_{t=1} = 0$, имеет место тождество

$$B(u,v) = \Big(\kappa(x,t)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}, \sum_{i=1}^{n} v_{t x_i}\Big) + \frac{1}{\rho+1}\big(|u_t|^{\rho} u_t, v_{tt}\big) +$$

$$+ (|u|^{\rho_1} u, v_t) - \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j}, 1\Big) - \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij x_j} u_{x_i} + a_t u, v\Big) +$$

$$+ \Big(\sum_{i=1}^{n} \kappa_{x_i} u_{x_i} - a u, v_t\Big) - \big(|u|^{\rho_2} u, v\big) = (f, v), \tag{3}$$

здесь (f,g) - скалярное произведение в $L_2(G)$.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть в области G выполнены условия*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(a_{ii} + \tfrac{1}{2}\kappa_t\big)\xi_i^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\Big) \geq \mu_2|\xi|^2,\ \mu_2 > 0,$$
$$a(x,t) < \delta < 0;\ \rho > 0,\ n \leq 6;\ \rho \leq \frac{2}{n-6},\ n > 6. \tag{4}$$

Тогда для любой функции $f(x,t) \in L_2(G)$ существует обобщенное решение краевой задачи (1)-(2) $u \in \widetilde{H}(G)$ *такое, что*

$$\sqrt{\alpha\kappa(x,t)}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|u_t|^{\frac{\rho}{2}} u_t\Big) \in L_q(G),\quad q = 2 - \frac{\rho}{\rho+1}.$$

Доказательство. Воспользуемся методом "ε- регуляризации." В области G рассмотрим "возмущенное" уравнение

$$\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon\big(D_t^4 u_\varepsilon + \Delta^2 u_\varepsilon\big) + \mathcal{L} u_\varepsilon = f(x,t) \quad (\varepsilon > 0) \tag{5}$$

и для него краевую задачу: найти решение уравнения (5) в области G, удовлетворяющее условиям:

$$u_\varepsilon\big|_{\partial G} = 0,\quad u_{\varepsilon t}\big|_{t=0} = u_{\varepsilon tt}\big|_{t=1} = 0,\quad u_{\varepsilon\nu}\big|_{S} = 0, \tag{6}$$

где $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n)$ - вектор внутренней нормали.

Из известных результатов [4,5] теории краевых задач для уравнений эллиптического типа и несложных априорных оценок следует, что для любой функции $f(x,t) \in L_2(G)$ существует решение $u_\varepsilon \in W_2^4(G)$ вспомогательной краевой задачи (5),(6).

Получим априорные оценки, равномерные по ε, и покажем, что в процессе предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ семейство найденных решений слабо компактно.

Умножив скалярно обе части уравнения (5) на βu_ε и проинтегрировав по частям с учетом граничных условий (6) и условий теоремы (4), имеем ($\beta = t - N$,

$N-const>1)$:

$$|(\mathcal{L}u_\varepsilon,\beta u_\varepsilon)|\geq\varepsilon\int\limits_G\Big(u^2_{\varepsilon tt}+\sum_{i=1}^n u^2_{\varepsilon x_ix_i}\Big)dG+$$
$$+c\int\limits_G|u_{\varepsilon t}|^{\rho+2}dG+c\int\limits_G\Big(\sum_{i=1}^n u^2_{\varepsilon x_i}+|u_\varepsilon|^{\rho_2+2}\Big)dG. \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$(\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon,\alpha(t)u_{\varepsilon t})=\frac{\varepsilon}{2}\Big(\sum_{i=1}^n u^2_{\varepsilon x_ix_i},\alpha_t\Big)-\Big(\sum_{i=1}^n u^2_{\varepsilon x_it},\alpha K\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(u^2_{\varepsilon t},\alpha\sum_{i=1}^n K_{x_ix_i}\Big)+(u^2_{\varepsilon t},a\alpha)-\big(|u_{\varepsilon t}|^\rho u^2_{\varepsilon tt},\alpha\big)-$$
$$-\big(|u_{\varepsilon t}|^\rho u_{\varepsilon tt},\alpha_t u_{\varepsilon t}\big)-(\rho_1+1)\big(|u_\varepsilon|^{\rho_1}u^2_{\varepsilon t},\alpha\big)+\frac{1}{\rho_2+2}\big(|u_\varepsilon|^{\rho_2+2},\alpha_t\big)+$$
$$+\ldots+\varepsilon\int\limits_{\partial G}u^2_{\varepsilon t}\alpha_{tt}\nu_0\,d\Gamma-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\partial G}u^2_{\varepsilon tt}\alpha\nu_0\,d\Gamma \qquad (8)$$

(здесь точками обозначены подчиненные интегралы, а интегралы по границе области, возникающие в процессе интегрирования по частям, обращаются в нуль в силу условий (6)).

Применив неравенства Гёльдера и Коши, оценим интеграл $(|u_{\varepsilon t}|^\rho u_{\varepsilon tt}\alpha_t u_{\varepsilon t})$ и, в силу выбора $\alpha(t)$ и условий (4), из (8) получаем вторую основную оценку

$$\big|(\mathcal{L}_\varepsilon u_\varepsilon,\alpha(t)u_{\varepsilon t})\big|\geq\varepsilon\Big\|\sum_{i=1}^n u_{\varepsilon x_ix_i}\Big\|_0^2+C\|u_\varepsilon\|^2_{\widetilde{H}}, \qquad (9)$$

откуда $\|\mathcal{L}u_\varepsilon\|_0\geq c\|u_\varepsilon\|_{\widetilde{H}}$

(C - константы, не зависящие от ε).

Воспользуемся теперь полученными априорными оценками для предельного перехода по ε в форме

$$B_\varepsilon(u_\varepsilon,v)\equiv-\varepsilon(D_t^2u_\varepsilon,D_t^2v)-\varepsilon(\Delta u_\varepsilon,\Delta v)+B(u_\varepsilon,v).$$

С помощью (9) и последовательно примененных неравенств Буняковского и Гёльдера с показателем $\rho+1$ установим, что функция $\sqrt{K\alpha}\,|u_{\varepsilon t}|^{\frac{\rho}{2}}u_{\varepsilon x_it}$ суммируема со степенью $q=2-\mu$, где $\mu=\frac{\rho}{\rho+1}$. Действительно,

$$\int\limits_G(\sqrt{K\alpha}\,u_{\varepsilon x_it})^{2-\mu}|u_{\varepsilon t}|^{(2-\mu)\rho/2}dxdt\leq$$
$$\leq\Big(\int\limits_G K\alpha u^2_{\varepsilon x_it}dxdt\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_G(\sqrt{K\alpha}\,u_{\varepsilon x_it})^{2-2\mu}|u_{\varepsilon t}|^{\rho(2-\mu)}dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}\leq$$
$$\leq\Big(\int\limits_G K\alpha u^2_{\varepsilon x_it}dxdt\Big)^{1-\mu}\Big[\int\limits_G\big(|u_{\varepsilon t}|^{\rho(2-\mu)}\big)^{\frac{1}{\mu}}dxdt\Big]^\mu\leq\widetilde{C},$$

где $\widetilde{C}$ - константа, не зависящая от ε .

Следовательно,

$$\sqrt{K\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_{\varepsilon t}|^{p/2}u_{\varepsilon t}\right)\in L_q(G),\quad \left\|\sqrt{K\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_{\varepsilon t}|^{p/2}u_{\varepsilon t}\right)\right\|_{L_q(G)}\leq\tilde{C}. \qquad (10)$$

Из (9),(10) вытекает, что последовательность u_ε ограничена в $\tilde{H}$, а последовательности

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|u_{\varepsilon t}|^{p/2}u_{\varepsilon t}\right),\quad \sqrt{K\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_{\varepsilon t}|^{p/2}u_{\varepsilon t}\right) \qquad (10')$$

равномерно ограничены в $L_q(G)$ $\left(q=2-\frac{\rho}{\rho+1}\right)$.

Таким образом, из последовательности u_ε можно выделить сходящуюся подпоследовательность u_{ε_k} такую, что $u_{\varepsilon_k t}\to u_t$ слабо в $L_p(G)$ и $|u_{\varepsilon_k t}|^{p/2}u_{\varepsilon_k t}$ сходятся почти всюду в области G;

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|u_{\varepsilon_k t}|^{p/2}u_{\varepsilon_k t}\right)\to\theta_1$$

слабо в $L_2(G)$; а последовательность

$$\sqrt{K\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_{\varepsilon_k t}|^{p/2}u_{\varepsilon_k t}\right)$$

слабо сходится в $L_q(G)$ к некоторому пределу θ_2. Но так как функция $|u_{\varepsilon_k t}|^{p/2}u_{\varepsilon_k t}$ монотонна относительно $u_{\varepsilon_k t}$ и в силу того, что последовательность $|u_{\varepsilon_k t}|^{p/2}u_{\varepsilon_k t}$ является сходящейся почти всюду, то отсюда следует, что последовательность $u_{\varepsilon_k t}$ также сходится почти всюду в области G. На основании ограниченности и слабой компактности последовательностей (10'), принимая во внимание лемму Лионса [5, лемма 1.3], мы доказали, что

$$\theta_1=\frac{\partial}{\partial t}\left(|u_t|^{p/2}u_t\right),\qquad \theta_2=\sqrt{K\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_t|^{p/2}u_t\right).$$

Таким образом, из предельного перехода при $\varepsilon\to 0$ в соотношении

$$B_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k},v)=(f,v)$$

следует тождество $B(u,v)=(f,v)$, справедливое для всех $v\in C^\infty(\bar{G})$ и таких, что $v|_{\partial G}=0$ и $v_t|_{t=1}=0$. Следовательно, $u(x,t)$ является обобщенным решением краевой задачи (1),(2).

Теорема 2. *Если a_{ij} есть функции от t такие, что*

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ijt}\eta_i\eta_j\geq 0;\quad a_{tt}(x,t)\geq 0,\quad a_t(x,0)\geq 0;\quad \rho_2=0, \qquad (11)$$

и выполнены условия (4); теоремы 1, то регулярное решение краевой задачи (1)-(2) в области G единственно.

Доказательство. Предположим, что u и v - два регулярных решения краевой задачи (1),(2). Тогда для разности $w=u-v$ имеем

$$\mathcal{L}u-\mathcal{L}v=\frac{\partial}{\partial t}\Big(K(x,t)\Delta w+|u_t|^{\rho}u_{tt}-|v_t|^{\rho}v_{tt}-$$

$$-|u|^{\rho_1}u+|v|^{\rho_1}v\Big)+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}w_{x_ix_j}+a(x,t)w_t-w=0, \qquad (12)$$

$$w\big|_{\partial G} = 0, \qquad w_t\big|_{t=0} = 0. \tag{13}$$

Рассмотрев скалярное произведение обеих частей уравнения (12) с $\int_t^1 w(x,\tau)\,d\tau$, с учетом условий (4),(11),(13), получим

$$|(\mathcal{L}u - \mathcal{L}v, \int_t^1 w(x,\tau)d\tau)| \geq c\,(|u_t|^{\rho+1} - |v_t|^{\rho+1}, w_t) +$$
$$+ (|u|^{\rho_1}u - |v|^{\rho_1}v, w),$$

откуда $(|u|^{\rho_1}u - |v|^{\rho_1}v, w) \leq 0$ и $w \equiv 0$.

Литература

1. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа.- Ташкент: Фан, 1974.- 156 с.
2. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа высокого порядка.- В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики.- Новосибирск, Наука, 1978, с.5-13.
3. Джураев Т.Д., Иргашев Ю. О краевой задаче Каттабрига для нелинейных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками.- В кн.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения.- Ташкент: Фан, 1976, с.141-155.
4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.-М.: Наука, 1974.- 538 с.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.- М.: Мир, 1972.- 587 с.