УДК 517+531

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В.Р.Портнов (Новосибирск)

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании обобщенного решения регулярных вариационных задач для интегральных функционалов, содержащих, вообще говоря, нелинейные операторы (обычно дифференциальные или интегродифференциальные). При этом слово "регулярный" означает, что по указанным операторам рассматриваемые функционалы выпуклы.

Еще в 1900 году Д.Гильберт высказал предположение о разрешимости каждой регулярной вариационной задачи об отыскании минимума интегрального функционала, содержащего производные первого порядка [1, двадцатая проблема], если " в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование" или, другими словами, если искать решение в достаточно широком классе функций.

Двадцатая проблема Гильберта решалась в работах Лебега, Тонелли, Морри, Фридрихса, Реллиха, Куранта, Планшереля (см. [1-5]). В этих работах были созданы так называемые прямые методы исследования вариационных задач, которые позволяют доказать существование обобщенных решений, опираясь на слабую компактность ограниченных множеств в пространствах функций с обобщенными производными и полунепрерывность функционалов относительно слабой сходимости.

Важную роль в обосновании вариационных методов сыграли известные "теоремы вложения" С.Л.Соболева [6] , позволившие, в частности, придать четкий смысл граничным условиям вариационной задачи и выявить допустимые типы граничных условий в случае, когда минимизируемый функционал содержит все производные заданного порядка и в состав границы входят многообразия различной размерности.

В дальнейшем вопросы существования обобщенных решений вариационных задач в пространствах С.Л.Соболева изучались различными математиками. Здесь, прежде всего, следует отметить работы А.Г. Сигалова и В.Н.Казимирова (см.[3, 4] и имеющуюся там библиографию).

Областью, где вариационные методы применялись наиболее интенсивно, явилась статическая теория упругости и пластичности, линейная и нелинейная, пространственная и плоская (см. [7-9]).

Перечислим вкратце условия, при которых обычно, за исключением тривиальных ситуаций, удавалось доказать существование обобщенного решения вариационных задач (в том числе задач теории упругости и пластичности): 1) конечность меры области, по которой ведется интегрирование, 2) рефлексивность пространства, порожденного задачей, 3) коэрцитивность минимизируемого функционала в некотором рефлексивном соболевском пространстве (для задач теории упругости и пластичности - выполнение неравенства Корна), 4) отсутствие вырождения на границе области или различные ограничения на характер вырождения, 5) выпуклость или полувыпуклость минимизируемого функционала (определение полувыпуклости см. в [5, с.142]).

Одним из ограничений на характер вырождения, о которых идет речь в условии 4), является предположение о наличии участка границы, где вырождение отсутствует или является слабым [9, с.233] . Другое известное ограничение содержится в работе С.М.Никольского и П.И.Лизоркина [10] . Так или иначе, все эти ограничения вводятся для того, чтобы иметь неравенство Пуанкаре, из которого следует слабая сходимость минимизирующей последовательности в соответствующем пространстве.

В настоящей работе мы изучим вопрос о существовании решения одной общей вариационной задачи и приведем ряд примеров разрешимых задач вариационного исчисления, в том числе задач теории упругости и пластичности, в которых любое из перечисленных выше условий 1)-5) может, вообще говоря, не выполняться.

§1. Основная теорема существования

Пусть $\mathcal{R}$ - вещественное векторное пространство, Σ - непустое подмножество в $\mathcal{R}$, V - вещественное рефлексивное банахово пространство, Ω - пространство с σ- конечной (положительной) мерой, $S(\Omega, V)$ - совокупность измеримых на Ω в смысле Бохнера абстрактных функций со значениями в пространстве V , $\mathcal{L}: \Sigma \to S(\Omega, V)$ - оператор (не обязательно линейный).

Предположим, что каждому $v \in \Sigma$ поставлена в соответствие функция $\Phi(\cdot,\cdot|v) : \Omega \times V \to \overline{\mathbb{R}}$, и пусть

$$K_\Phi \overset{def}{=} \{ v \in \Sigma \mid \Phi(\cdot, \mathcal{L}(v)|v) \in L_1(\Omega) \}.$$

Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ - непустое подмножество в множестве K_Φ (тем самым, в частности, предполагается, что $K_\Phi \neq \emptyset$), а f - линейный функционал, определенный на некотором векторном подпространстве $\mathcal{R}_0$ в $\mathcal{R}$, содержащем множество $\mathfrak{M}$.

Определение 1.1. Последовательность $\{v_n\}_{n \in N} \subset \mathcal{R}_0 \cap K_\Phi$ называется *квазиминимизирующей* последовательностью функционала $\mathcal{J}_f(\cdot)$ на множестве $\mathfrak{M}$, если

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{J}_f(v_n) = \inf_{w \in \mathfrak{M}} \mathcal{J}_f(w). \tag{1.1}$$

Пусть $\{v_n\}_{n \in N} \subset \mathcal{R}_0 \cap K_\Phi$ - некоторая квазиминимизирующая последовательность функционала $\mathcal{J}_f(\cdot)$ на множестве $\mathfrak{M}$, которая до конца этого параграфа считается фиксированной.

Определение 1.2. Скажем, что элемент v множества $\mathcal{R}_0 \cap K_{\Phi}$ принадлежит множеству $\widehat{\mathfrak{M}}$, если существует элемент $v' \in \mathfrak{M}$ такой, что $g_f(v') \leq g_f(v)$.

Сформулируем ряд условий, при выполнении которых мы докажем существование элемента $v \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющего равенству (1.1).

Положим $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\xi_n(\cdot) = \mathcal{L}(v_n).$$

Условие 1.1. Существуют непустое не более чем счетное семейство $\mathfrak{A} = \{\Omega_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ измеримых подмножеств пространства Ω и функция $\xi(\cdot) \in S(\Omega, V)$, зависящие от последовательности $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, такие, что

$$1)\ \operatorname{mes}\left(\Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathcal{K}} \Omega_k\right) = 0, \quad 2)\ \chi_{\Omega_k}(\cdot)\, \xi_n(\cdot) \in L_1(\Omega, V)$$

$$\forall k \in \mathcal{K}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 3)\ \chi_{\Omega_k}(\cdot)\, \xi(\cdot) \in L_1(\Omega, V) \quad \forall k \in \mathcal{K},$$

4) для любой функции $\eta(\cdot) \in L_\infty(\Omega, V^*)$, обладающей свойством: $\operatorname{supp} \eta(\cdot) \subset \bigcup_{k \in \mathcal{K}_0} \Omega_k$, где $\mathcal{K}_0$ - непустое конечное подмножество в $\mathcal{K}$, зависящее от $\eta(\cdot)$, имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} \langle \eta(x), \xi_n(x) \rangle dx = \int_{\Omega} \langle \eta(x), \xi(x) \rangle dx. \tag{1.2}$$

Замечание 1.1. Совокупность функций $\xi(\cdot)$ из $S(\Omega, V)$ таких, что $\chi_{\Omega_k}(\cdot)\xi(\cdot) \in L_1(\Omega, V)$ $\forall k \in \mathcal{K}$, образует метризуемое ЛВП (локально выпуклое пространство). В дальнейшем мы будем обозначать его через $L_1^{loc}(\Omega, V, \mathfrak{A})$. Нетрудно доказать, что соотношение (1.2) означает слабую сходимость в $L_1^{loc}(\Omega, V, \mathfrak{A})$.

Условие 1.2. Существует элемент $v \in \sum \cap \mathcal{R}_0$ такой, что $\langle f, v_n \rangle \to \langle f, v \rangle$, функция $\Phi(\cdot, \cdot \mid v): \Omega \times V \to \overline{R}$ суперпозиционно измерима (т.е. для любой сильно измеримой на Ω функции $\xi(\cdot)$ со значениями в пространстве V функция $\Phi(\cdot, \xi(\cdot) \mid v)$ измерима на Ω) и $\mathcal{L}(v) = \xi(\cdot)$.

Условие 1.3. Для почти всех $x \in \Omega$ имеет место соотношение

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{co} \bigcup_{k \geq n} \operatorname{epi} \Phi(x, \cdot \mid v_k) \subset \operatorname{epi} \Phi(x, \cdot \mid v).$$

Условие 1.4. Если $\Phi(\cdot, \xi(\cdot) \mid v) \in L_1(\Omega)$ и

$$\int_{\Omega} \Phi(x, \xi(x) \mid v)\, dx \leq \lim_{n \to \infty} g(v_n),$$

то $v \in \widehat{\mathfrak{M}}$.

Этот предел (конечный или бесконечный) существует в силу того, что существуют конечный или бесконечный $\lim\limits_{n \to \infty} g_f(v_n)$ и конечный $\lim\limits_{n \to \infty} \langle f, v_n \rangle = \langle f, v \rangle$ (см. условие 1.2).

Условие 1.5.

$$\inf_{\xi \in V} \Phi(\cdot, \xi \mid v) \in L_1(\Omega).$$

Условие 1.6.

$$\inf_{n \in N} \Phi(\cdot, \xi_n(\cdot) \mid v_n) \in L_1(\Omega).$$

В условии 1.2 $\xi(\cdot)$ - функция из условия 1.1, а в условиях 1.3-1.5 v - элемент из условия 1.2.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия 1.1-1.6, то элемент v из условия 1.2 удовлетворяет соотношению* (1.1).

Доказательство. Поскольку последовательность $\{\xi_n(\cdot)\}_{n \in N}$ сходится слабо к функции $\xi(\cdot)$ в пространстве $L_1^{loc}(\Omega, V, \mathcal{O})$, то, в силу известной леммы Мазура (впервые лемма Мазура в подобных ситуациях была применена Кастеном [11, с.240-245, 383]), найдется последовательность вида

$$\left\{\hat{\xi}_n(\cdot) \overset{def}{=} \sum_{\kappa=n}^{\infty} t_\kappa^{(n)} \xi_\kappa(\cdot)\right\}_{n \in N},$$

где 1) $t_\kappa^{(n)} \geq 0 \quad \forall \kappa, n \in N,\ \kappa \geq n$; 2) $t_\kappa^{(n)} > 0$ при данном $n \in N$ лишь для конечного множества индексов $\kappa \in N$, $\kappa \geq n$; 3) $\sum_{\kappa=n}^{\infty} t_\kappa^{(n)} = 1$, которая сильно сходится к функции $\xi(\cdot)$ в пространстве $L_1^{loc}(\Omega, V, \mathcal{O})$.

Из последовательности $\{\hat{\xi}_n(\cdot)\}_{n \in N}$, очевидно, можно извлечь подпоследовательность $\{\hat{\xi}_{n_\ell}(\cdot)\}_{\ell \in N}$, сходящуюся к функции $\xi(\cdot)$ почти всюду на Ω.

Пусть $x \in \Omega$ - произвольная точка, в которой указанная сходимость имеет место.

Имеем

$$(\hat{\xi}_{n_\ell}(x), \sum_{\kappa=n_\ell}^{\infty} t_\kappa^{(n_\ell)} \Phi(x, \xi_\kappa(x) \mid v_\kappa)) \in co \bigcup_{\kappa=n_\ell}^{\infty} epi\, \Phi(x, \cdot \mid v_\kappa) \quad \forall \ell \in N,$$

откуда при $\gamma \in N$, $\gamma > \ell$ получим

$$(\hat{\xi}_{n_\gamma}(x), \sum_{\kappa=n_\gamma}^{\infty} t_\kappa^{(n_\gamma)} \Phi(x, \xi_\kappa(x) \mid v_\kappa)) \in$$

$$\in co \bigcup_{\kappa=n_\gamma}^{\infty} epi\, \Phi(x, \cdot \mid v_\kappa) \subset co \bigcup_{\kappa=n_\ell}^{\infty} epi\, \Phi(x, \cdot \mid v_\kappa).$$

Фиксируя ℓ и устремляя γ к ∞, получаем

$$(\xi(x), \underline{\lim}_{\gamma \to \infty} \sum_{\kappa=n_\gamma}^{\infty} t_\kappa^{(n_\gamma)} \Phi(x, \xi_\kappa(x) \mid v_\kappa)) \in$$

$$\in \overline{co} \bigcup_{k=n_\ell}^{\infty} epi\, \Phi(x,\cdot|v_k) \qquad \forall \ell \in N,$$

так что

$$(\xi(x), \varliminf_{\gamma\to\infty} \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(n_\gamma)} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)) \in$$

$$\in \bigcap_{\ell\in N} \overline{co} \bigcup_{k\geq n_\ell} epi\, \Phi(x,\cdot|v_k) \subset$$

$$\subset \bigcap_{n\in N} \overline{co} \bigcup_{k\geq n} epi\, \Phi(x,\cdot|v_k) \subset epi\, \Phi(x,\cdot|v), \qquad (1.3)$$

в силу условия 1.3.

Соотношение (1.3) означает, что

$$\Phi(x,\xi(x)|v) \leq \varliminf_{\gamma\to\infty} \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(n_\gamma)} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k). \qquad (1.4)$$

В силу условия 1.5 и суперпозиционной измеримости функции $\Phi(\cdot,\cdot|v)$ (см.условие 1.2), левая и правая части неравенства (1.4) интегрируемы, хотя априори интеграл от них может быть равен $+\infty$. Таким образом, из (1.4) следует, что

$$\int_\Omega \Phi(x,\xi(x)|v)dx \leq \int_\Omega \varliminf_{\gamma\to\infty} \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(n_\gamma)} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k) dx. \qquad (1.5)$$

Поскольку, в силу условия 1.6,

$$\theta(x) \overset{def}{=} \inf_{n\in N} \Phi(x, \xi_n(x)|v_n) \leq \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)$$

для почти всех $x \in \Omega$, $\forall k \in N$, то

$$\theta(x) = \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(\gamma)} \theta(x) \leq \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(\gamma)} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)$$

для почти всех $x \in \Omega$, $\forall \gamma \in N$, и, значит, мы можем применить лемму Фату:

$$\int_{\Omega} \varliminf_{\gamma\to\infty} \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(n_\gamma)} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{\gamma\to\infty} \int_{\Omega} \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(n_\gamma)} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)\,dx =$$

$$= \varliminf_{\gamma\to\infty} \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(n_\gamma)} \int_{\Omega} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)\,dx. \qquad (1.6)$$

Следствием неравенств (1.5) и(1.6) является следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} \Phi(x, \xi(x)|v)\,dx \leqslant \lim_{\gamma\to\infty} \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(n_\gamma)} \int_{\Omega} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)\,dx. \qquad (1.7)$$

Поскольку $\{v_n\}_{n\in N}$ -квазиминимизирующая последовательность функционала $g_f(\cdot)$ на множестве $\mathfrak{M}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega} \Phi(x, \xi_n(x)|v_n)\,dx - \langle f, v_n\rangle\right) = \inf_{w\in\mathfrak{M}} g_f(w). \qquad (1.8)$$

Положим

$$h \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \Phi(x, \xi_n(x)|v_n)\,dx. \qquad (1.9)$$

Ясно, что $-\infty \leqslant h < +\infty$. На самом деле $-\infty < h < +\infty$, так как равенство $h = -\infty$ противоречит неравенству (1.7).

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем число $\gamma_\varepsilon \in N$ так, чтобы

$$\int_{\Omega} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)\,dx \leqslant h+\varepsilon \qquad \forall k > n_{\gamma_\varepsilon}, \qquad (1.10)$$

поэтому

$$\sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(n_{\gamma_\varepsilon})} \int_{\Omega} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)\,dx \leqslant h+\varepsilon \qquad \forall k \geqslant n_{\gamma_\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$\varliminf_{\gamma\to\infty} \sum_{k=n_\gamma}^{\infty} t_k^{(n_\gamma)} \int_{\Omega} \Phi(x, \xi_k(x)|v_k)\,dx \leqslant h+\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0. \qquad (1.11)$$

Неравенства (1.7) и(1.11) вместе дают неравенство

$$\int_{\Omega} \Phi(x, \xi(x) | v) dx < h. \tag{1.12}$$

В силу условий 1.2 и 1.4, $\xi(\cdot) \in \mathcal{L}(v)$ и $v \in \widehat{\mathfrak{M}}$. С учетом (1.12) окончательно имеем

$$g_f(v) = \int_{\Omega} \Phi(x, \mathcal{L}(v) | v) dx - \langle f, v \rangle =$$

$$= \int_{\Omega} \Phi(x, \xi(x) | v) dx - \langle f, v \rangle < h - \langle f, v \rangle = \inf_{w \in \mathfrak{M}} g_f(w).$$

Поскольку $v \in \widehat{\mathfrak{M}}$, то $\exists v' \in \mathfrak{M}$:

$$g_f(v') \leqslant g_f(v) = \inf_{w \in \mathfrak{M}} g_f(w).$$

Теорема 1.1 доказана.

Сформулируем несколько относительно просто проверяемых условий, гарантирующих выполнение условия 1.3.

Пусть v - элемент из условия 1.2 и $x \in \Omega$.

Условие 1.7. Функция $\Phi(x, \cdot | v^{(0)} + v): V \to \overline{R}$ выпукла и полунепрерывна снизу.

Условие 1.8. $\forall \varepsilon > 0$ и для любой непрерывной аффинной функции $\tau : V \to R$, удовлетворяющей неравенству

$$\Phi(x, \xi | v^{(0)} + v) \geqslant \tau(\xi) \qquad \forall \xi \in V, \tag{1.13}$$

существует число $n^* \in N$, зависящее от ε и τ, такое, что

$$\Phi(x, \xi | v^{(0)} + v_k) \geqslant \tau(\xi) - \varepsilon \qquad \forall \xi \in V, \quad \forall k \geqslant n^*. \tag{1.14}$$

Условие 1.9. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall R > 0$ и для любой непрерывной аффинной функции $\tau: V \to R$, удовлетворяющей неравенству (1.13), существует число $n^* \in N$, зависящее от ε, R и τ, такое, что

$$\Phi(x, \xi | v^{(0)} + v_k) \geqslant \tau(\xi) - \varepsilon \qquad \forall \xi \in V, \ \|\xi\| \leqslant R, \ \forall k \geqslant n^*. \tag{1.15}$$

Условие 1.10. Имеет место соотношение

$$\lim_{\xi \in V, \|\xi\| \to +\infty} \frac{\inf_{n \in N} \Phi(x, \xi | v^{(0)} + v_n)}{\|\xi\|} = +\infty. \tag{1.16}$$

Теорема 1.2. *Условие 1.8 является следствием условий 1.9 и 1.10.*

Доказательство очевидно.

Теорема 1.3. *Условие 1.3 является следствием условий 1.7 и 1.8.*

Доказательство. Условие 1.3 следует из такой импликации:

$$\{\bar{\xi} \in V, \bar{a} \in R, \ (\bar{\xi}, \bar{a}) \bar{\in} \operatorname{epi} \Phi(x, \cdot | v^{(0)} + v)\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \{(\bar{\xi},\bar{a}) \bar{\in} \bigcap_{n\in N} \overline{co} \bigcup_{k\geq n} epi\, \Phi(x,\cdot\,|\,v^{(0)}+v). \tag{1.17}$$

Установим справедливость импликации (1.17).

Пусть $\bar{\xi}\in V, \bar{a}\in R$, причем $(\bar{\xi},\bar{a}) \bar{\in} epi\,\Phi(x,\cdot\,|\,v^{(0)}+v)$. Тогда

$$\bar{a} < \Phi(x,\bar{\xi}\,|\,v^{(0)}+v). \tag{1.18}$$

Пусть $\tau: V \to R$ - непрерывная аффинная функция такая, что

$$\Phi(x,\xi\,|\,v^{(0)}+v) \geqslant \tau(\xi) \qquad \forall \xi\in V \tag{1.19}$$

и

$$\bar{a} < \tau(\bar{\xi}). \tag{1.20}$$

Такая функция найдется, в силу условия 1.7.

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что

$$\bar{a} < \tau(\bar{\xi}) - \varepsilon. \tag{1.21}$$

В силу условия 1.8 (см.неравенство (1.14)),

$$epi\,\Phi(x,\cdot\,|\,v^{(0)}+v_k) \subset epi\,(\tau(\cdot)-\varepsilon) \qquad \forall k > n^*, \tag{1.22}$$

откуда

$$\bigcup_{k\geq n^*} epi\,\Phi(x,\cdot\,|\,v^{(0)}+v_k) \subset epi\,(\tau(\cdot)-\varepsilon). \tag{1.23}$$

Поскольку $epi\,(\tau(\cdot)-\varepsilon)$ - замкнутое выпуклое множество в V, то из (1.23) следует

$$\overline{co} \bigcup_{k\geq n^*} epi\,\Phi(x,\cdot\,|\,v^{(0)}+v_k) \subset epi\,(\tau(\cdot)-\varepsilon) \tag{1.24}$$

и тем более

$$\bigcap_{n\in N} \overline{co} \bigcup_{k\geq n} epi\,\Phi(x,\cdot\,|\,v^{(0)}+v_k) \subset epi\,(\tau(\cdot)-\varepsilon). \tag{1.25}$$

Из неравенства (1.21) следует $(\bar{\xi},\bar{a}) \bar{\in} epi\,(\tau(\cdot)-\varepsilon)$, а значит, и подавно, в силу (1.25), $(\bar{\xi},\bar{a}) \bar{\in} \bigcap_{n\in N} \overline{co} \bigcup_{k\geq n} \Phi(x,\cdot\,|\,v^{(0)}+v_k)$.

, Теорема 1.3 доказана.

§2. О суперпозиционной измеримости функций

1°. Пусть V - вещественное банахово пространство, $\Phi: V \to R$ - собственная функция.

Определение 2.1. Функция Φ называется *коэрцитивной* на V, если

$$\inf_{\xi\in V} \Phi(\xi) > -\infty \tag{2.1}$$

и

$$\lim_{\xi\in V, \|\xi\|\to+\infty} \frac{\Phi(\xi)}{\|\xi\|} = +\infty. \qquad (2.2)$$

Заметим, что если V - рефлексивное пространство, а Φ - полунепрерывная снизу собственная выпуклая функция на V, то неравенство (2.1) является следствием соотношения (2.2).

Введем для Φ сопряженную функцию $\Phi^*: V^* \to \overline{R}$, определяемую соотношением

$$\Phi^*(\cdot) \overset{def}{=} \sup_{\xi\in V} \left(<\cdot, \xi> - \Phi(\xi)\right). \qquad (2.3)$$

Функция Φ^*, очевидно, выпукла.

Теорема 2.1. *Для того чтобы функция Φ была коэрцитивной на V, необходимо и достаточно, чтобы функция Φ^* была ограничена на каждом непустом ограниченном множестве в V^*.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\xi_0 \in dom\Phi$. Для любого $\tau > 0$ выберем число $\lambda_\tau > \|\xi_0\|$ так, чтобы

$$\Phi(\xi) - \tau\|\xi\| > \Phi(\xi_0) + \tau\|\xi_0\| \qquad \forall\xi: \|\xi\| \geq \lambda_\tau. \qquad (2.4)$$

Имеем $\forall\xi,\ \|\xi\| \geq \lambda_\tau,\quad \forall\eta\in V^*,\ \|\eta\| \leq \tau$:

$$\Phi(\xi) - <\eta,\xi> \geq \Phi(\xi) - \tau\|\xi\| >$$

$$> \Phi(\xi_0) + \tau\|\xi_0\| \geq \Phi(\xi_0) - <\eta, \xi_0>. \qquad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что $\forall\eta\in V^*,\ \|\eta\| \leq \tau$:

$$\sup_{\xi\in V} \left(<\eta,\xi> - \Phi(\xi)\right) = \sup_{\xi\in V: \|\xi\|\leq\lambda_\tau} \left(<\eta,\xi> - \Phi(\xi)\right), \qquad (2.6)$$

поэтому $\forall\eta\in V^*,\ \|\eta\| \leq \tau$,

$$\Phi^*(\eta) = \sup_{\xi\in V}\left(<\eta,v> - \Phi(\xi)\right) = \sup_{\xi\in V: \|\xi\|\leq\lambda_\tau}\left(<\eta,\xi> - \Phi(\xi)\right) \leq$$

$$\leq \|\eta\|\lambda_\tau - \inf_{\xi\in V}\Phi(\xi) \leq \tau\lambda_\tau - \inf_{\xi\in V}\Phi(\xi). \qquad (2.7)$$

Далее, $\forall\eta\in V^*,\ \|\eta\| \leq \tau$,

$$\Phi^*(\eta) = \sup_{\xi\in V}\left(<\eta,\xi> - \Phi(\xi)\right) = \sup_{\xi\in V: \|\xi\|\leq\lambda_\tau}\left(<\eta,\xi> - \Phi(\xi)\right) \geq$$

$$\geq -\tau\lambda_\tau + \sup_{\xi\in V}\left(-\Phi(\xi)\right) = -\tau\lambda_\tau - \inf_{\xi\in U}\Phi(\xi). \qquad (2.8)$$

Из неравенств (2.7) и (2.8) следует, что функция Φ^* ограничена на любом шаре пространства V^* с центром в нуле, а значит, она ограничена на всяком непустом ограниченном множестве.

Достаточность. Во-первых, отметим, что поскольку $\Phi^*(0) < +\infty$, то $-\Phi^*(0) > -\infty$. Но $-\Phi^*(0) = \inf\limits_{\xi \in V} \Phi(\sigma)$,

так что неравенство (2.1) доказано.

Докажем теперь соотношение (2.2). Будем доказывать его от противного. Допустим, что существует последовательность $\{\xi_n\} \subset V \setminus \{0\}$ такая, что

$$L \overset{def}{=} \sup_{n \in N} \frac{\Phi(\xi_n)}{\|\xi_n\|} < +\infty$$

и $\|\xi_n\| \to +\infty$.

Положим

$$\tau \overset{def}{=} \max(0, L+1),$$

так что $\tau - L \geqslant 1$.

Пусть $\forall n \in N$ - функционал $\eta_n \in V^*$ таков, что $\|\eta_n\| = 1$ и $<\eta_n, \xi_n> = \|\xi_n\|$. Этот выбор возможен (см. [12, с.135, теорема 2]).

С одной стороны,

$$\sup_{n \in N} \Phi^*(\tau\eta_n) < +\infty,$$

поскольку $\{\tau\eta_n\}_{n \in N}$ - ограниченное множество в пространстве V^*. Но, с другой стороны,

$$\sup_{n \in N} \Phi^*(\tau\eta_n) = \sup_{n \in N} \sup_{\xi \in V} \left(<\tau\eta_n, \xi> - \Phi(\xi)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{n \in N} \left(<\tau\eta_n, \xi_n> - \Phi(\xi_n)\right) = \sup_{n \in N} \left(\tau\|\xi_n\| - \Phi(\xi_n)\right) =$$

$$= \sup_{n \in N} \left(\|\xi_n\| \left(\tau - \frac{\Phi(\xi_n)}{\|\xi_n\|}\right)\right) \geqslant \sup_{n \in N} \left(\|\xi_n\|(\tau - L)\right) =$$

$$= (\tau - L) \sup_{n \in N} \|\xi_n\| \geqslant \sup_{n \in N} \|\xi_n\| = +\infty.$$

Полученное противоречие доказывает достаточность.

Теорема 2.1 доказана.

2°. Положим $\forall \tau > 0$:

$$\Phi_\tau(\cdot) \overset{def}{=} \sup_{\eta\in V^*, \|\eta\|<\tau} \left(<\eta,\cdot> - \Phi^*(\eta)\right).$$

Ясно, что при $0<\tau_1<\tau_2$ выполняется неравенство

$$\Phi_{\tau_1}(\xi) \leqslant \Phi_{\tau_2}(\xi) \quad \forall \xi\in V.$$

Далее, поскольку

$$\Phi^{**}(\cdot) \overset{def}{=} \sup_{\eta\in U^*} \left(<\eta,\cdot>-\Phi^*(\eta)\right),$$

то

$$\Phi_\tau(\xi) \leqslant \Phi^{**}(\xi) \quad \forall\xi\in V,\ \forall\tau>0,$$

и

$$\Phi^{**}(\xi) = \lim_{\tau\to+\infty} \Phi_\tau(\xi) = \sup_{\tau>0} \Phi_\tau(\xi) \qquad \forall\xi\in V.$$

Заметим, что поскольку

$$\Phi^{**}(\xi) \leqslant \Phi(\xi) \qquad \forall\xi\in V,$$

то

$$\Phi_\tau(\xi) \leqslant \Phi(\xi) \qquad \forall\xi\in V,\ \forall\tau>0.$$

Если Φ выпукла и полунепрерывна снизу, то известно, что $\Phi^{**}=\Phi$, и поэтому в этом случае

$$\Phi(\xi) = \lim_{\tau\to+\infty} \Phi_\tau(\xi) = \sup_{\tau>0} \Phi_\tau(\xi) \quad \forall\xi\in V. \tag{2.9}$$

В заключение этого пункта отметим, что $\forall\tau>0$ функция Φ_τ выпукла на V и удовлетворяет оценкам:

$$\begin{aligned}\Phi_\tau(\xi) &= \sup_{\eta\in V^*: \|\eta\|\leqslant\tau} \left(<\eta,\xi> - \Phi^*(\eta)\right) \leqslant \\ &\leqslant \tau\|\xi\| - \inf_{\eta\in V^*: \|\eta\|\leqslant\tau} \Phi^*(\eta) \leqslant \\ &\leqslant \tau\|\xi\| + \tau\lambda_\tau + \inf_{\hat\xi\in V}\Phi(\hat\xi) \quad \forall\xi\in V\end{aligned} \tag{2.10}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi_\tau(\xi) &= \sup_{\eta\in V^*: \|\eta\|\leqslant\tau} \left(<\eta,\xi> - \Phi^*(\eta)\right) \geqslant \\ &\geqslant -\Phi^*(0) = \inf_{\hat\xi\in U} \Phi(\hat\xi) \quad \forall\xi\in V.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Из оценки (2.10) следует, что функция Φ_τ непрерывна на V $\forall\tau>0$.

Теорема 2.2. *Пусть Φ - собственная коэрцитивная функция на V и V^* - сепарабельное пространство. Тогда $\forall\, \tau > 0$ имеет место равенство*

$$\Phi_\tau(\cdot) = \sup_{\eta \in \mathfrak{M},\, \|\eta\| < \tau} \left(\langle \eta, \cdot \rangle - \Phi^*(\eta) \right), \tag{2.12}$$

где $\mathfrak{M}$ - счетное всюду плотное подмножество в пространстве V^*.

Доказательство. В силу теоремы 2.1, функция Φ^* непрерывна на V^*. Кроме того, $\forall \tau > 0$ множество $\mathfrak{M} \cap \{\eta \in V^* \,|\, \|\eta\| < \tau\}$ плотно в шаре $\{\eta \in V^* \,|\, \|\eta\| \le \tau\}$. Из этих двух утверждений следует равенство (2.12).

Теорема 2.2 доказана.

3°. Пусть V - вещественное банахово пространство с сепарабельным сопряженным пространством V^*, Ω - пространство с σ-конечной (положительной) мерой, $\Phi(\cdot,\cdot): \Omega \times V \to \overline{R}$ - функция, которая для почти всех $x \in \Omega$ является собственной выпуклой и полунепрерывной снизу на V.

Условие 2.1. $\forall \eta \in V^*$ функция $\Phi^*(\cdot, \eta)$ измерима на Ω.

Теорема 2.3. *Если выполнено условие 2.1, то функция Φ суперпозиционно измерима.*

Утверждение теоремы 2.3 очевидным образом следует из теоремы 2.2 (см. равенство (2.12)) и соотношения (2.9).

В следующей теореме 2.4 рассматривается ситуация, в которой условие 2.1 выполнено.

Определение 2.2. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{T}$ - непустые подмножества в пространстве V. Скажем, что множество $\mathfrak{T}$ полно в множестве $\mathfrak{X}$, если $\forall \xi \in \mathfrak{X}$ существует $w \in \mathfrak{T}$ такой, что $t\xi + (1-t)w \in \mathfrak{T}$ $\forall t \in [0,1)$.

Теорема 2.4. *Пусть V_0 - счетное (но не обязательно плотное) подмножество в пространстве V. Предположим, что*

1) $\forall \xi \in V_0$ функция $\Phi(\cdot, \xi)$ измерима на Ω, 2) для почти всех $x \in \Omega$ функция $\Phi(x,\cdot)$ непрерывна на некотором множестве $\mathfrak{T}_x \subset \operatorname{dom} \Phi(x,\cdot)$, которое полно в $\operatorname{dom} \Phi(x,\cdot)$, причем множество $V_0 \cap \mathfrak{T}_x$ плотно в множестве $\mathfrak{T}_x$. Тогда условие 2.1 выполнено, и, следовательно, функция Φ суперпозиционно измерима.

Доказательство. Пусть $\eta \in V^*$ и точка x принадлежит тому множеству полной меры в Ω, о котором идет речь в условии 2) теоремы. Тогда

$$\Phi^*(x,\eta) = \sup_{\xi \in V} \left(\langle \eta, \xi \rangle - \Phi(x,\xi) \right) =$$

$$= \sup_{\xi \in \operatorname{dom} \Phi(x,\cdot)} \left(\langle \eta, \xi \rangle - \Phi(x,\xi) \right) = \sup_{\xi \in \mathfrak{T}_x} \left(\langle \eta, \xi \rangle - \Phi(x,\xi) \right) =$$

$$= \sup_{\xi \in \mathfrak{T}_x \cap V_0} \left(\langle \eta, \xi \rangle - \Phi(x,\xi) \right) \le \sup_{\xi \in V_0} \left(\langle \eta, \xi \rangle - \Phi(x,\xi) \right).$$

Но, с другой стороны,

$$\sup_{\xi \in V_0} \left(<\eta, \xi> - \Phi(x, \xi) \right) \leqslant \Phi^*(x, \eta),$$

так что

$$\Phi^*(x, \eta) = \sup_{\xi \in V_0} \left(<\eta, \xi> - \Phi(x, \xi) \right).$$

В указанной выше цепочке равенств остановимся лишь на равенстве

$$\sup_{\xi \in dom\, \Phi(x,\cdot)} \left(<\eta, \xi> - \Phi(x, \xi) \right) = \sup_{\xi \in \tau_x} \left(<\eta, \xi> - \Phi(x, \xi) \right)$$

или, что то же самое,

$$\inf_{\xi \in dom\, \Phi(x,\cdot)} \left(\Phi(x, \xi) - <\eta, \xi> \right) = \inf_{\xi \in \tau_x} \left(\Phi(x, \xi) - <\eta, \xi> \right).$$

(Остальные равенства очевидны.)

Пусть $\xi_0 \in dom\, \Phi(x, \cdot) \setminus \tau_x$. Положим

$$\gamma \overset{def}{=} \inf_{\xi \in \tau_x} \left(\Phi(x, \xi) - <\eta, \xi> \right)$$

и

$$\nabla(\xi) \overset{def}{=} \Phi(x, \xi) - <\eta, \xi> - \gamma.$$

Нам нужно доказать теперь, что

$$\nabla(\xi_0) \geqslant 0.$$

Действительно, рассмотрим функцию $\nabla(\cdot)$ на отрезке $[\xi_0, \omega]$, где $(\xi_0, \omega] \subset \tau_x$. Тогда известно, что $\nabla(\cdot)$ непрерывна на отрезке $[\xi_0, \omega]$. Кроме того, $\nabla(\xi) \geqslant 0 \quad \forall \xi \in (\xi_0, \omega]$. Значит, в силу непрерывности $\nabla(\cdot)$ на множестве τ_x, $\nabla(\xi_0) \geqslant 0$.

Поскольку функция $<\eta, \xi> - \Phi(\cdot, \xi)$ измерима на Ω $\forall \xi \in V_0$, то будет измерима и функция $\Phi^*(\cdot, \eta)$ как верхняя грань счетного множества измеримых на Ω функций.

Теорема 2.4 доказана.

Следствием теоремы 2.4 является

Теорема 2.5. *Пусть* V *- сепарабельное пространство и для почти всех* $x \in \Omega$ *множество* $\mathrm{int\,dom}\, \Phi(x, \cdot) \neq \emptyset$, *причем* $\Phi(x, \cdot)$ *непрерывна на* $\mathrm{int\,dom}\, \Phi(x, \cdot)$. *Тогда условие 2.1 выполнено, и, следовательно, функция* Φ *суперпозиционно измерима.*

§3. Об одном обобщении основной теоремы

Пусть $\mathcal{R}$ - вещественное векторное пространство, Σ - непустое подмножество в $\mathcal{R}$, $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$. Пусть каждому $j \in \mathbb{N}, j \leqslant \mathcal{N}$, поставлены в соответствие: 1) пространство Ω_j точек $x^{(j)}$ с σ-конечной (положительной) мерой, 2) вещественное рефлексивное банахово пространство V_j, 3) оператор $\mathcal{L}_j : \Sigma \longrightarrow$ $\longrightarrow S(\Omega_j, V_j)$ не обязательно линейный, 4) функция $\Phi_j(\cdot,\cdot|\cdot) : \Omega_j^d \times V_j \times \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$.

Положим $\Phi \overset{def}{=} (\Phi_1,\ldots,\Phi_N)$ и

$$K_\Phi \overset{def}{=} \left\{ v \in \Sigma \mid \Phi_j(\cdot, \mathcal{L}_j(v)\mid v) \in L_1(\Omega_j) \quad \forall j = 1,\ldots,N \right\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ - непустое подмножество в множестве K_Φ и Q - непустое подмножество в множестве $\mathbb{R}^N \times \Sigma$, обладающее тем свойством, что

$$\Big(\int_{\Omega_1} \Phi_1(x^{(1)}, \mathcal{L}_1(v)\mid v)\,dx^{(1)}, \ldots$$
$$\ldots, \int_{\Omega_N} \Phi_N\big(x^{(N)}, \mathcal{L}_N(v)\mid v\big)\,dx^{(N)}, v\Big) \in Q \quad \forall v \in \mathfrak{M}.$$

Пусть задана собственная функция $F : Q \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим на $\mathfrak{M}$ функционал

$$g(\cdot) \overset{def}{=} F\Big(\int_{\Omega_1} \Phi_1(x^{(1)}, \mathcal{L}_1(v)\mid v)\,dx^{(1)}, \ldots$$
$$\ldots, \int_{\Omega_N} \Phi_N\big(x^{(N)}, \mathcal{L}_N(v)\mid v\big)\,dx^{(N)} \,\Big|\, v\Big). \tag{3.1}$$

Нас будет интересовать вопрос о существовании элемента $v \in \mathfrak{M}$ такого, что

$$g(v) = \inf_{w \in \mathfrak{M}} g(w). \tag{3.2}$$

Определение 3.1. Последовательность $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K_\Phi$ называется <u>квазиминизирующей</u> последовательностью функционала $g(\cdot)$ на множестве $\mathfrak{M}$, если

1) $$\left(\int_{\Omega_1} \Phi_1(x^{(1)}, \mathcal{L}_1(v_n)\mid v_n) \right), \ldots$$
$$\ldots, \int_{\Omega_N} \Phi_N\big(x^{(N)}, \mathcal{L}_N(v_n)\mid v_n\big)\,dx^{(N)}, v_n\Big) \in Q \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

2) $$\lim_{n\to\infty} g(v_n) = \inf_{w\in\mathfrak{M}} g(w).$$

Пусть $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K_\Phi$ - некоторая квазиминимизирующая последовательность функционала $g(\cdot)$ на множестве $\mathfrak{M}$, которая до конца этого параграфа считается фиксированной.

Определение 3.2. Скажем, что элемент v множества K_Φ принадлежит множеству $\widehat{\mathfrak{M}}$, если

1) $$\Big(\int_{\Omega_1} \Phi_1(x^{(1)}, \mathcal{L}_1(v)\mid v), \ldots, \int_{\Omega_N} \Phi_N(x^{(N)}, \mathcal{L}_N(v)\mid v), v\Big) \in Q;$$

2) существует элемент $\sigma' \in \mathfrak{M}$ такой, что $g(\sigma') \leq g(\sigma)$.

Сформулируем условия, выполнение которых гарантирует существование элемента $\sigma \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющего равенству (3.2).

Положим $\forall j = 1, \dots, N$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\xi_n^{(j)}(\cdot) = \mathcal{L}_j(\sigma_n).$$

Условие 3.1. $\forall j=1,\dots,N$ существуют непустое, не более чем счетное семейство $\mathfrak{A}^{(j)} = \{\Omega_j^{(\kappa)}\}_{\kappa \in \mathcal{K}_j}$ измеримых подмножеств пространства Ω_j и функция $\xi^{(j)}(\cdot) \in S(\Omega_j, V_j)$, зависящие от последовательности $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, такие, что

1) $mes\left(\Omega_j \setminus \bigcup_{\kappa \in \mathcal{K}_j} \Omega_j^{(\kappa)}\right) = 0$,

2) $\chi_{\Omega_j^{(\kappa)}}(\cdot)\, \xi_n^{(j)}(\cdot) \in L_1(\Omega_j, V_j) \quad \forall \kappa \in \mathcal{K}_j$,

3) для любой функции $\eta^{(j)}(\cdot) \in L_\infty(\Omega_j, V_j^*)$, обладающей свойством: $supp\, \eta^{(j)}(\cdot) \subset \bigcup_{\kappa \in \mathcal{K}_j^{(0)}} \Omega_j^{(\kappa)}$, где $\mathcal{K}_j^{(0)}$ - непустое конечное подмножество в $\mathcal{K}_j$, зависящее от $\eta^{(j)}(\cdot)$, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_j} <\eta^{(j)}(x^{(j)}), \xi_n^{(j)}(x^{(j)})> dx^{(j)} =$$

$$= \int_{\Omega_j} <\eta^{(j)}(x^{(j)}), \xi^{(j)}(x^{(j)})> dx^{(j)}. \qquad (3.3)$$

Замечание 3.1. $\forall j = 1,\dots,N$ совокупность функций $\xi^{(j)}(\cdot)$ из $S(\Omega_j, V_j)$ таких, что $\chi_{\Omega_j^{(\kappa)}}(\cdot)\xi^{(j)}(\cdot) \in L_1(\Omega_j, V_j) \quad \forall \kappa \in \mathcal{K}_j$, образуют метризуемое ЛВП, которое в дальнейшем обозначается через $L_1^{loc}(\Omega_j, V_j, \mathfrak{A}^{(j)})$. Соотношение (3.3) означает слабую сходимость в пространстве $L_1^{loc}(\Omega_j, V_j, \mathfrak{A}^{(j)})$.

Условие 3.2. Существует элемент $\sigma \in \Sigma$ такой, что $\forall j=1,\dots,N$ функция $\Phi_j(\cdot,\cdot\,|\,\sigma) : \Omega_j \times V_j \to \overline{\mathbb{R}}$ суперпозиционно измерима и $\mathcal{L}_j(\sigma) = \xi^{(j)}(\cdot)$.

Условие 3.3. $\forall j=1,\dots,N$ для почти всех $x^{(j)} \in \Omega_j$ имеет место соотношение

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co} \bigcup_{\kappa \geq n} epi\, \Phi_j(x^{(j)}, \cdot\,|\,\sigma_\kappa) \subset epi\, \Phi_j(x^{(j)}, \cdot\,|\,\sigma).$$

Условие 3.4. Если $\forall j=1,\dots,N$ функция $\Phi_j(\cdot, \xi^{(j)}(\cdot)\,|\,\sigma) \in L_1(\Omega_j)$ и

$$\int\limits_{\Omega_j} \Omega_j\left(x^{(j)}, \xi^{(j)}(x^{(j)}) | \sigma\right) dx^{(j)} \leq$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega_j} \Phi_j\left(x^{(j)}, \xi_n^{(j)}(x^{(j)}) | \sigma_n\right) dx^{(j)},$$

то $\sigma \in \widehat{\mathfrak{M}}$.

Этот предел (конечный или бесконечный) существует в силу того, что $\{\sigma_n\}_{n \in N}$ - квазиминимизирующая последовательность функционала $g(\cdot)$ на множестве $\mathfrak{M}$.

Условие 3.5. $\forall j = 1, \ldots, N$ выполняется соотношение

$$\inf_{\xi^{(j)} \in V_j} \Phi_j\left(\cdot, \xi^{(j)} | \sigma\right) \in L_1(\Omega_j).$$

Условие 3.6. $\forall j = 1, \ldots, N$ справедливо соотношение

$$\inf_{n \in N} \Phi_j\left(\cdot, \xi_n^{(j)}(\cdot) | \sigma_n\right) \in L_1(\Omega_j).$$

Заметим, что условия 3.1-3.6 аналогичны условиям 1.1-1.6 соответственно.

Условие 3.7. Функция $F: Q \to \overline{R}$ обладает таким свойством:

если $(\gamma_*^{(1)}, \ldots, \gamma^{(N)}, \sigma) \in Q$ и $\gamma_*^{(j)} \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \gamma_n^{(j)}$,

где

$$\gamma_n^{(j)} \overset{def}{=} \int\limits_{\Omega_j} \Phi_j\left(x^{(j)}, \xi_n^{(j)}(x^{(j)}) | \sigma_n\right) dx^{(j)},$$

то

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} F\left(\gamma_n^{(1)}, \ldots, \gamma_n^{(N)} | \sigma_n\right) \geq F\left(\gamma_*^{(1)}, \ldots, \gamma_*^{(N)} | \sigma\right).$$

Теорема 3.1. *Если выполнены условия 3.1-3.7, то элемент σ из условия 3.2 удовлетворяет соотношению* (3.2).

Доказательство. Как и в теореме 1.1, с помощью условий 3.1-3.6 устанавливается, что $\forall j = 1, \ldots, N$ имеет место неравенство

$$\gamma^{(j)} \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \gamma_n^{(j)}, \tag{3.4}$$

где

$$\gamma^{(j)} \overset{def}{=} \int\limits_{\Omega_j} \Phi_j\left(x^{(j)}, \mathcal{L}_j(\sigma) | \sigma\right) dx^{(j)},$$

причем $\sigma \in \widehat{\mathfrak{M}}$.

В силу условия 3.7 и соотношения (3.4), имеем

$$\inf_{\omega \in \mathfrak{M}} g(\omega) = \lim_{n \to \infty} g(\sigma_n) = \underline{\lim}_{n \to \infty} g(\sigma_n) = \underline{\lim}_{n \to \infty} F(\gamma_n^{(1)}, \ldots, \gamma_n^{(N)}, \sigma_n) \geq$$

$$\geq F(\gamma^{(1)},\ldots,\gamma^{(N)}\mid\sigma)-g(\sigma)\geq g(\sigma'),$$

где $\sigma'\in\mathfrak{M}$.

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.2. По поводу условий, достаточных для выполнения условия 3.3, см. теорему 1.3.

§4. Об общем виде линейного функционала на одном подпространстве в пространстве Орлича

Пусть Ω - пространство точек x с σ-конечной мерой, T - вещественное банахово пространство, $M:\Omega\times T\to R$ - для почти всех $x\in\Omega$ неотрицательная четная выпуклая функция на T такая, что $M(x,0)=0$.

Введем функцию $M_+:\Omega\times[0,+\infty)\to\overline{R}$, определенную для $x\in\Omega$ и $t\geq 0$ следующим образом:

$$M_+(x,t)\overset{\text{def}}{=}\sup_{u\in T,\,\|u\|\leq t} M(x,u).$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 4.1. Для почти всех $x\in\Omega$ функция $M(x,\cdot)$ ограничена на каждом непустом ограниченном множестве в T.

Условие 4.2. $\forall u\in T$ функция $M(\cdot,u)$ измерима на Ω.

Условие 4.3. $\forall t>0$ функция $M_+(\cdot,t)$ измерима на Ω.

Положим $\forall u(\cdot)\in S(\Omega,T)$

$$\rho(u(\cdot))\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\int_\Omega M(x,u(x))dx, & \text{если } M(\cdot,u(\cdot))\in L_1(\Omega),\\ +\infty, & \text{если } M(\cdot,u(\cdot))\overline{\in} L_1(\Omega),\end{cases}\tag{4.1}$$

и

$$\zeta(u(\cdot))\overset{\text{def}}{=}\inf_{t>0,\,\rho\left(\frac{u(\cdot)}{t}\right)\leq 1} t.$$

Положим, далее,

$$K_\rho=\{u(\cdot)\in S(\Omega,T)\mid\rho(u(\cdot))<+\infty\},$$

$$L_\rho=\{u(\cdot)\in S(\Omega,T)\mid\zeta(u(\cdot))<+\infty\},$$

$$E_\rho = \{u(\cdot) \in S(\Omega, T) \mid t u(\cdot) \in K_\rho \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Множество K_ρ называется *классом Орлича*, множество L_ρ - *пространством* Орлича, а ρ- *функционалом* Орлича. Ясно, что $E_\rho \subset K_\rho \subset L_\rho$ и E_ρ - максимальное векторное подпространство в K_ρ.

Будем рассматривать E_ρ как полунормированное пространство с полунормой ζ и через E_ρ^* обозначим, как обычно, вещественное банахово пространство линейных непрерывных функционалов на E_ρ.

Обозначим через Ξ_ρ векторное пространство сильно измеримых на Ω функций $\sigma(\cdot)$ со значениями в банаховом пространстве T^*, обладающих такими двумя свойствами:

1) $<\sigma(\cdot), u(\cdot)> \in L_1(\Omega) \quad \forall u(\cdot) \in L_\rho$,

2) $\|\sigma(\cdot)\|_{\Xi_\rho} \overset{def}{=} \sup\limits_{u(\cdot) \in L_\rho, \zeta(u(\cdot)) \leq 1} \int\limits_\Omega <\sigma(x), u(x)> dx < +\infty.$

Теорема 4.1. (Об общем виде линейного непрерывного функционала на E_ρ.) *Пусть T - рефлексивное пространство. Для любого функционала $f \in E_\rho^*$ существует единственная функция $\sigma_f(\cdot) \in \Xi_\rho$ такая, что $\|f\|_{E_\rho^*} = \|\sigma_f(\cdot)\|_{\Xi_\rho}$ и имеет место тождество*

$$<f, u(\cdot)> = \int\limits_\Omega <\sigma_f(x), u(x)> dx \qquad \forall u(\cdot) \in E_\rho. \tag{4.2}$$

Следствие. *Функционал $\|\cdot\|_{\Xi_\rho}$ на Ξ_ρ является нормой. Относительно этой нормы Ξ_ρ - банахово пространство, линейно изометричное пространству E_ρ^* в силу отображения E_ρ^* на Ξ_ρ, задаваемого равенством* (4.2).

Идея доказательства теоремы 4.1 содержится в работе автора [13].

§5. Некоторые свойства пространства Ξ_ρ, применяемые в вариационном исчислении

Предположим, что T - рефлексивное пространство. Приведем без доказательства следующие четыре теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть $\gamma(\cdot)$ - измеримая на Ω вещественная функция, положительная в каждой точке $x \in \Omega$. Тогда если пространство $L_\infty(\Omega, T, \gamma(\cdot))$ непрерывно вложено в пространство E_ρ, то пространство Ξ_ρ непрерывно вложено в пространство $L_1(\Omega, T^*, \gamma^{-1}(\cdot))$.*

Теорема 5.2. *Существует измеримая на Ω вещественная положительная в каждой точке $x \in \Omega$ функция $\gamma(\cdot)$ такая, что пространство $L_\infty(\Omega, T, \gamma(\cdot))$ непрерывно вложено в пространство E_ρ и, следовательно (в силу теоремы 5.1), пространство Ξ_ρ непрерывно вложено в пространство $L_1(\Omega, T^*, \gamma^{-1}(\cdot))$.*

Теорема 5.3. (О секвенциальной компактности единичного шара пространства Ξ_ρ в $\sigma(\Xi_\rho, E_\rho)$ -топологии.) *Для всякой ограниченной последовательности $\{\sigma_n(\cdot)\}_{n \in N} \subset \Xi_\rho$ найдутся функция $\sigma(\cdot) \in \Xi_\rho$ и подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}(\cdot)\}_{k \in N}$ последовательности $\{\sigma_n(\cdot)\}_{n \in N}$ такие, что $\sigma_{n_k}(\cdot) \to \sigma(\cdot)$*

в пространстве Ξ_p *в* $\sigma(\Xi_p, E_p)$ *-топологии.*

Теорема 5.4. *Если функция* $\sigma(\cdot)\in S(\Omega, T^*)$ *и* $M^*(\cdot,\sigma(\cdot))\in L_1(\Omega)$, *то* $\sigma(\cdot)\in\Xi_p$ *и*

$$\|\sigma(\cdot)\|_{\Xi_p}\le 1+\int_\Omega M^*(x,\sigma(x))\,dx. \tag{5.1}$$

Для доказательства этой теоремы рефлексивность пространства T не требуется.

§6. Две вспомогательные теоремы для векторных пространств с полунормой

Теорема 6.1. (см. [14]). *Пусть* X *- векторное пространство с полунормой* p . *Пусть на* X *задана еще полунорма* ν , *обладающая такими двумя свойствами:* 1) $p+\nu$ *- норма на* X *и относительно этой нормы* X *- банахово пространство,* 2) *всякая ограниченная в* X *по норме* $p+\nu$ *последовательность содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно полунормы* ν . *Тогда* $\dim\ker p<+\infty$ *и на любом замкнутом векторном подпространстве* X_0 *в* X *таком, что* $X=X_0\oplus\ker p$, *полунорма* p *эквивалентна норме* $p+\nu$.

На основе теоремы 6.1 и теоремы Банаха о непрерывности обратного оператора может быть доказана

Теорема 6.2. *Пусть* S *- векторное пространство, на котором заданы полунормы* ξ *и* η *такие, что полунорма* $\xi+\eta$ *является нормой на* S *и* S *полно относительно этой нормы. Пусть, далее, всякая последовательность, ограниченная по норме* $\xi+\eta$, *содержит подпоследовательность, фундаментальную относительно полунормы* η . *Пусть, наконец, на* S *задана еще полунорма* η' , *которая является нормой на подпространстве* $\ker\xi$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\eta'(u)\le C(\xi(u)+\eta(u))\qquad \forall u\in S,$$

где константа $C\in\mathbb{R}$ *и не зависит от* $u\in S$. *Тогда полунорма* $\xi+\eta'$ *является нормой на* S , *эквивалентной норме* $\xi+\eta$.

§7. Об одном удобном в приложениях условии ограниченности функционала на минимизирующих последовательностях функционала $g-f$

1°. Пусть $\mathfrak{M}$ - непустое множество произвольной природы, $g:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ и $f:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ - функционалы на $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим на $\mathfrak{M}$ функционал

$$g_f \overset{\mathrm{def}}{=} g-f.$$

Нас будет интересовать условие, при котором функционал g ограничен на любой минимизирующей последовательности функционала g_f .

Пусть $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ и пусть каждому $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant \mathcal{N}$, поставлены в соответствие функционалы $g_j : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ и $f_j : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, причем найдутся такие вещественные константы c_1 и c_2, что имеют место неравенства

$$g(u) \geqslant \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} g_j(u) - c_1 \qquad \forall u \in \mathfrak{M} \tag{7.1}$$

и

$$f(u) \leqslant \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} f_j(u) + c_2 \qquad \forall u \in \mathfrak{M}. \tag{7.2}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{M}_1(\lambda) = \mathfrak{M} \qquad \forall \lambda > 0,$$

и если $\mathcal{N} > 1$, то

$$\mathfrak{M}_j(\lambda) = \{u \in \mathfrak{M} \mid \sum_{i=1}^{j-1} g_i(u) \leqslant \lambda\} \qquad \forall j = 2, \ldots, \mathcal{N}, \ \forall \lambda > 0.$$

Условие 7.1. $\forall \lambda > 0$, $\forall j = 1, \ldots, \mathcal{N}$ таких, что $\mathfrak{M}_j(\lambda) \neq \emptyset$ и $\sup\limits_{u \in \mathfrak{M}_j(\lambda)} g_j(u) = +\infty$, имеют место соотношения

$$\varliminf_{u \in \mathfrak{M}_j(\lambda),\, g_j(u) \to +\infty} \left(g_i(u) - f_i(u)\right) > -\infty \qquad \forall i \neq j, \tag{7.3}$$

$$\varlimsup_{u \in \mathfrak{M}_j(\lambda),\, g_j(u) \to +\infty} \frac{f_j(u)}{g_j(u)} < 1. \tag{7.4}$$

Теорема 7.1. *При выполнении условия 7.1 функционал g ограничен на любой минимизирующей последовательности функционала g_f.*

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ - минимизирующая последовательность функционала g_f. Наша задача состоит в том, чтобы доказать неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} g(u_n) < +\infty. \tag{7.5}$$

Предположим, что (7.5) не выполнено. Тогда найдутся такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ последовательности $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и такое число $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant \mathcal{N}$, что $g_j(u_{n_k}) \to +\infty$ при $k \to \infty$, и если $j > 1$, то $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \sum\limits_{i=1}^{j-1} g_i(u_{n_k}) < +\infty$. Подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ является, очевидно, минимизирующей последовательностью функционала g_f, но, с другой стороны, в силу неравенств (7.1) и (7.2) условия 7.1, имеем

$$\varliminf_{k \to \infty} \left(g(u_{n_k}) - f(u_{n_k})\right) \geqslant -c_1 - c_2 + \varliminf_{k \to \infty} \left(g_j(u_{n_k}) - f_j(u_{n_k})\right) +$$
$$+ \sum_{i \neq j} \varliminf_{k \to \infty} \left(g_i(u_{n_k}) - f_i(u_{n_k})\right) = +\infty.$$

Противоречие.

Теорема 7.1 доказана.

В следующих пунктах этого параграфа мы отметим два вспомогательных утверждения, на основе которых в приложениях удобно проверять неравенство (7.4).

2°. Пусть Ω - пространство точек x с σ-конечной мерой, V - вещественное банахово пространство, $M:\Omega\times V\to\overline{R}$ - для почти всех $x\in\Omega$ неотрицательная четная выпуклая функция на V такая, что $M(x,0)=0$.

Для любой функции $u(\cdot)\in S(\Omega,V)$ функционал Орлича ρ определим по формуле (4.1).

Пусть на классе Орлича K_ρ задан некоторый функционал $\sigma:K_\rho\to R$ (для приложений важен случай, когда σ - норма Орлича

$$\|\cdot\|_\rho \overset{def}{=} \inf_{t>0} \frac{1+\rho(t\cdot)}{t}$$

или норма Люксембурга

$$\|\cdot\|_{(\rho)} \overset{def}{=} \inf_{t>0,\,\rho\left(\frac{\cdot}{t}\right)\leqslant 1} t\ ).$$

Пусть $\omega\in R,\omega\geqslant 0$. Нас будет интересовать вопрос о том, при каких ω имеет место соотношение

$$\lim_{u(\cdot)\in K_\rho,\,\rho(u(\cdot))\to+\infty} \Big(\rho(u(\cdot))-\omega\sigma(u(\cdot))\Big)=+\infty\ . \tag{7.6}$$

Теорема 7.2. *Пусть найдутся такие константы $A\geqslant 0$ и $\theta>0$, что имеет место неравенство*

$$\sigma(u(\cdot))\leqslant A+\theta\rho(u(\cdot)) \qquad \forall u(\cdot)\in K_\rho\,. \tag{7.7}$$

Положим $\varkappa_* \overset{def}{=} \sup\theta^{-1}$, где θ пробегает всю совокупность тех положительных чисел θ, с которыми имеет место неравенство (7.7). Тогда соотношение (7.6) имеет место $\forall\omega<\varkappa_*$.

Ясно, что $0<\varkappa_*\leqslant+\infty$.

Доказательство очевидно.

Теорема 7.3. *Пусть σ - однородный функционал в следующем смысле: $\sigma(\kappa u(\cdot))=\kappa^\tau\sigma(u(\cdot))$ $\forall u(\cdot)\in K_\rho,\forall\kappa\in(0,1]$, где $\tau\geqslant 0$. Пусть, далее, $\forall\kappa\in(0,1]$ найдутся константы $B(\kappa)\geqslant 0$ и $\delta(\kappa)>0$ такие, что имеет место неравенство*

$$\rho(\kappa u(\cdot))\leqslant B(\kappa)+\delta(\kappa)\rho(u(\cdot)) \qquad \forall u(\cdot)\in K_\rho\,. \tag{7.8}$$

Предположим, что

$$\sup_{\kappa\in(0,1]} \frac{\kappa^\tau}{\delta(\kappa)}>1. \tag{7.9}$$

Тогда если множество тех θ, для которых имеет место неравенство (7.7) непусто, то $\varkappa_*=+\infty$ и, следовательно, в силу теоремы 7.2, соотношение (7.6) имеет место $\forall\omega\geqslant 0$.

Доказательство. Из неравенства (7.7) следует, что

$$\sigma(\kappa u(\cdot)) \leq A + \theta\rho(\kappa u(\cdot)) \quad \forall \kappa \in (0,1], \quad \forall u(\cdot) \in K_\rho, \tag{7.10}$$

откуда, в силу однородности функционала σ, получим

$$\sigma(u(\cdot)) < \frac{A}{\kappa^\tau} + \frac{\theta}{\kappa^\tau}\rho(\kappa u(\cdot)) \quad \forall \kappa \in (0,1], \quad \forall u(\cdot) \in K_\rho. \tag{7.11}$$

Воспользовавшись неравенством (7.8), из (7.11) получаем следующее неравенство:

$$\sigma(u(\cdot)) \leq \frac{A}{\kappa^\tau} + \frac{\theta B(\kappa)}{\kappa^\tau} + \frac{\theta\delta(\kappa)}{\kappa^\tau}\rho(u(\cdot)) \quad \forall \kappa \in (0,1], \quad \forall u(\cdot) \in K_\rho. \tag{7.12}$$

Из (7.12) имеем

$$\frac{\kappa^\tau}{\theta\delta(\kappa)} < \mathscr{X}_*$$

или

$$\mathscr{X}_* \sup_{\kappa \in (0,1]} \frac{\kappa^\tau}{\delta(\kappa)} \leq \mathscr{X}_*. \tag{7.13}$$

Равенство $\mathscr{X}_* = +\infty$ является следствием неравенств (7.9) и (7.13). Теорема 7.3 доказана.

Достаточное условие для выполнения (7.9) содержится в следующей ниже теореме 7.4.

Для фиксированных $x \in \Omega$ и $\omega \in V$ через $\mu_{x,\omega}(\cdot) : [0,+\infty) \to [0,+\infty]$ обозначим функцию, которая равна правой производной функции $t \to M(x, t\omega)$ для тех $t \in [0,+\infty)$, где эта правая производная существует и равна $+\infty$ - в остальных точках промежутка $[0,+\infty)$.

Теорема 7.4 (см. [13, с.24-26]). *Если для почти всех* $x \in \Omega$, $\forall \omega \in V$, $\forall t \geq 0$ *имеет место неравенство*

$$\gamma M(x, t\omega) \leq \psi(x) + t\mu_{x,\omega}(t), \tag{7.14}$$

где $\gamma > 0$, *а* $\psi(\cdot) \in L_1(\Omega)$, *то справедливо неравенство* (7.8) *с функцией* $\delta(\cdot)$, *определенной на промежутке* $(0,1]$ *соотношением* $\delta(\kappa) = \kappa^\gamma$. *Так что, если* $\gamma > \tau$, *то выполнено соотношение* (7.9), *и следовательно, в условиях теоремы* 7.3, $\mathscr{X}_* = +\infty$ *и соотношение* (7.6) *имеет место* $\forall \omega \geq 0$.

3°. Будем пользоваться обозначениями предыдущего пункта. Пусть функция $f(\cdot) \in S(\Omega, V^*)$ обладает тем свойством, что для некоторого $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, имеет место соотношение

$$M^*(\cdot, \tfrac{1}{\varepsilon} f(\cdot)) \in L_1(\Omega). \tag{7.15}$$

Тогда

$$\lim_{u(\cdot) \in K_\rho,\ \rho(u(\cdot)) \to +\infty} \left(\rho(u(\cdot)) - \int_\Omega \langle f(x), u(x) \rangle dx\right) = +\infty. \tag{7.16}$$

Действительно, пользуясь неравенством Юнга и выпуклостью функции M на V для почти всех $x\in\Omega$, $\forall u(\cdot)\in K_\rho$ получаем

$$\int_\Omega \langle f(x), u(x)\rangle dx \leqslant \int_\Omega M^*\left(x, \tfrac{1}{\varepsilon} f(x)\right)dx + \varepsilon\rho(u(\cdot)),$$

откуда и следует соотношение (7.16).

Пусть по-прежнему функция $f(\cdot)\in S(\Omega, V^*)$. Пусть, далее, $\langle f(\cdot), u(\cdot)\rangle\in L_1(\Omega)$ $\forall u(\cdot)\in L_\rho$, причем

$$d \overset{def}{=} \sup_{u(\cdot)\in L_\rho,\, \|u(\cdot)\|_\rho\leqslant 1} \int_\Omega \langle f(x), u(x)\rangle dx < 1, \tag{7.17}$$

где $\|\cdot\|_\rho$ - норма Орлича (вместо нормы Орлича может быть взята норма Люксембурга).

Если вместо соотношения (7.15) потребовать выполнения неравенства (7.17), то соотношение (7.16) снова будет выполненным.

Действительно, $\forall u(\cdot)\in K_\rho$ имеем

$$\rho(u(\cdot)) - \int_\Omega \langle f(x), u(x)\rangle dx \geqslant$$

$$\geqslant \rho(u(\cdot)) - d\|u(\cdot)\|_\rho \geqslant \rho(u(\cdot)) - d - d\rho(u(\cdot)) = (1-d)\rho(u(\cdot)) - d,$$

так что соотношение (7.16) имеет место.

В следующих параграфах мы рассмотрим ряд примеров на применение основной теоремы 1.1 и ее обобщения - теоремы 3.1.

§8. О возрастающих функционалах

Пусть $\mathfrak{M}$ - непустое множество произвольной природы.

Определение 8.1. Функционал $g:\mathfrak{M}\to\overline{\mathbb{R}}$ называется *возрастающим относительно функционала* $\rho:\mathfrak{M}\to\overline{\mathbb{R}}$, если выполнено одно из следующих двух условий:

1) $\sup\limits_{u\in\mathfrak{M}} \rho(u) < +\infty$, 2) $\sup\limits_{u\in\mathfrak{M}} \rho(u) = +\infty$ и

$$\lim_{u\in\mathfrak{M},\, \rho(u)\to+\infty} g(u) = +\infty. \tag{8.1}$$

Определение 8.2. Последовательность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathfrak{M}$ называется *ограниченной относительно функционала* $\tau:\mathfrak{M}\to\overline{\mathbb{R}}$, если $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\tau(u_n) < +\infty$.

Теорема 8.1. *Для того чтобы функционал* $g:\mathfrak{M}\to\overline{\mathbb{R}}$ *был возрастающим относительно функционала* $\rho:\mathfrak{M}\to\overline{\mathbb{R}}$, *необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность, ограниченная относительно функционала* g, *была ограниченной относительно функционала* ρ.

Доказательство очевидно.

Пусть заданы функционалы $g:\mathfrak{M}\to\overline{\mathbb{R}}$ и $\rho:\mathfrak{M}\to\overline{\mathbb{R}}$. Пусть $N\in\mathbb{N}$, $N>1$, и каждому $j\in\mathbb{N}$, $j\leqslant N$ поставлены в соответствие функционалы $g_j:\mathfrak{M}\to\overline{\mathbb{R}}$ и $\rho_j:\mathfrak{M}\to\overline{\mathbb{R}}$. Пусть, далее, заданы функции $\Lambda:\omega\to\overline{\mathbb{R}}$ и $\Gamma:\sigma\to\overline{\mathbb{R}}$, где $\prod\limits_{j=1}^N g_j(\mathfrak{M})\subset\omega\subset\overline{\mathbb{R}}^N$ и $\prod\limits_{j=1}^N \rho_j(\mathfrak{M})\subset\sigma\subset\overline{\mathbb{R}}^N$. Положим

$$g^*(u) \overset{def}{=} \Lambda(g_1(u), \ldots, g_N(u)) \quad \forall u \in \mathfrak{M}$$

и

$$p^*(u) \overset{def}{=} \Gamma(p_1(u), \ldots, p_N(u)) \quad \forall u \in \mathfrak{M}.$$

Введем еще такие обозначения:

$$\mathfrak{M}_1(\rho) \overset{def}{=} \mathfrak{M} \quad \forall \rho > 0,$$

$$\mathfrak{M}_j(\rho) \overset{def}{=} \{u \in \mathfrak{M} \mid p_i(u) \leq \rho \quad \forall i=1,\ldots,j-1\} \quad \forall \rho>0,\ \forall j=2,\ldots,N.$$

Определение 8.3. Множество $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}^N$ назовем ограниченным сверху, если существуют числа $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\gamma \subset \{(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \overline{\mathbb{R}}^N \mid \xi_j < a_j \quad \forall j=1,\ldots,N\}.$$

Сформулируем ряд условий, гарантирующих возрастание функционала g относительно функционала p.

Условие 8.1. Функционал g возрастает относительно функционала g^*.

Условие 8.2. Функционал p^* возрастает относительно функционала p.

Условие 8.3. $\forall j=1,\ldots,N$ и $\forall \rho > 0$ таких, что множество $\mathfrak{M}_j(\rho) \neq \emptyset$ и $\sup\limits_{u \in \mathfrak{M}_j(\rho)} p_j(u) = +\infty$, имеет место соотношение

$$\lim_{u \in \mathfrak{M}_j(\rho),\, p_j(u) \to +\infty} g^*(u) = +\infty.$$

Условие 8.4. Функция Γ ограничена сверху на каждом ограниченном сверху подмножестве множества $\mathfrak{S}$ и не ограничена сверху на каждом неограниченном сверху подмножестве множества $\mathfrak{S}$.

Теорема 8.2. *При выполнении условий 8.1–8.4 функционал g возрастает относительно функционала p.*

Доказательство. В силу условий 8.1 и 8.2, нам достаточно показать, что для любой последовательности $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$, у которой $p^*(u_n) \to +\infty$, найдется такая ее подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, для которой $g^*(u_{n_k}) \to +\infty$.

Выберем подпоследовательность $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ последовательности $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и число $j \in \mathbb{N}$, $j \leq N$, так, чтобы $p_j(u_{n_k}) \to +\infty$, и если $j > 1$, то $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} p_i(u_{n_k}) < +\infty \quad \forall i=1,\ldots,j-1$. Указанный выбор возможен, в силу условия 8.4.

Наконец, в силу условия 8.3, имеем: $g^*(u_{n_k}) \to +\infty$.

Теорема 8.2 доказана.

Замечание 8.1. Простейшая ситуация, при которой выполнены все условия 8.1–8.4 состоит в следующем: 1) $g_j(u) > -\infty$ и

$$p_j(u) > -\infty \quad \forall u \in \mathfrak{M},\ \forall j=1,\ldots,N, \quad 2) \quad g(\cdot) \geq g^*(\cdot) =$$

$$= \varepsilon_1 \sum_{j=1}^{N} g_j(\cdot) - C_1, \quad p(\cdot) \leqslant p^*(\cdot) = \varepsilon_2 \sum_{j=1}^{N} p_j(\cdot) + C_2,$$

где $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, 3) $\forall p > 0$, $\forall j = 1, \ldots, N$ таких, что $\mathfrak{M}_j(p) \neq \emptyset$ и $\sup\limits_{u \in \mathfrak{M}_j(p)} p_j(u) = +\infty$, имеют место соотношения:

$$\lim_{u \in \mathfrak{M}_j(p),\, p_j(u) \to +\infty} g_j(u) = +\infty, \quad \underline{\lim}_{u \in \mathfrak{M}_j(p),\, p_j(u) \to +\infty} g_i(u) > -\infty \quad \forall i \neq j.$$

§9. Теоремы существования в нелинейной теории упругости

Опишем ситуацию, обычно возникающую в теории упругости.

Пусть Ω - непустое открытое связное множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$. В реальных ситуациях $1 \leqslant n \leqslant 3$. Если $n = 3$, то мы имеем дело с так называемой пространственной теорией упругости. Случай $n = 2$ соответствует теории пластин и оболочек, а случай $n = 1$ - теории стержней.

Рассмотрим непустое множество Σ в векторном пространстве $S(\Omega, \mathbb{R}^s)$, $s \in \mathbb{N}$. Элементы множества Σ будем называть *смещениями*.

Пусть на Σ определен оператор $\mathcal{L}$ (не обязательно линейный), который каждому смещению из Σ ставит в соответствие функцию из пространства $S(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$. Оператор $\mathcal{L}$ назовем *оператором деформации*.

Пример 9.1. В геометрически линейных пространственных задачах теории упругости $n = s = 3, m = 6$, $\mathcal{L}$ - линейный тензор малых деформаций, Σ - совокупность всех таких локально интегрируемых на Ω функций со значениями в $\mathbb{R}^3$, у которых существует обобщенный в смысле С.Л. Соболева матричный дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ (по поводу вида оператора $\mathcal{L}$ в произвольной косоугольной криволинейной системе координат см. [15,16]).

Пример 9.2. В геометрически линейной теории пластин $n = 2$, $s = 1$, $m = 3$, $\mathcal{L} = \{\mathcal{D}^\alpha\}_{|\alpha| = 2}$, Σ - совокупность вещественных локально интегрируемых на Ω функций, у которых существуют на Ω обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные 2-го порядка.

Пример 9.3. В геометрически нелинейной теории пологих оболочек $n = 2$, $s = 3$, $m = 6$, Σ - совокупность функций $(u_1(\cdot), u_2(\cdot), u_3(\cdot))$ со значениями в $\mathbb{R}^3$, у которых существуют в обобщенном соболевском смысле выражения $\dfrac{\partial^2 u_3(\cdot)}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 u(\cdot)}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\dfrac{\partial^2 u_3(\cdot)}{\partial x_2^2}$, $\dfrac{\partial u_1(\cdot)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u_2(\cdot)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial u_1(\cdot)}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2(\cdot)}{\partial x_1}$, $\mathcal{L}$ - нелинейный оператор, действующий на функции из Σ по формуле

$$(u_1(\cdot), u_2(\cdot), u_3(\cdot)) \longrightarrow \Big\{ \{\mathcal{D}^\alpha u_3(\cdot)\}_{|\alpha| = 2}, \frac{\partial u_1(\cdot)}{\partial x_1} + \kappa_1 u_3(\cdot) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3(\cdot)}{\partial x_1}\right)^2, \quad \frac{\partial u_2(\cdot)}{\partial x_2}+\kappa_2 u_3(\cdot)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3(\cdot)}{\partial x_2}\right)^2,$$

$$\frac{\partial u_1(\cdot)}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2(\cdot)}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3(\cdot)}{\partial x_1}\,\frac{\partial u_3(\cdot)}{\partial x_2}\Bigg\};$$

где κ_1 и κ_2 - кривизны оболочки (см. [9, с.322]).

Другие примеры можно найти в работе автора [16] .

Пусть потенциальная энергия деформации задается соотношением

$$g(u(\cdot)) \overset{def}{=} \int_{\Omega} \Phi\,(x, \mathcal{L}(u(\cdot))dx,$$

где $\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ - функция, характеризующая физические свойства деформируемого тела.

Положим

$$K_\Phi \overset{def}{=} \{u(\cdot)\in \Sigma \mid \Phi\,(\cdot\,, \mathcal{L}(u(\cdot)))\in L_1(\Omega)\}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ - непустое подмножество в множестве K_Φ , $\mathcal{R}_0$ - векторное подпространство в пространстве $S\,(\Omega, \mathbb{R}^1)$, содержащее множество $\mathfrak{M}$, f - линейный функционал на $\mathcal{R}_0$, характеризующий действие внешних сил на деформированное тело.

Зафиксируем функцию $u^{(0)}(\cdot)\in\mathcal{R}_0$. Введем множество

$$\mathfrak{M}_0 \overset{def}{=} \{u(\cdot)\in S\,(\Omega, \mathbb{R}^1) \mid (u^{(0)}(\cdot)+u(\cdot))\in \mathfrak{M}\}.$$

Зададим векторное подпространство L в пространстве $S\,(\Omega, \mathbb{R}^1)$, содержащее множество $\mathfrak{M}_0$.

Пусть на L задана полунорма μ и пусть зафиксировано разложение L в прямую сумму векторных подпространств:

$$L = Z \oplus W \oplus \Lambda \oplus Y \oplus \Delta\,. \tag{9.1}$$

Разложению (9.1) соответствует разложение тождественного оператора I_L на L в сумму линейных проекционных операторов:

$$I_L = \Pi_Z + \Pi_W + \Pi_\Lambda + \Pi_Y + \Pi_\Delta\,. \tag{9.2}$$

Положим

$$\mathfrak{M}_0' \overset{def}{=} \mathfrak{M}_0 - \Pi_\Lambda\,(\mathfrak{M}_0).$$

Сформулируем ряд условий, при которых существует смещение $u(\cdot)\in\mathfrak{M}$ такое, что

$$g_f\,(u(\cdot)) = \inf_{v(\cdot)\in\mathfrak{M}} g_f\,(v(\cdot)). \tag{9.3}$$

Условие 9.1. Существует функция $\theta(\cdot)\in L_1(\Omega)$ такая, что $\theta(x)\leq\Phi\,(x, \mathcal{L}\,(u^{(0)}(\cdot)+v(\cdot)))$ для почти всех $x\in\Omega$, $\forall v(\cdot)\in\mathfrak{M}_0'$.

Условие 9.2. Функция $\Phi: \Omega\times R^m \longrightarrow \overline{R}$ суперпозиционно измерима.

Условие 9.3. Для почти всех $x \in \Omega$ функция $\Phi(x,\cdot): \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ является собственной выпуклой.

Условие 9.4. $Y \subset \mathcal{R}_0$, $\dim Y < \infty$ и μ - норма на Y, причем всякая последовательность

$$\{z^{(k)}(\cdot) + w^{(k)}(\cdot) + y^{(k)}(\cdot)\}_{k \in N} \subset (\Pi_Z + \Pi_W + \Pi_Y)(\mathfrak{M}_0),$$

ограниченная в пространстве L относительно полунормы μ, обладает тем свойством, что

$$\sup_{k \in N} \mu(y^{(k)}(\cdot)) < +\infty .$$

Условие 9.5. $u^{(0)}(\cdot) + v(\cdot) \in \mathcal{R}_0 \cap K_\Phi \quad \forall v(\cdot) \in \mathfrak{M}'_0$, причем имеет место неравенство

$$g_f(u^{(0)}(\cdot) + v(\cdot) - \Pi_\Lambda v(\cdot)) \leqslant$$

$$\leqslant g_f(u^{(0)}(\cdot) + v(\cdot)) \quad \forall v(\cdot) \in \mathfrak{M}_0 .$$

Определение 9.1. Скажем, что смещение $v(\cdot)$ из множества $\mathcal{R}_0 \cap L$ принадлежит множеству $\widehat{\mathfrak{M}}$, если

1) $u^{(0)}(\cdot) + v(\cdot) \in K_\Phi$, 2) существует смещение $v'(\cdot) \in \mathfrak{M}$ такое, что $g_f(v'(\cdot)) \leqslant g_f(u^{(0)}(\cdot) + v(\cdot))$.

Условие 9.6. Множество $T_W(\mathfrak{M}_0)$ ограничено в L, т.е.

$$\sup_{u(\cdot) \in T_W(\mathfrak{M}_0)} \mu(u(\cdot)) < +\infty .$$

Условие 9.7. С константами $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$\mu(T_Z v(\cdot)) \leqslant C_1 g(u^{(0)}(\cdot) + v(\cdot)) + C_2 \qquad \forall v(\cdot) \in \mathfrak{M}'_0, \tag{9.4}$$

$$C_1 \langle f, v(\cdot) \rangle \leqslant C_3 + C_4 \mu((T_Z + T_W + T_Y) v(\cdot)) \quad \forall v(\cdot) \in \mathfrak{M}'_0, \tag{9.5}$$

причем константа C_4 может быть выбрана меньше любого наперед заданного положительного числа, возможно, за счет изменения констант C_1, C_2 и C_3.

Определение 9.2. Пусть A - подмножество в L. Скажем, что функция $\rho(\cdot) \in \overline{A}$, если $\rho(\cdot) \in Y$, $\mu(\rho(\cdot)) = 1$ и существуют последовательности $\{t_k\}_{k \in N} \subset (0, +\infty)$ и $\{a^{(k)}(\cdot)\}_{k \in N} \subset A$ такие, что $t_k \to 0$ и $\mu(t_k a^{(k)}(\cdot) - \rho(\cdot)) \to 0$.

Условие 9.8. $\forall \rho(\cdot) \in \overline{(\Pi_Z + \Pi_W + \Pi_Y)(\mathfrak{M}_0)}$ имеет место неравенство

$$\langle f, \rho(\cdot) \rangle < 0. \tag{9.6}$$

Условие 9.9. Справедливо включение

$$(\Pi_Z + \Pi_W + \Pi_\Delta)(\mathfrak{M}'_0) \subset \mathcal{R}_0$$

и с константами $C_5 \in \mathbb{R}$, $\varkappa < 1$ имеет место неравенство

$$<f, (T_Z + T_W + T_\Delta)v(\cdot)> \leq$$

$$\leq \varkappa g\left(u^{(0)}(\cdot) + v(\cdot)\right) + C_5 \quad \forall v(\cdot) \in \mathfrak{M}_0'. \tag{9.7}$$

Условие 9.10. Для любого компакта $K \subset \Omega$ и любой последовательности $\{u^{(k)}(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_0'$ такой, что

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(g(u^{(0)}(\cdot) + u^{(k)}(\cdot)) + \mu\left((T_Z + T_W + T_Y)u^{(k)}(\cdot)\right)\right) < +\infty, \tag{9.8}$$

имеют место соотношения:

$$u^{(k)}(\cdot) \in \Xi_{\rho_K^{(1)}}, \quad \mathcal{L}(u^{(k)}(\cdot)) \in \Xi_{\rho_K^{(2)}} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{(см.§4)}$$

и

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\|u^{(k)}(\cdot)\|_{\Xi_{\rho_K^{(1)}}} + \|\mathcal{L}(u^{(k)}(\cdot))\|_{\Xi_{\rho_K^{(2)}}}\right) < +\infty,$$

причем функция $M_K^{(i)} : K \times (\mathbb{R}^{\nu_i})^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = m$, порождающая пространство $\Xi_{\rho_K^{(i)}}$, обладает следующим свойством: $\forall \gamma > 0$ найдется функция $\theta_{\gamma,K}^{(i)}(\cdot) \in L_1(K)$ такая, что имеет место неравенство

$$M_K^{(i)*}(x, \xi) \geq \gamma |\xi| - \theta_{\gamma,K}^{(i)}(x) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{\nu_i}, \text{ для почти всех } x \in K.$$

Условие 9.11. Пусть смещение $u(\cdot) \in L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{R}^1)$ таково, что существует последовательность $\{u^{(k)}(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}_0'$, для которой имеют место неравенство (9.8) и соотношения

$$\int_\Omega <v(x), u^{(k)}(x)> dx \to \int_\Omega <v(x), u(x)> dx \quad \forall v(\cdot) \in C_0^\infty(\Omega, (\mathbb{R}^1)^*), \tag{9.9}$$

$$\int_\Omega <v(x), \mathcal{L}(u^{(0)}(\cdot) + u^{(k)}(\cdot))(x)> dx \to$$

$$\to \int_\Omega <v(x), \psi(x)> dx \quad \forall v(\cdot) \in C_0^\infty(\Omega, (\mathbb{R}^m)^*), \tag{9.10}$$

где $\psi(\cdot)$ - функция из $L_1^{loc}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, обладающая свойством $\Phi(\cdot, \psi(\cdot)) \in L_1(\Omega)$. Тогда $u(\cdot) \in \widehat{\mathfrak{M}}$.

Теорема 9.1. *При выполнении условий 9.1-9.11 существует функция* $u(\cdot) \in \dot{\mathfrak{M}}$ *такая, что имеет место равенство* (9.3).

Доказательство. Утверждение теоремы (см.определение 9.1) эквивалентно такому: существует смещение $u(\cdot) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющее равенству

$$g_f\left(u^{(0)}(\cdot) + u(\cdot)\right) = \inf_{v(\cdot)\in \mathfrak{M}_0} g_f\left(u^{(0)}(\cdot) + v(\cdot)\right). \tag{9.11}$$

Пусть $\{u^{(k)}(\cdot)\}_{k\in N}$ - минимизирующая последовательность функционала $g_f(u^{(0)}(\cdot)+\cdot)$ на множестве $\mathfrak{M}_0$.

В силу разложения (9.1), $\forall k \in N$ имеем

$$u^{(k)}(\cdot) = z^{(k)}(\cdot) + w^{(k)}(\cdot) + \lambda^{(k)}(\cdot) + y^{(k)}(\cdot) + \delta^{(k)}(\cdot),$$

причем, в силу условия 9.5, можно считать, что $\lambda^{(k)}(\cdot)=0$ $\forall k\in N$, и таким образом, $\forall k \in N$ справедливо равенство

$$u^{(k)}(\cdot) = z^{(k)}(\cdot) + w^{(k)}(\cdot) + y^{(k)}(\cdot) + \delta^{(k)}(\cdot), \tag{9.12}$$

Очевидно, $\{u^{(k)}(\cdot)\}_{k\in N} \subset \mathfrak{M}_0'$.

Покажем, что всякая квазиминимизирующая (см.определение 1.1) последовательность вида (9.12) функционала $g_f(u^{(0)}+\cdot)$ на множестве $\mathfrak{M}_0$ обладает таким свойством:

$$\sup_{k\in N} \mu\left(z^{(k)}(\cdot) + w^{(k)}(\cdot) + y^{(k)}(\cdot)\right) < +\infty. \tag{9.13}$$

Для этого достаточно показать, что всякая такая последовательность содержит подпоследовательность $\{z^{(k_\ell)}(\cdot) + w^{(k_\ell)}(\cdot) + y^{(k_\ell)}(\cdot)\}_{\ell\in N}$, у которой

$$\sup_{\ell\in N} \mu\left(z^{(k_\ell)}(\cdot) + w^{(k_\ell)}(\cdot) + y^{(k_\ell)}(\cdot)\right) < +\infty.$$

Последнее утверждение будем доказывать от противного, а именно предположим, что

$$\sigma_k \stackrel{def}{=} \mu\left(z^{(k)}(\cdot) + w^{(k)}(\cdot) + y^{(k)}(\cdot)\right) \to +\infty. \tag{9.14}$$

Введем обозначение:

$$C_6 \stackrel{def}{=} \sup_{k\in N} g_f\left(u^{(0)}(\cdot) + u^{(k)}(\cdot)\right).$$

В силу неравенств (9.4) и (9.5) из условия 9.7, имеем

$$\mu\left(z^{(k)}(\cdot)\right) \leq C_1 g\left(u^{(0)}(\cdot) + u^{(k)}(\cdot)\right) + C_2 =$$

$$= C_1\left(g_f\left(u^{(0)} + u^{(k)}(\cdot)\right)\right) + C_1 < f, u^{(0)}(\cdot) > +$$

$$+ C_1 < f, u^{(k)}(\cdot) > + C_2 \leq C_1\left(C_6 + < f, u^{(0)}(\cdot) >\right) + C_3 + C_4\sigma_k. \tag{9.15}$$

Выберем $k_0 \in N$ такое, что $\sigma_k > 0$ при $k \geq k_0$, и в дальнейшем будем считать, что $k \geq k_0$.

Положим $\rho^{(k)}(\cdot) \stackrel{def}{=} \dfrac{y^{(k)}(\cdot)}{\sigma_k}$, так что $\forall k\in N$, $k \geq k_0$, имеем

$$\rho^{(\kappa)}(\cdot) = \frac{z^{(\kappa)}(\cdot)+w^{(\kappa)}(\cdot)+y^{(\kappa)}(\cdot)}{\sigma_\kappa} - \frac{z^{(\kappa)}(\cdot)}{\sigma_\kappa} - \frac{w^{(\kappa)}(\cdot)}{\sigma_\kappa} . \tag{9.16}$$

Поскольку в неравенстве (9.15), в силу условия 9.7, константа C_4 может быть сделана меньше любого наперед заданного положительного числа, то, в силу соотношения (9.14),

$$\mu\left(\frac{z^{(\kappa)}(\cdot)}{\sigma_\kappa}\right) \longrightarrow 0. \tag{9.17}$$

Далее, в силу условия 9.6 и соотношения (9.14),

$$\mu\left(\frac{w^{(\kappa)}(\cdot)}{\sigma_\kappa}\right) \longrightarrow 0. \tag{9.18}$$

Из равенства (9.16), с учетом соотношений (9.17) и (9.18), следует, что

$$\mu\left(\rho^{(\kappa)}(\cdot)\right) \longrightarrow 1. \tag{9.19}$$

Поскольку последовательность $\{\rho^{(\kappa)}(\cdot)\}_{\kappa\in N}$ расположена в конечномерном пространстве Y (условие 9.4) и, в силу (9.19), ограничена относительно полунормы μ, то из нее можно выделить подпоследовательность (ее мы обозначим тем же сивмолом), сходящуюся относительно полунормы μ в пространстве Y к функции $\rho(\cdot)\in Y$, у которой $\mu(\rho(\cdot))=1$. Функция $\rho(\cdot)\in(\Pi_z+\Pi_W+\Pi_Y)\mathfrak{M}_0$ (см. определение 9.2).

Из условий 9.9 и 9.1 следует $\forall\kappa\in N$, $\kappa\geqslant\kappa_0$, такая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} g_f\left(u^{(0)}(\cdot)+u^{(\kappa)}(\cdot)\right) &= -<f,u^{(0)}(\cdot)> + g\left(u^{(0)}(\cdot)+u^{(\kappa)}(\cdot)\right) - <f, z^{(\kappa)}(\cdot) + \\ &+ w^{(\kappa)}(\cdot) + \delta^{(\kappa)}(\cdot)> - \sigma_\kappa <f,\rho^{(\kappa)}(\cdot)> \geqslant -<f,u^{(0)}(\cdot)> + (1-\varkappa)g\left(u^{(0)}(\cdot)+u^{(\kappa)}(\cdot)\right) - \\ &- C_5 - \sigma_\kappa <f,\rho^{(\kappa)}(\cdot)> \geqslant -<f,u^{(0)}(\cdot)> + (1-\varkappa)\int_\Omega \theta(x)dx - C_5 - \sigma_5 (f,\rho^{(\kappa)}(\cdot)>. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Из неравенства (9.20) в силу условия 9.8, следует, что

$$g_f\left(u^{(0)}(\cdot)+u^{(\kappa)}(\cdot)\right) \longrightarrow +\infty. \tag{9.21}$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение о том, что всякая квазиминимизирующая последовательность вида (9.12) функционала $g_f(u^{(0)}(\cdot)+\cdot)$ на множестве $\mathfrak{M}_0$ удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\kappa\in N}\mu\left(z^{(\kappa)}(\cdot)+w^{(\kappa)}(\cdot)+y^{(\kappa)}(\cdot)\right) < +\infty. \tag{9.22}$$

В силу условия 9.4, имеем:

$$\sup_{K\in\mathbb{N}} \mu\left(y^{(K)}(\cdot)\right) < +\infty,$$

и, следовательно,

$$C_7 \overset{def}{=} \sup_{K\in\mathbb{N}} < f, y^{(K)}(\cdot)> <+\infty.$$

Из условия 9.9 вытекает следующее неравенство:

$$g_f\left(u^{(0)}(\cdot)+u^{(K)}(\cdot)\right) \geqslant g\left(u^{(0)}(\cdot)+u^{(K)}(\cdot)\right) -$$

$$-< f, u^{(0)}(\cdot)> - \varkappa g\left(u^{(0)}(\cdot)+u^{(K)}(\cdot)\right) - C_5 - C_7,$$

откуда следует, что

$$(1-\varkappa) g\left(u^{(0)}(\cdot)+u^{(K)}(\cdot)\right) \leqslant < f, u^{(0)}(\cdot)> + C_5 + C_6 + C_7. \qquad (9.23)$$

Из неравенств (9.22) и (9.23) вытекает неравенство (9.8).

Следствием неравенства (9.8) и условия 9.10 является

Условие 9.12. Существует смещение $u(\cdot)\in L_1^{loc}(\Omega, R^1)$ и подпоследовательность последовательности $\{u^{(K)}(\cdot)\}_{K\in\mathbb{N}}$ (которую мы обозначим тем же символом) такие, что имеют место соотношения (9.9) и (9.10).

Воспользуемся теоремой 1.1.

Условие 1.1 (после выбора соответствующей подпоследовательности) следует из неравенства (9.8) и условия 9.10, условие 1.2 - из условий 9.2, 9.12 и 9.11, условие 1.3 - из условия 9.3, условие 1.4 - из неравенства (9.8), условий 9.12 и 9.11, условия 1.5 и 1.6 из условия 9.1.

Таким образом, все условия 1.1-1.6 выполнены; поэтому, в силу теоремы 1.1, имеет место равенство (9.13).

Теорема 9.1 доказана.

Частным случаем теоремы 9.1 являются теоремы существования решений вариационных задач, в том числе задачи Синьорини, установленные в [17, с.90 - 123].

Разумеется, в схему исследования, указанную в данном параграфе, попадают не только задачи теории упругости.

Таким же способом можно доказать, например, существование различных обобщений задач из теории фильтрации сигналов, сформулированных в [11, с.100-113]. Однако на этом вопросе мы здесь не останавливаемся.

Литература

1. Проблемы Гильберта.-М.: Наука, 1969.- 239 с.
2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.-М.: Наука, 1964.-538 с.

3. Плотников В.И., Сигалов А.Г., Уральцева Н.Н. Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи.- В кн.: Труды 1У Всесоюзного математического съезда.Л., Наука, 1963, т.1, с.199-213.
4. Сигалов А.Г. К девятнадцатой и двадцатой проблемам Гильберта.- В кн.: Проблемы Гильберта.М., Наука, 1969, с.204-215.
5. Скрыпник И.В. Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений.- В кн. Современные проблемы математики, М., 1976, с.131-254.
6. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.-Л.: Изд.ЛГУ, 1950.- 256 с.
7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике.-М.: Наука, 1970.-512 с.
8. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов.-М.: Наука, 1966.-432 с.
9. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Справочная математическая библиотека.- М.: Наука, 1965.-383 с.
10. Никольский С.М., Лизоркин П.И. О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе.- Докл.АН СССР, 1964, т.159, №3, с.512-515.
11. Экланд И.,Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.- М.:Мир, 1979.-399 с.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.-М.: Физматгиз, 1959.-684 с.
13. Портнов В.Р. Первая краевая задача для одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений и систем: Дис.на соиск.учен.степ.канд.физ.-мат.наук(01.003).- Новосибирск, Б.и.,1967.-257 с.- В надзаг.:Новосиб.ун-т.
14. Портнов В.Р. Пространства С.Л.Соболева с полунормой, имеющей конечномерное ядро.- В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1975, вып.32, с.114-138.
15. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости.-М.: Наука, 1969.- 336 с.
16. Портнов В.Р. Теоремы существования в теории деформации гибких тел.- В кн.: Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды семинара С.Л.Соболева).- Новосибирск, Наука, 1979, №2, с.92-123.
17. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости.-М.: Мир, 1974.- 159 с.