УДК 517.43

СТЕПЕНИ СИНГУЛЯРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

В.В.Катрахов, И.А.Киприянов (Воронеж)

Как известно, дробные степени эллиптических операторов играют весьма важную роль в спектральной теории и в других разделах теории краевых задач. Основой для их построения является теория псевдодифференциальных операторов.

В настоящей статье, следуя идеям работ Р.Сили [5] и Ш.А.Алимова [6], мы будем изучать комплексные степени эллиптических операторов, в которых по одной из переменных действует сингулярный оператор Бесселя

$$B = D_y^2 + \frac{2\nu+1}{y} D_y .$$

При этом мы естественным образом расширяем понятие сингулярного псевдодифференциального оператора, введенного в работах [1,2] (одномерный случай), в §3 (многомерный случай)—для классического однородного символа.

В §1 строится параметрикс произвольного порядка. На этой основе в §2 исследуется аналитическая группа степеней. Наиболее интересные результаты, на наш взгляд, связаны с ядрами в смысле теории распределений степеней исходного оператора. Оказалось, что основные их свойства существенно зависят от наличия (или отсутствия) в изучаемой области особенностей. В первом случае свойства гладкости ядер, распределение полюсов и другие свойства зависят от вида особенностей. Во втором - наши результаты совпадают с классическими результатами упомянутых выше авторов для регулярных операторов. Отметим, что это хорошо согласуется с соответствующим явлением и в спектральной теории [7,8,9]. В §3 содержатся вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве теорем.

Основные результаты могут быть перенесены с помощью простого приема на случай $\nu < -\frac{1}{2}$, хотя в работе будет рассмотрен лишь случай $\nu \geq -\frac{1}{2}$.

§ 1. Параметрикс

Пусть $R^{n+1} = \{x=(x',y) : x' \in R^n, y \in R^1\}$. Обозначим через $S_{чет} = S_{чет}(R^{n+1})$ подмножество четных по последней переменной функций из пространства гладких быстроубывающих функций $S(R^{n+1})$. На множестве $S_{чет}$ определено преобразование Фурье-Бесселя

$$\hat{u}(\xi) = F_B u(\xi) = \int_{R^{n+1}} e^{-i(x',\xi')} j_\nu(y\eta) u(x)(y^2)^{\nu+1/2} dy, \qquad (1)$$

где $\xi=(\xi',\eta)\in R^{n+1}$, фиксированный параметр $\nu\geqslant-\frac{1}{2}$ и j_ν - нормированная функция Бесселя первого рода, определяемая формулой

$$j_\nu(y)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{y^\nu}\,J_\nu(y)\,.$$

Обратный оператор F_B^{-1} отличается от прямого знаком в экспоненте и множителем $\left[\pi^n 2^{2\nu+n+1}\Gamma^2(\nu+1)\right]^{-1}=C_{n,\nu}$. Норму в пространстве $H_\nu^s(R^{n+1})$ (см. [4]) определим по формуле

$$\|u\|_{s,\nu}=\left\{\int\limits_{R^{n+1}}(1+|\xi|^2)^{s/2}\,|\hat{u}(\xi)|^2(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi\right\}^{1/2}. \tag{2}$$

В дальнейшем через $a_m(x,\xi)$ будем обозначать функцию класса $C^\infty(R^{n+1}\times R^{n+1})$, принадлежащую пространству $S(R^{n+1})$ по переменной x равномерно по ξ и удовлетворяющую условию однородности вещественной степени m вида

$$a_m(x,t\xi)=t^m a_m(x,\xi),\quad t\geqslant1,\ |\xi|\geqslant1\,. \tag{3}$$

Наложим, кроме того, следующие ограничения на поведение функции a_m при $y\longrightarrow0$:

либо

(i) $a_m(x,\xi)$ четна по y и η и $D_y^k a_m(x,\xi)=0$ при $y=0,\ k\geqslant1,$

либо (4)

(ii) $a_m(x,\xi)$ четна по y , нечетна по η и $D_y^k a_m(x,\xi)=0$ при $y=0,\ k\geqslant0$

Функцию a_m , удовлетворяющую условиям (3) и (4) , будем называть символом.

По символу a_m можно построить сингулярный псевдодифференциальный оператор (сокращенно с.п.д.о.) $Op(a_m)$ по формуле [2]

$$Op(a_m)u(x)=C_{n,\nu}\int\limits_{R^{n+1}}[j_\nu(y\eta)+i\eta j_{\nu+1}(y\eta)]\times$$
$$\times e^{i(x',\xi')}a_m(x,\xi)\hat{u}(\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi\,. \tag{5}$$

Название сингулярный псевдодифференциальный оператор оправдано тем, что операторы вида

$$\sum a_\alpha(x)D_{x'}^{\alpha'}B_y^{\alpha_{n+1}}, \tag{6}$$

имеющие сингулярные при $y=0$ коэффициенты, являются, как легко заметить, с.п.д.о.

Пусть функции a_{m-j} являются символами и имеют степень однородности $m-j$, $j=0,1,\dots$ Пусть с.п.д.о. A является асимптотической суммой

$$A=\sum_{j=0}^\infty Op(a_{m-j})\,. \tag{7}$$

Обозначим через $U \subset R^{n+1}$ ограниченную область, симметричную относительно гиперплоскости $y=0$. Условие равномерной B- эллиптичности, введенное одним из авторов ранее, для оператора A сводится к выполнению соотношения

$$|a_m(x,\xi)| > \varepsilon, \quad x \in U, \quad |\xi| = 1, \tag{8}$$

где ε - некоторое положительное число.

Изменяя оператор A на некоторый оператор из $\mathcal{L}_\nu^{-\infty}$ (это множество состоит из операторов, имеющих порядок $(ord) - \infty$ в шкале H_ν^s), что не повлияет на окончательные результаты, можно добиться того, чтобы соотношение (8) выполнялось при всех $\xi \in R^{n+1}$. Кроме того, оператор A предполагается полуограниченным, что приводит к условию вида:

$$|\arg a_m(x,\xi) - \pi| > \delta, \quad x \in U, \quad |\xi| < 1. \tag{9}$$

В дальнейшем мы будем строить параметрикс для оператора $A - \lambda$, где

$$A - \lambda = Op(a_m - \lambda) + \sum_{j=1}^{\infty} Op(a_{m-j}).$$

Заметим сразу же, что функция $a_m - \lambda$ не является однородной по ξ. Однако она однородна степени m по переменным $(\xi, \lambda^{1/m})$.

Обозначим через $C^\infty_{чет,0}(U)$ подмножество $C_0^\infty(U)$, состоящее из четных функций. Рассмотрим функции $\varphi, \psi \in C^\infty_{чет,0}(U)$, удовлетворяющие условиям:

$$D_y^k \varphi = D_y^k \psi = 0 \quad \text{при } y=0, \; k=1,2,\dots, \tag{10}$$
$$\text{и } \varphi\psi = \varphi.$$

Введем подлежащие определению функции $g_j(x,\xi,\lambda), j=-m,-m-1,\dots$ Рассмотрим операторы $Op(\varphi g_j)$, определяемые по формуле (5), а также оператор G, являющийся асимптотической суммой

$$G = \sum_{j \le -m} Op(\varphi g_j). \tag{11}$$

Пусть N- достаточно большое натуральное число. Положим

$$\begin{aligned} A_N &= \sum_{-N+2m \le k \le m} Op(a_k), \\ G_N &= \sum_{-N \le j \le -m} Op(\varphi g_j). \end{aligned} \tag{12}$$

Мы хотим построить параметрикс для оператора $A - \lambda$ в виде оператора G. Для этих целей рассмотрим формулу

$$\sum_{-N \le j \le -m} Op(\varphi g_j)\psi(A-\lambda)u - \varphi u = R_N u, \tag{13}$$

где $ord R_N$ должен стремиться к $-\infty$ при $N \to \infty$. Из формул (13) при различных N мы сможем последовательно определить неизвестные пока функции g_j. В самом деле, используя результаты из §3, левую часть формулы (13) можно разложить по формуле произведения с.п.д.о. Имеем

$$\sum_{-N\le j\le -m}\ \sum_{-N+2m<k<m}\ \sum_{|\alpha|<j+k+N-m} \frac{1}{\alpha!}\varphi(x) g_{j,\alpha',\alpha_{n+1}}(x,\xi,\lambda) b_{k,\alpha',\alpha_{n+1}}(x,\xi,\lambda) = \varphi(x), \tag{14}$$

где $b_m = \psi(a_m-\lambda)$, $b_k = \psi a_k$, $k<m$. Здесь

$$g_{j,\alpha',\alpha_{n+1}} = \left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^{\alpha'} g_{j,\alpha_{n+1}},$$

а функции $g_{j,\alpha_{n+1}}$ являются линейными комбинациями выражений вида:

$$\eta^s\left(\frac{\partial}{\eta\partial\eta}\right)^s g_j(x,\xi,\lambda)$$

при $-s+2\tau=\alpha_{n+1}$, причем $s\ge 0$.

Далее, $b_{k,\alpha',\alpha_{n+1}} = \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^{\alpha'} b_{k,\alpha_{n+1}}$, а через $b_{k,\alpha_{n+1}}$ обозначена комбинация производных по y порядка не выше α_{n+1} (и не равного нулю, если $\alpha_{n+1}>0$) с множителями y^s, при этом $b_{k,0,\dots,0} = b_k$.

Замечая, что $\varphi\psi=\varphi$, и выделяя в левой части (14) старший член с максимальной степенью однородности по $(\xi, \lambda^{1/m})$, получаем

$$g_{-m}(a_m-\lambda)=1.$$

Стало быть,

$$g_{-m}(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{a_m(x,\xi)-\lambda}. \tag{15}$$

Последовательно определяем и остальные функции g_j, которые будут иметь вид

$$g_{-m-j}(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=1}^{2j} \chi_{kj}(x,\xi)\left[a_m(x,\xi)-\lambda\right]^{-k-1}, \tag{16}$$

где χ_{kj} являются многочленами от функций $a_{m-\ell}$ $(\ell=0,\dots,j)$ и их производных порядка не выше j.

Сформулируем теперь более точно полученные результаты. Функции $g_j(x,\xi,\lambda)$ принадлежат классу C^∞ по переменным x,ξ и определены при $\lambda\in S_{\delta/2}=\{\lambda: |\pi-\arg\lambda|<\delta/2\}$. Функции g_j (как это вытекает из (16)) однородны в следующем смысле.

Пусть

$$g_{j,\alpha',s,\tau}(x,\xi,\lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^{\alpha'}\eta^s\left(\frac{\partial}{\eta\partial\eta}\right)^{\tau} g_j(x,\xi,\lambda),$$

тогда

$$g_{j,\alpha',s,\tau}(x,t\xi,t^m\lambda) = t^{j-|\alpha'|-2\tau+s}\, g_{j,\alpha',s,\tau}(x,\xi,\lambda) \tag{17}$$

при $|\xi|\ge 1$, $t\ge 1$.

По переменной x функции g_j принадлежат классу C^∞. Точнее, функции g_j удовлетворяют либо условию (i), либо (ii), причем g_{-m} - условию (i), и для каждого $R>0$ и каждого компакта из U существует постоянная $C>0$ такая, что

$$|D_x^\beta g_{j,\alpha',\tau,s}| \le C\left(|\xi|+|\lambda|^{1/m}\right)^{j-|\alpha'|-2\tau+s} \quad \text{при} \quad |\lambda|\ge R. \tag{18}$$

Дальнейшему исследованию функций g_j предпошлем одно вспомогательное утверждение. Обозначим через $T_\xi^\zeta g(\xi,\zeta)$ обобщенный сдвиг функции g, определяемый по формуле

$$T_\xi^\zeta g(\xi,\zeta)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi g\left(\xi'-\zeta',\sqrt{\eta^2+z^2-2\eta z\cos\theta},\zeta\right)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta.$$

Лемма 1. *Пусть функция* $g(\xi,\zeta,\lambda)$, *где* $\xi=(\xi',\eta),\zeta=(\zeta',z)\in R^{n+1}$, *удовлетворяет неравенству*

$$|g(\xi,\zeta,\lambda)|\le C(p)(1+|\xi|)^{-p}(|\zeta|+|\lambda|^{1/m})^j$$

для любых вещественных p. *Здесь* $|\lambda|\ge R>0, j<0$. *Тогда оператор* G_λ, *определяемый по формуле*

$$\widehat{G_\lambda u(\xi)}=\int_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta g(\xi,\zeta,\lambda)\hat{u}(\zeta)(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta$$

действует из $S_{чет}$ *в* $S_{чет}$ *и допускает оценку*

$$\|G_\lambda u\|_{s+q,\nu}\le const\,\|u\|_{s,\nu}|\lambda|^{(q+j)/m}$$

при $0\le q\le -j$, $|\lambda|\ge R>0$. *Постоянная не зависит от* λ *и* u.

Доказательство. С учетом неравенства Коши имеем

$$\|G_\lambda u\|^2_{s+q,\nu}=\int_{R^{n+1}}(1+|\xi|^2)^{s+q}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi\left|\int_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta g\cdot\hat{u}\cdot(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta\right|^2\le$$

$$\le\int_{R^{n+1}}(1+|\xi|^2)^{s+q}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi\int_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta|g|\cdot(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta\int_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta|g|\cdot|\hat{u}|^2(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta. \quad (19)$$

Для внутреннего интеграла справедлива оценка

$$I=\int_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta|g|(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta\le const\int_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta(1+|\xi|)^{-p}\cdot(|\zeta|+|\lambda|^{1/m})^j(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta. \quad (20)$$

С другой стороны, имеет место легко проверяемое неравенство

$$(|\zeta|+|\lambda|^{1/m})^j\le const(1+|\zeta|)^{-q}|\lambda|^{(q+j)/m} \quad (21)$$

при $|\lambda|\ge R>0$ и $0\le q\le -j$. Подставляя эту оценку в (20), получаем

$$I\le const|\lambda|^{(q+j)/m}\int_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta(1+|\xi|)^{-p}(1+|\zeta|)^{-q}(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta=$$

$$=const|\lambda|^{(q+j)/m}\int_{R^{n+1}}(1+|\zeta|)^{-p}T_\zeta^\xi(1+|\zeta|)^{-q}\cdot(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta\le$$

$$\le const|\lambda|^{(q+j)/m}\int_{R^{n+1}}(1+|\zeta|)^{-p+2\nu+1}(1+|\xi+\zeta|)^{-q}d\zeta\le$$

$$\le const|\lambda|^{(q+j)/m}(1+|\xi|)^{-q}.$$

В последнем соотношении p выбрано достаточно большим и использовано соответствующее неравенство Питре. Подставляя последнее неравенство в (19) и изменяя порядок интегрирования, имеем

$$|G_\lambda u|^2_{s+q,\nu} \le const|\lambda|^{(q+j)/m}\int\limits_{R^{n+1}}(1+|\xi|^2)^s(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi\int\limits_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta|g|\cdot|\hat{u}|^2(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta =$$

$$= const|\lambda|^{(q+j)/m}\int\limits_{R^{n+1}}|\hat{u}|^2(z^2)^{\nu+1/2}d\zeta\int\limits_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta|g|\cdot(1+|\xi|^2)^s(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi. \tag{22}$$

Используя неравенство Питре, оценку (21) и самосопряженность оператора обобщенного сдвига для внутреннего интеграла в(22), получаем

$$\int\limits_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta|g|\cdot(1+|\xi|^2)^s(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi \le$$

$$\le const|\lambda|^{(q+j)/m}(1+|\zeta|)^{-q}\int\limits_{R^{n+1}}T_\xi^\zeta(1+|\xi|)^{-p}\cdot(1+|\xi|^2)^s(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi =$$

$$= const|\lambda|^{(q+j)/m}\int\limits_{R^{n+1}}(1+|\xi|)^{-p+2\nu+1}(1+|\xi\pm\zeta|^2)^s d\xi \le$$

$$\le const|\lambda|^{(q+j)/m}(1+|\zeta|^2)^s.$$

Последнее неравенство и завершает доказательство леммы.

Прямым следствием оценки (18) и леммы 1 является следующая

Лемма 2. *Оператор* $Op(\varphi g_j)$ *, построенный по функции* $\varphi(x)g_j(x,\xi,\lambda)$ *, допускает оценку*

$$|Op(\varphi g_j)u|_{s+q,\nu} \le c|\lambda|^{-1+q/m}|u|_{s,\nu} \tag{23}$$

для любых вещественных s *и* $0\le q\le m$.

Лемма 3. *Оператор* R_N *, построенный по формуле* (16), *допускает оценку*

$$|R_N u|_{s+q+N-2m,\nu} \le c|u|_{s,\nu}|\lambda|^{-1+q/m},$$

где $N>2m$, $0\le q\le m$ *и* s *- произвольное вещественное число.*

Для доказательства леммы 3 используются оценка (23) и оценка остаточного члена из соответствующей формулы Тейлора, только в отличие от §3 требуется более точно проследить зависимость от параметра λ.

Перейдем теперь к построению параметрикса на многообразии.

Пусть Ω - бесконечно дифференцируемое многообразие с краем, а $\{V_\mu\}$ - конечное множество координатных окрестностей, которые диффеоморфны (соответствующий диффеоморфизм обозначается через $\varkappa_\mu$) областям

V'_μ в полупространстве $R^{n+1}_+ \ (y>0)$. Дополнительно предполагается, что естественное отображение соответствующих частей V'_μ оставляет инвариантными нормали к гиперплоскости $y=0$.

Пусть V_μ - такая координатная окрестность и функции $\varphi,\psi,\theta\in C^\infty(V_\mu)$, причем их образы $\varphi^*=\varkappa_\mu\varphi,\ \psi^*=\varkappa_\mu\psi,\ \theta^*=\varkappa_\mu\theta$ принадлежат классу $C^\infty_{\text{чет},0}(V'_\mu\cup\Gamma'_\mu)$, где $\Gamma'_\mu=\partial V'_\mu\cap\{y=0\}$, и пусть $\varphi\psi=\varphi,\ \psi\theta=\psi$.

Пусть A - эллиптический сингулярный оператор на Ω порядка m , главная часть которого удовлетворяет сформулированным выше условиям. Пусть в каждой координатной окрестности в локальных координатах

$$\varkappa_\mu\theta A\theta\varkappa_\mu=\sum_{j\le m} Op(a_j).$$

Введем обозначение

$$H(\lambda)=\sum_{-N\le j\le -m} Op(\psi^* q_j) \quad \text{и} \quad Q(\lambda)=\varphi\varkappa_\mu^{-1}H(\lambda)\varkappa_\mu\psi.$$

Из предыдущих рассмотрений имеем

$$\| Q(A-\lambda)\theta-\varphi\|_{H^s_\nu\to H^{s+q+N-2m}_\nu}\le const\,|\lambda|^{-1+q/m}$$

для $0\le q\le m$. Пространства $H^s_\nu(\Omega)$ определяются, как и в [10] . Выберем специальное разбиение единицы $\{\varphi_\mu\}$, $\sum\varphi_\mu=1$ (см. [9]), подчиненное покрытию $\{V_\mu\}$, такое, что

$$\varkappa_\mu^{-1}\varphi_\mu\in C^\infty_{\text{чет},0}(V'_\mu\cup\Gamma'_\mu) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y}\varkappa_\mu^{-1}\varphi_\mu=0$$

в некоторой окрестности Γ'_μ . Положим $Q=\sum\varphi_\mu Q(\lambda)$. Оператор Q и является параметриксом (конечного порядка) для оператора A . Точнее, имеет место

Теорема 1. *Имеет место оценка*

$$\| Q(A-\lambda)u-u\|_{s+q+N-2m,\nu}\le const\,|\lambda|^{-1+q/m}$$

при $0\le q\le m$, $\lambda\in S_{\delta/2}$.

Теорема 2. *Оператор* $A-\lambda$ *при достаточно больших* $\lambda\in S_{\delta/2}$ *обратим, и справедлива оценка*

$$\|(A-\lambda)^{-1}\|_{H^s_\nu\to H^{s+q}_\nu}\le const\,|\lambda|^{-1+q/m},\quad 0\le q\le m.$$

Доказательство теоремы проводится по обычной схеме и использует оценки, полученные в предыдущей теореме. Аналогично доказывается

Теорема 3. *При достаточно больших* $\lambda\in S_{\delta/2}$ *справедливы оценки*

$$\| Q-(A-\lambda)^{-1}\|_{H^s_\nu\to H^{s+q+N-2m}_\nu}\le const\,|\lambda|^{-2+q/m},\quad 0\le q\le m.$$

§ 2. Дробные степени сингулярных эллиптических операторов

Этот параграф состоит из двух пунктов. В первом - доказывается, что дробные степени сингулярных эллиптических операторов являются с.п.д.о., и вычисляются их символы. Во втором - изучаются ядра дробных степеней.

2.1. Построение аналитической группы A^s

Здесь и далее предполагается, что $0 \bar{\in} spA$,т.е. оператор A обратим. Вводя некоторый множитель, можно добиться, чтобы $|a_m(x,\xi)| \geq \varepsilon > 1$ при всех x и ξ .

Пусть Λ - контур на комплексной плоскости, идущий из $-\infty$ до -1 по вещественной оси в верхней полуплоскости, затем по единичной окружности и далее по лучу $\arg \lambda = -\pi$.

Пусть сначала $Re\, s < 0$. Определим операторы A_s формулой

$$A_s = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \lambda^s (A-\lambda)^{-1} d\lambda, \tag{1}$$

где через λ^s обозначена главная ветвь функции λ^s на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Из теоремы 2 вытекает сходимость интеграла (1) в операторной топологии. Имеет место

Теорема 4. *Операторы A_s являются с.п.д.о. порядка ms, и в каждой координатной окрестности в локальных координатах их символы вычисляются по формуле*

$$\sigma(A_s) = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \lambda^s g_{-j-m}(x,\xi,\lambda)\, d\lambda \overset{def}{=} \sum_{j=0}^{\infty} h_{-m-j}(x,\xi,s). \tag{2}$$

Эта теорема доказывается с помощью общих соображений, основанных на построениях § 1, и поэтому доказательство опускается.

Отметим только следующую формулу, которая используется ниже

$$h_{-m-j}(x,\xi,s) = \sum_{k=0}^{2j} \frac{(-1)^k}{k!} \chi_{kj}(x,\xi)\, s(s-1)\dots(s-k+1)\left[a_m(x,\xi)\right]^{s-k}, \tag{3}$$

где χ_{kj} - многочлены от $a_m,\dots,a_{m-\ell}$ и их производных до порядка j , определенные в § 1.

Функции χ_{kj} являются однородными степени $2(km-j)$ по переменной ξ . При $j>0$ суммирование в (3) начинается с $k=1$.

Нетрудно убедиться, что A_s - аналитическая функция в полуплоскости $Re\, s < 0$ со значением в банаховой алгебре операторов в пространстве $H^k_\nu(\Omega)$. Для этого достаточно продифференцировать в формуле (1) по параметру s под знаком интеграла. Кроме того, при целом $s<0$ из голоморфности функции λ^s по интегральной формуле Коши следует, что оператор $A_s = (A^{-1})^{-s} = A^s$ является соответствующей итерацией оператора A^{-1} .

Из общей теории банаховых алгебр (см. [13]) вытекает также групповое свойство операторов

$$A_s A_t = A_{s+t}\,,\quad Re\, s<0,\ Re\, t<0.$$

Определим теперь операторы A^s по формулам

$$A^s = A_s\,,\quad Re\, s<0, \tag{4}$$

$$A^s = A^k A_{s-k}\quad, k \text{ - целое}, -1\leqslant Re\, s-k<0.$$

Из результатов § 1 и определения операторов A^s непосредственно следует

Теорема 5. *Операторы A^s, определяемые по формуле* (4), *образуют группу, причем каждый оператор A^s является с.п.д.о. порядка $m s$ с символом, определяемым формулой* (2) *для всех s. Функция A^s в полуплоскости $Re\, m s<\ell$ есть аналитическая функция со значением в пространстве ограниченных операторов, действующих из H_ν^k в $H_\nu^{k-\ell}$. Оператор A^s осуществляет изоморфизм пространств H_ν^k и $H_\nu^{k-m Re s}$.*

2.2. Ядра операторов A^s

Из теории распределений Л.Шварца (учитывая только весовой характер пространств) следует существование у оператора A^s ядра, которое мы обозначили через $\mathcal{A}_s(x,z)$, где $x=(x',y)\in R^{n+1}$ и $z=(z',t)\in R^{n+1}$. В этом пункте изучаются свойства ядра $\mathcal{A}_s(x,z)$ по всем трем переменным x,z,s.

Введем пространство $C^k_{чет}(\Omega)$ как множество функций u таких, что в каждых локальных координатах $u\in C^k_{чет,0}(V'_\mu\cup\Gamma'_\mu)$, причем последний класс состоит из функций из C^k_0, все производные нечетного порядка, которые не превосходят k, обращаются в нуль на Γ'_μ. Норма в $C^k_{чет}(\Omega)$ вводится естественным образом.

Пусть $U\subset R^{n+1}_+=\{y>0\}$ - произвольная область, Γ - часть ее границы, лежащая на гиперплоскости $y=0$ (Γ может быть и пустым множеством).

В работе [9] (в несколько ином виде) доказана следующая

Лемма 4. *При $k<\ell-\frac{n}{2}-\nu-1$ имеет место вложение*

$$H^\ell_{\nu_0}(U)\subset C^k_{чет}(U\cup\Gamma) \tag{1}$$

вместе с соответствующей топологией.

Если расстояние от U до гиперплоскости $\{y=0\}$ положительно (т.е $\Gamma=\emptyset$), то вложение (1) имеет место уже при $k<\ell-\frac{n+1}{2}$.

В качестве непосредственного следствия леммы 4 можно привести вложение

$$H^\ell_\nu(\Omega)\subset C^k_{чет}(\bar\Omega), \tag{2}$$

справедливое при $k<\ell-\frac{n}{2}-\nu-1$; если же отступить от края многообразия, то вложение (2) имеет место уже при $k<\ell-\frac{n+1}{2}$.

Приступим к изучению свойств ядра $\mathcal{A}_s(x,z)$.

Лемма 5. *Для целого $k \geq 0$ ядро $\mathcal{A}_s(x,z)$ есть аналитическая функция комплексного переменного s при $Re(ms) < -n-1-(2\nu+1)-k$ со значением в пространстве $C^k(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$. Если рассматриваются точки x, z внутри многообразия, то это имеет место уже при $Re(ms) < -n-1-k$.*

Доказательство. Для положительного ε оператор A^s представляет собой аналитическую функцию со значением в пространстве операторов

$$H_\nu^{-\varepsilon-n/2-\nu-1} \longrightarrow H_\nu^{\varepsilon+n/2+\nu+1}$$

(при $Re(ms) < -n-1-(2\nu+1)-2\varepsilon$) . Тогда, по лемме 4, ядро $A_s(x,z)$

непрерывно на $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ и, следовательно, функция $s \to \mathcal{A}_s$ со значениями в $C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ аналитична.

Трудностей при переходе от пространства C к C^k не возникает, поскольку всякая производная

$$D_{x'}^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}} D_{z'}^{\beta'} B_t^{\beta_{n+1}} \mathcal{A}_s$$

ядра $\mathcal{A}_s(x,z)$ порядка $|\alpha'| + 2\alpha_{n+1} + |\beta'| + 2\beta_{n+1} = k$ есть, очевидно, ядро оператора $P_1 A^s P_2$, где P_1 и P_2 - сингулярные дифференциальные операторы, причем $\operatorname{ord} P_1 + \operatorname{ord} P_2 = k$. С помощью второй части леммы 4 доказывается вторая часть утверждения леммы.

Изучим поведение функции $\mathcal{A}_s(x,z)$ вне диагонали $x = z$.

Лемма 6. *Пусть M - подмногообразие многообразия $\Omega \times \Omega$, расположенное на положительном расстоянии от диагонали. Тогда сужение функции $\mathcal{A}_s(x,z)$ на M принадлежит $C^\infty(M)$ и является голоморфной функцией на всей комплексной плоскости по переменной s .*

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\int_\Lambda \lambda^s [Q(\lambda) - (A-\lambda)^{-1}]\, d\lambda = P, \qquad (3)$$

где Q - параметрикс порядка N . Пусть $\mathcal{P}(x,z)$ - ядро оператора P . Тогда для $Re\, s < 1$ функция $\mathcal{P}(x,z) \in C^k$ при $k < N-2m-n-1-(2\nu+1)$. Следовательно, особенности ядра оператора $\int_\Lambda \lambda^s Q\, d\lambda$ совпадают при достаточно большом N с особенностями $\mathcal{A}_s(x,z)$. Так как наши рассмотрения локальны, то достаточно теперь изучить операторы вида

$$\int_\Lambda \lambda^s Op(q_j)\, d\lambda = Op(h_j).$$

Ядро $\mathcal{H}_j(x,z) = \mathcal{H}_j(x,z,s)$ оператора $Op(h_j)$ можно вычислить в явном виде. Например, если функция $h_j(x,\xi) = h_j(x,\xi,s)$ удовлетворяет условию (i), то

$$\mathcal{H}_j(x,z) = c_{n,\nu} \int_{R^{n+1}} e^{i(\xi', x'-z')} j_\nu(y\eta) j_\nu(t\eta) h_j(x,\xi) (\eta^2)^{\nu+1/2} d\xi =$$

$$= c_{n,\nu} \int_{R^{n+1}} T_x^z \left[e^{i(\xi',x')} j_\nu(y\eta) \right] h_j(x,\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2} d\xi, \tag{4}$$

где T_x^z - оператор обобщенного сдвига.

Так как

$$\Delta_B^\ell e^{i(\xi',x')} j_\nu(y\eta) \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} + B_\eta \right)^\ell e^{i(\xi',x')} j_\nu(y\eta) =$$

$$= (-1)^\ell |x|^{2\ell} e^{i(\xi',x')} j_\nu(y\eta),$$

то при $z \neq x$

$$\mathcal{H}_j(x,z) = c_{n,\nu} (-1)^\ell \int_{R^{n+1}} T_x^z \left[|x|^{-2\ell} e^{i(\xi',x')} j_\nu(y\eta) \right] \times$$

$$\times \Delta_B^\ell h_j(x,\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2} d\eta. \tag{5}$$

Интеграл (5) сходится, коль скоро $Re(ms) < m-j-n-1-(2\nu+1)+2\ell$. Тем самым получено аналитическое продолжение функции $\mathcal{H}_j$, определенной первоначально по формуле (4) , на эту полуплоскость S-плоскости.

Производные

$$D_{x'}^{\alpha'} B_y^{\alpha_{n+1}} D_{z'}^{\beta'} B_t^{\beta_{n+1}}$$

порядка p функции $\mathcal{H}_j(x,z)$ могут быть аналитически продолжены в область $Re(ms) < -m-j-n-1-(2\nu+1)+2\ell-p$. В силу произвольности ℓ , лемма для $Re\, s < 1$ доказана в четном случае.

В нечетном, когда $h_j(x,\xi)$ удовлетворяет условию (ii) , имеем

$$\mathcal{H}_j(x,z) = c_{n,\nu} \int_{R^{n+1}} e^{i(\xi',x'-z')} \eta j_{\nu+1}(y\eta) j_\nu(t\eta) h_j(x,\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2} d\xi -$$

$$- c_{n,\nu} \frac{\partial}{\partial y} \int_{R_{n+1}} e^{i(\xi',x'-z')} j_\nu(y\eta) j_\nu(t\eta) \frac{1}{y\eta} h_j(x,\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2} d\xi -$$

$$- c_{n,\nu} \int_{R^{n+1}} e^{i(\xi',x'-z')} j_\nu(y\eta) j_\nu(t\eta) \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{y} h_j(x,\xi) \right] (\eta^2)^{\nu+1/2} d\xi.$$

Второй интеграл в последнем выражении имеет тот же вид, что и рассмотренный выше, а первый допускает представление вида

$$C_{n,\nu}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{R^{n+1}} T_x^z\left[|x|^{-2\ell}e^{i(\xi',x')}j_\nu(y\eta)\right]\Delta_B^\ell\left[\frac{1}{y\eta}h_j(x,\xi)\right](\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi$$

и, следовательно, сходится при $Re\,(ms)<-m-j-n-1-(2\nu+1)+2\ell$. Лемма для $Re\,s<1$ доказана. Для остальных значений она доказывается по схеме, предложенной в следующем утверждении.

До сих пор мы рассматривали поведение ядра вне диагонали. Изучим теперь его поведение на диагонали.

Теорема 6. *I. Пусть $\bar{x}$ - точка, лежащая на границе Ω. Тогда ядро $A_s(\bar{x},\bar{x})$, как функция s, может быть аналитически продолжено из полуплоскости $Re\,(ms)<-n-1-(2\nu+1)$ на всю комплексную плоскость, за исключением точек $s=(k-n-2\nu-2)/m$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$, которые будут простыми полюсами.*

II. Если $\bar{x}$ - внутренняя точка Ω, то функция $A_s(\bar{x},\bar{x})$ может быть аналитически продолжена из полуплоскости $Re(ms)<-n-1-(2\nu+1)$ на всю комплексную плоскость, за исключением простых полюсов $s=(k-n)/m$ $(k=0,1,2,\ldots)$.

Доказательство. Основная трудность сосредоточена в доказательстве второй части теоремы, первая же часть доказывается следующим образом. По формуле (4) при $x=z$ и $y=0$ имеем

$$\mathcal{H}_j(x,x,s)=C_{n,\nu}\int\limits_{R^{n+1}} h_j(x,\xi,s)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi=C_{n,\nu}\left\{\int\limits_{|\xi|<1}+\int\limits_{|\xi|>1}\right\}. \tag{6}$$

Ясно, что первый интеграл справа в (6) есть целая функция s. Используя однородность функции $h_j(x,\xi,s)$ по ξ при $|\xi|\geq 1$, второй интеграл можно привести к виду

$$\int\limits_{|\xi|>1} h_j(x,\xi,s)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi=\frac{-1}{n+1+2\nu+1+ms+m+j}\int\limits_{|\xi|=1} h_j(x,\xi,s)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi.$$

Аналогичны рассмотрения в случае, когда h_j удовлетворяет условию (ii).

Первая часть $Re\,s<1$ доказана. Для остальных s она доказывается стандартным способом с использованием представления

$$A^s=A^kA^{s-k}=\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_\lambda \lambda^{s-k}A^k(A-k)^{-1}d\lambda$$

при $k\leq Re\,s<k+1$.

Переходим к доказательству второй части. Нам необходимо исследовать интеграл

$$\mathcal{H}_j=C_{n,\nu}\int\limits_{R^{n+1}}\left[j_\nu(y\eta)\right]^2 h_j(x,\xi,s)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi. \tag{7}$$

Рассмотрим сначала простейший интеграл вида

$$\int_0^1\int_1^\infty j_\nu^2(by\xi)\,\xi^{2\nu+1}\,y^{2\nu+1}\,\xi^{\lambda}\,d\xi\,dy=f_b(\lambda). \tag{8}$$

При $b=0$ непосредственным подсчетом находим, что

$$f_0(\lambda)=const\,\frac{1}{\lambda+(2\nu+1)+1}\ .$$

Следовательно, функция $f_0(\lambda)$ имеет простой полюс при $\lambda=-1-(2\nu+1)$. Пусть теперь $b>0$, тогда

$$f_b(\lambda)=\int_1^\infty \xi^{2\nu+1+\lambda}\,d\xi\int_0^1 j_\nu^2(by\xi)\,y^{2\nu+1}\,dy.$$

Производя замену переменной по формуле $y\xi=\tau$, получаем при помощи интегрирования по частям

$$f_b(\lambda)=\int_1^\infty \xi^{2\nu+1+\lambda}\,d\xi\int_0^{\xi} j_\nu^2(b\tau)\,\tau^{2\nu+1}\,\xi^{-2\nu-2}\,d\tau=$$

$$=\frac{-1}{\lambda}\int_1^\infty j_\nu^2(b\xi)\,\xi^{2\nu+1+\lambda}\,d\xi-\frac{1}{\lambda}\int_0^1 j_\nu^2(b\tau)\,\tau^{2\nu+1}\,d\tau=$$

$$=f_b^1(\lambda)+f_b^2(\lambda).$$

Для изучения функции $f_b^1(\lambda)$ воспользуемся асимптотическим разложением бесселевых функций [12] при $\xi\to\infty$. Имеем

$$j_\nu^2(b\xi)\,\xi^{2\nu+1}=\cos^2(b\xi)\sum_{j=0}^{N}c_j'\,\xi^{-2j}+\sin(2b\xi)\sum_{j=0}^{\infty}c_j''\,\xi^{-2j-1}+$$

$$+\sin^2(b\xi)\sum_{j=0}^{N}c_j'''\,\xi^{-2j-2}+\tau_N(\xi), \tag{9}$$

где остаток $\tau_N(\xi)$ допускает при $|\xi|>1$ оценку вида

$$|\tau_N(\xi)|\leqslant const\ \xi^{-2N-1}.$$

Отсюда следует, что

$$-\lambda f_b^1(\lambda)=\int_1^\infty \xi^{\lambda}\,j_\nu^2(b\xi)\,\xi^{2\nu+1}\,d\xi=\sum_{j=0}^{N}c_j'\int_1^\infty \xi^{\lambda-2j}\cos^2(b\xi)\,d\xi+$$

$$+\sum_{j=0}^{N}c_j''\int_1^\infty \sin(2b\xi)\,\xi^{\lambda-2j-1}\,d\xi+\sum_{j=0}^{N}c_j'''\int_1^\infty \sin^2(b\xi)\,\xi^{\lambda-2j-2}\,d\xi+$$

$$+\int_1^\infty \xi^{\lambda}\,\tau_N(\xi)\,d\xi=v_1+v_2+v_3+\rho_N(\lambda).$$

Далее имеем

$$\int_1^\infty \eta^{\lambda-2j}\cos^2(b\eta)d\eta = \frac{1}{2}\int_1^\infty \eta^{\lambda-2j}d\eta + \frac{1}{2}\int_1^\infty \eta^{\lambda-2j}\cos(2b\eta)d\eta =$$

$$= \frac{1}{2(\lambda-2j+1)} + \tilde{\sigma}_1(\lambda).$$

Отсюда и из формулы

$$\int_1^\infty \eta^{\lambda-2j}\cos(2b\eta)d\eta = \frac{\sin(2b)}{2b} - \int_1^\infty (\lambda-2j)\eta^{\lambda-2j-1}\sin(2b\eta)d\eta = \dots,$$

показывающих, что $\tilde{\sigma}_1(\lambda)$- целая функция, заключаем, что функция $\sigma_1(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение на всю плоскость, за исключением точек $\lambda=2j-1$, которые будут простыми полюсами.

Функция $\sigma_2(\lambda)$ целая. Чтобы в этом убедиться, достаточно, как и в предыдущей формуле, проинтегрировать по частям. Случай функции σ_3 сводится к σ_1 в силу формулы $\sin^2=1-\cos^2$. Наконец, функция $\rho_N(\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda<2N+1$.

Стало быть, имеет место формула

$$-f_b'(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_1^\infty \eta^\lambda j_\nu^2(b\eta)\eta^{2\nu+1}d\eta = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^N \frac{c_j}{\lambda-2j+1} + \tilde{\tau}_N(\lambda)\right],$$

где $\tilde{\tau}_N(\lambda)$ может быть аналитически продолжена в полуплоскость $\mathrm{Re}\,\lambda<2N$.

Окончательно имеем

$$f_b(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 j_\nu^2(b\tau)\tau^{2\nu+1}d\tau - \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^N \frac{c_j}{\lambda-2j+1} + \tilde{\tau}_N(\lambda)\right].$$

Для доказательства второй части теоремы нужно исследовать функцию

$$f(\lambda) = \int_{|\xi|=1} h_j(x,\xi,\lambda)d\xi \int_1^\infty j_\nu^2(y\eta\tau)\eta^{2\nu+1}\tau^{2\nu+1+\lambda}d\tau$$

при $y>0$. Разобьем внешний интеграл на два:

$$\int_{|\xi|=1} = \int_{\substack{|\xi|=1\\|\eta|>\frac{1}{2}}} + \int_{\substack{|\xi|=1\\|\eta|<\frac{1}{2}}}.$$

Соответственно этому разбиению получаем $f=f_1+f_2$. Для изучения f_1 непосредственно применяется асимптотическое разложение (9) . Следовательно, функция $f_1(\lambda)$ имеет простые полюса в точках $\lambda=0,\ \lambda=2j-1\ (j=0,1,\dots)$.

Для нахождения полюсов функции f_2 произведем замену переменных по формуле $\xi'=\zeta'\sqrt{1-\eta^2}$, при которой часть сферы $|\xi|=1$, $|\eta|<\frac{1}{2}$ преобразуется в часть цилиндрической поверхности $|\eta|<\frac{1}{2}$, $|\zeta'|=1$. Якобиан этого преобразования $\mathcal{J}(\zeta',\eta)$ принадлежит классу $C^{\infty}_{чет}$. Следовательно,

$$f_2(\lambda)=\int_{-1/2}^{1/2} d\eta \int_{|\zeta'|=1} h_j(x,\zeta'\sqrt{1-\eta^2},\eta,\lambda)\,\mathcal{J}(\zeta',\eta)\,dS \int_1^{\infty} j_\nu^2(y\eta\tau)(\eta\tau)^{2\nu+1}\tau^{\lambda}d\tau.$$

Разлагая функцию h_j в новых переменных по формуле Тейлора, находим

$$\tilde{h}_j(x,\eta,\lambda) \overset{def}{=} \int_{|\zeta'|=1} h_j(x,\zeta'\sqrt{1-\eta^2},\eta,\lambda)\,\mathcal{J}(\zeta',\eta)\,dS =$$

$$=\tilde{h}_j^{(1)}(x,\lambda)+\tilde{h}_j^{(2)}(x,\lambda)\eta^2+\dots+\tilde{h}_j^{(N)}(x,\lambda)\eta^{2N-2}+R_N(x,\eta,\lambda),$$

причем в правой части функции $\tilde{h}_j^{(k)}$, R_N аналитичны по λ на всей плоскости и $|R_N|<const|\eta|^{2N-1}$. Объединяя последние формулы, получаем

$$f_2(\lambda)=2\sum_{k=0}^{N}\tilde{h}_j^{(k)}(x,\lambda)\int_0^{1/2}\eta^{2k}\int_1^{\infty} j_\nu^2(y\eta\tau)(\eta\tau)^{2\nu+1}\tau^{\lambda}d\tau+\tilde{R}_N.$$

Поступая в дальнейшем так же, как и при изучении функции $f_\ell(\lambda)$, получаем, что функция $f_2(\lambda)$ имеет простые полюса в точках $\lambda=-1,0,1,2,\dots$

Теорема полностью доказана.

Замечание. Если мы находимся на множестве, где сосредоточены особенности, то, как следует из теоремы, распределение полюсов ядра дробной степени зависит от вида особенности (постоянной $2\nu+1$), если же сдвинуться с этого множества, то оператор A превращается в регулярный эллиптический оператор, и наши результаты совпадают с классическими результатами Р.Сили и других авторов.

2.3. Ядро оператора A^0

Так как ядро оператора A^0 играет важную роль при вычислении индекса эллиптических сингулярных операторов, то изучим его более подробно. По лемме 5, функция $Q_s(x,z)-A_s(x,z)$, где $Q_s(x,z)$ - ядро оператора $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\wedge}\lambda^s Q(\lambda)d\lambda$, есть голоморфное отображение полуплоскости $Re\, s<1$ в пространство непрерывных функций, если параметрикс Q достаточно большого порядка N. Далее, при $y=0$ ядро $Q_s(x,x)$ имеет вид

$$Q_s(x,x) = c_{n,\nu}\sum_{j=0}^{N}\int_{R^{n+1}} h_{-m-j}(x,\xi,s)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi .$$

Теперь при $j>0$ по формуле (3) п.2.1 имеем

$$\int_{R^{n+1}} h_{-m-j}(x,\xi,s)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi = \sum_{k=1}^{2j}\frac{(-1)^k}{k!}s(s-1)\dots(s-k+1)\times$$

$$\times\int_{R^{n+1}}\chi_{kj}(x,\xi)\left[a_m(x,\xi)\right]^{s-k}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi .$$

Устремляя s к 0, получаем

$$\int_{R^{n+1}} h_{-m-j}(x,\xi,s)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi = m^{-1}\int_{|\xi'|=1}\sum_{k=1}^{n+2\nu+2}k^{-1}\chi_{k,n+2\nu+2}a_m^{-k}d\xi' \tag{10}$$

для целых $2\nu+1$. Если же $2\nu+1$ дробное, то правая часть в (10) равна 0.

Рассмотрим теперь случай $j=0$. Имеем

$$\int_{R^{n+1}} h_{-m}(x,\xi,s)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi = \int_{R^{n+1}}\left[a_m(x,\xi)\right]^{s}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[s\to 0]{}\ \frac{1}{2}\int_{|\xi|\le 1}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi - \frac{1}{2(n+2\nu+2)}\int_{|\xi|=1}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi = 0.$$

Используя формулу (5) п.2.2 легко показать, что $Q_0(x,z)=0$, а также и $\mathcal{A}_0(x,z)=0$ при $x\neq z$.

Итак, доказана

Теорема 7. *Функция* $\mathcal{A}_0(x,x)$ *при* $y=0$ *имеет вид*

$$c_{n,\nu}^{-1}\mathcal{A}_0(x,x) =$$

$$=\begin{cases} m^{-1}\displaystyle\int_{R^{n+1}}\sum_{k=1}^{2(n+2\nu+2)}k^{-1}\chi_{k,n+2\nu+2}\left[a_m(x,\xi)\right]^{-k}(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi, & \text{если } 2\nu+1 \text{ целое},\\ 0, & \text{если } 2\nu+1 \text{ дробное.}\end{cases}$$

§3. Алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов

Из результатов работ [1,2] следует, что одномерные с.п.д.о. образуют алгебру. Примененный там метод операторов преобразования не удается распространить на многомерные с.п.д.о. в пределах классических п.д.о., однако некоторые результаты, в том числе и сами новые операторы преобразования, могут быть использованы и в многомерном случае.

Дадим несколько иное определение с.п.д.о., чем рассмотренное в работах [1, 2]. Пусть функция $a_m(x,\xi)$ является символом. Тогда оператор $a_m(x,D',B)$, определяемый по формуле

$$F_B\left[a_m(x,D',B)u\right](\xi)=\int_{R^{n+1}} e^{-i(x',\xi')}\left[j_\nu(y\eta)+i\eta j_{\nu+1}(y\eta)\right]a_m(x,\xi)u(x)(y^2)^{\nu+1/2}dx, \tag{1}$$

назовем *канонический* с.п.д.о. Асимптотические ряды (в смысле пространства $H_\nu^s(R^{n+1})$) таких операторов будем называть с.п.д.о. Имеет место

Теорема 8. *Пусть функция $a_m(x,\xi)$ является символом и $a_m|_{y=0}=0$. Тогда оператор $a_m(x,D',B)$ порядка m, определяемый по формуле (1), является п.д.о. в смысле Кона-Ниренберга [3].*

Доказательство опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 7 (см. [2]). *Пусть $\nu+m<\frac{1}{2}$, $\nu>-\frac{1}{2}$. Тогда имеет место формула*

$$FF_B^{-1}\left[e^{-i(\xi',x')}j_\nu(y\eta)a_m(x,\xi)\right]=e^{-i(\xi',x')}S_\nu\left[j_\nu(y\eta)a_m(x,\xi)\right], \tag{2}$$

где F обозначает $(n+1)$-мерное преобразование Фурье и оператор преобразования S_ν определяется по формуле

$$S_\nu v(x,\xi)=\frac{2}{\Gamma(\nu+1)}\int_\eta^\infty(t^2-\eta^2)^{\nu-1/2}t\,v(x,\xi',t\eta)\,dt. \tag{3}$$

Лемма 8. *Пусть $m<0$ и $|\nu|<\frac{1}{2}$. Тогда имеет место равенство*

$$S_\nu\left[j_\nu(y\eta)a_m(x,\xi)\right]=$$

$$=\frac{2}{\Gamma(\nu+1)}(y^2)^{-\nu}\int_\eta^\infty \sin(yt)\int_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\cos^{-2\nu}\theta\,a_m\left(x,\xi',\sqrt{\eta^2\cos^2\theta+t^2\sin^2\theta}\right)d\theta\,dt. \tag{4}$$

Для остальных $\nu>-\frac{1}{2}$ формула (4) определяется путем аналитического продолжения по параметру ν.

Справедливость формулы (4) легко следует из формулы (3) и интегрального представления Мелера-Сонина [12] для бесселевых функций.

Доказательство теоремы 8. Не ограничивая общности, можно считать, что $m+\nu<\frac{1}{2}$, так как общий случай сводится к этому путем использования потенциалов Рисса, построенных по оператору Фурье-Бесселя. Далее, пусть, например, символ $a_m(x,\xi)$ удовлетворяет условию (i) из §1. Тогда из формул (1) и (2) получаем

$$F\left[a_m(x,D',B)u\right] = \int\limits_{R^{n+1}} e^{-i(x',\xi')} \delta_\nu \left[j_\nu(y\eta) a_m(x,\xi)\right] u(x)(y^2)^{\nu+1/2} dx,$$

откуда с учетом (4) получаем

$$F\left[a_m(x,D',B)u\right] = \int\limits_{R^{n+1}} e^{-i(x',\xi')} u(x) \int\limits_{\eta}^{\infty} y \operatorname{Sin}(yt) \times$$
$$\times \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^{2\nu}\theta \operatorname{Cos}^{-2\nu}\theta\, a_m\left(x,\xi',\sqrt{\eta^2\operatorname{Cos}^2\theta + t^2\operatorname{Sin}^2\theta}\right) d\theta\, dt\, dx. \tag{5}$$

Положим

$$a_{m,0}(x,\xi) = a_m(x,\xi),$$
$$a_{m,k}(x,\xi) = (-i)^k y^{-k} \frac{d^k}{dt^k} \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^{2\nu}\theta \operatorname{Cos}^{-2\nu}\theta \times$$
$$\times a_m\left(x,\xi',\sqrt{\eta^2\operatorname{Cos}^2\theta + t^2\operatorname{Sin}^2\theta}\right) d\theta \Big|_{t=\eta}, \quad k=1,2,\ldots \tag{6}$$

С помощью интегрирования по частям в соотношении (5) мы приходим к формуле

$$F\left[a_m(x,D',B)u\right] = \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{R^{n+1}} e^{-i(x,\xi)} a_{m,k}(x,\xi)\, u(x)\, dx + R_N u. \tag{7}$$

Функции $a_{m,k}(x,\xi)$ при $|\xi|>1$ являются однородными степени $m-k$ по второй группе переменных и бесконечно дифференцируемыми и финитными - по первой. Остаточный оператор R_N - интегральный оператор с ядром $r_N(x,\xi)$, которое определяется по формуле

$$r_N(x,\xi) = const\, y^{-N} e^{-i(\xi',x')} \int\limits_{\eta}^{\infty} e^{iyt} \frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}} \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{Sin}^{2\nu}\theta \times$$
$$\times \operatorname{Cos}^{-2\nu}\theta\, a_m\left(x,\xi',\sqrt{\eta^2\operatorname{Cos}^2\theta + t^2\operatorname{Sin}^2\theta}\right) d\theta\, dt. \tag{8}$$

Из свойств функции a_m и формулы (8) получаем для любого $p>0$ следующую оценку ядра r_N:

$$|r_N(x,\xi)| \leq const\,(1+|x|)^{-p} \int\limits_{\eta}^{\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Sin}^{N+2\nu}\theta \operatorname{Cos}^{-2\nu}\theta\, d\theta\, dt}{(1+|\xi'|^2+\eta^2\operatorname{Cos}^2\theta + t^2\operatorname{Sin}^2\theta)^{\frac{N-m}{2}}} \leq$$
$$\leq const\,(1+|x|)^{-p}(1+|\xi|)^{m-N+1}.$$

Применяя теперь схему рассуждений из [1], получаем, что $\operatorname{ord} R_N = m-N+1$ в соболевской шкале H^s.

Тем самым теорема для $|\nu|<\frac{1}{2}$ доказана. Более того, явно (см.(6),(7)) указан символ п.д.о. (1) в смысле Кона-Ниренберга. Для остальных $\nu>-\frac{1}{2}$ справедливость теоремы получается аналитическим продолжением функции (6) по параметру ν. Случай, когда символ a_m удовлетворяет условию (ii) из §1, рассматривается почти аналогично, только нужно учесть рекуррентное соотношение $j_{\nu+1}(t)=c_\nu \frac{d}{t\,dt} j_\nu(t)$ и внести соответствующее изменение в формулу (4). Теорема 8 полностью доказана.

Замечание. Можно доказать обратное утверждение, а именно: если п.д.о. удовлетворяют условиям (i) или (ii) из §1, то его можно разложить в асимптотическую сумму с.п.д.о. вида (1).

Переходом к сопряженным операторам доказывается следующая

Теорема 9. *Пусть функция $a_m(x,\xi)$ является символом и $a_m|_{y=0}=0$, тогда с.п.д.о. $Op(a_m)$ допускает представление вида $(y^2)^{-\nu-1/2}A(y^2)^{\nu+1/2}$, где A - п.д.о. Кона-Ниренберга.*

Замечание. Имеет место и обратное утверждение: если символ п.д.о. A удовлетворяет условию теоремы 9, то оператор $(y^2)^{-\nu-1/2}A(y^2)^{\nu+1/2}$ можно разложить в асимптотическую сумму с.п.д.о. вида (5) из §1.

Теорема 10. *Пусть функции $a_m(x,\xi)$ и $b_\ell(x,\xi)$ являются символами. Тогда произведение с.п.д.о. $Op(a_m)Op(b_\ell)$ будет асимптотической суммой операторов вида (5) из §1.*

Последняя теорема означает, что с.п.д.о. образуют алгебру. Учитывая вышесказанное, при доказательстве теоремы достаточно рассмотреть лишь случай, когда символ $a_m(x,\xi)\equiv a_m(\xi)$, т.е. когда символ не зависит от x. Введем оператор обобщенного сдвига по формуле

$$T_x^\xi f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi f\left(x'-\xi', \sqrt{y^2+\eta^2-2y\eta\cos\theta}\right)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta.$$

С помощью этого сдвига оператор $Op(a_m)Op(b_\ell)$ в случае, когда, например, b_ℓ удовлетворяет условию (i), допускает представление

$$Op(a_m)Op(b_\ell)u(x)=c_{n,\nu}^2\int_{R^{n+1}} j_\nu(yz)e^{i(x',\zeta')}a_m(\zeta)(z^2)^{\nu+1/2}\int_{R^{n+1}} T_\zeta^\xi \hat{b}_\ell(\zeta,\xi)F_B u(\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}d\xi d\zeta,$$

где $\zeta=(\zeta',z)=(\zeta_1,\dots,\zeta_n,z)\in R^{n+1}$ и $\hat{b}_\ell$-преобразование Фурье-Бесселя функции $b_\ell(x,\xi)$ по первой переменной. Из формальной самосопряженности оператора обобщенного сдвига в весовом пространстве и теоремы Фубини имеем

$$Op(a_m)Op(b_\ell)u=c_{n,\nu}^2\int_{R^{n+1}}\int_{R^{n+1}} T_\zeta^\xi\left[j_\nu(yz)e^{i(x',\zeta')}a_m(\zeta)\right]\hat{b}_\ell(\zeta,\xi)\times$$

$$\times F_B u(\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}(z^2)^{\nu+1/2} d\xi d\zeta.$$

Используя в предыдущей формуле следующий вариант формулы Тейлора:

$$a(\zeta)=\sum_{|\alpha|\le N}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|}a_m(\xi)}{\partial\xi'^{\alpha'}(2\eta\partial\eta)^{\alpha_{n+1}}}(\zeta'-\xi')^{\alpha'}(z^2-\eta^2)^{\alpha_{n+1}}+r_N(\zeta,\xi),$$

где мультииндекс $\alpha=(\alpha',\alpha_{n+1})=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_{n+1}$, получаем

$$Op(a_m)Op(b_\ell)u=c^2_{n,\nu}\sum_{|\alpha|\le N}\int_{R^{n+1}}\int_{R^{n+1}}T^\xi_\zeta\left[j_\nu(yz)e^{i(x',\zeta')}(\zeta'-\xi')^{\alpha'}(z^2-\eta^2)^{\alpha_{n+1}}\right]\times$$

$$\times\hat{b}_\ell(\zeta,\xi)\frac{\partial^{|\alpha|}a_m(\xi)}{\partial\xi'^{\alpha'}(2\eta\partial\eta)^{\alpha_{n+1}}}F_B u(\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}(z^2)^{\nu+1/2}d\xi d\zeta+R_N u=$$

$$=c^2_{n,\nu}\sum_{|\alpha|\le N}\int_{R^{n+1}}\int_{R^{n+1}}T^\xi_\zeta\left[\left(\frac{\partial}{i\partial x_1}-\xi_1\right)^{\alpha_1}\dots\left(\frac{\partial}{i\partial x_n}-\xi_n\right)^{\alpha_n}(-B_y-\eta^2)^{\alpha_{n+1}}j_\nu(yz)e^{i(x',\zeta')}\right]\times$$

$$\times\hat{b}_\ell(\zeta,\xi)\frac{\partial^{|\alpha|}a_m(\xi)}{\partial\xi'^{\alpha'}(2\eta\partial\eta)^{\alpha_{n+1}}}F_B u(\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}(z^2)^{\nu+1/2}d\xi d\zeta+R_N u=$$

$$=c_{n,\nu}\sum_{|\alpha|\le N}\int_{R^{n+1}}F_B u(\xi)(\eta^2)^{\nu+1/2}\frac{\partial^{|\alpha|}a_m(\xi)}{\partial\xi'^{\alpha'}(2\eta\partial\eta)^{\alpha_{n+1}}}\left(\frac{\partial}{i\partial x_1}-\xi_1\right)^{\alpha_1}\dots\left(\frac{\partial}{i\partial x_n}-\xi_n\right)^{\alpha_n}\times$$

$$\times(-B_y-\eta^2)^{\alpha_{n+1}}\left[e^{i(x',\xi')}j_\nu(y\eta)b_\ell(x,\xi)\right]d\xi+R_N u.$$

Применяя формулу Лейбница и замечая, что $\operatorname{ord}R_N\le m+\ell-N-1$, мы убеждаемся в справедливости теоремы.

Литература

1. Киприянов И.А., Катрахов В.В. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов.- Мат.сб., 1977, т.104, №1, с.49-68.
2. Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдодифференциальные операторы.-Сиб.мат. журн., т.20, №1, с.86-97.
3. Кон Дж., Ниренберг Л. Алгебра псевдодифференциальных операторов.- В сб.: Псевдодифференциальные операторы, Мир, 1967, с.9-62.
4. Киприянов И.А. Преобразования Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов.- Труды Мат.ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, 1967, т.89, с.130-213.

5. Seeley R.T. Complex Powers of an Elliptic Operator.- A.M.S., Proc. Symp.Pure Math., Chicago, 1966, p.288-307. Русский перевод: Математика, 1968, т.12, №1, с.96-112.

6. Алимов Ш.А. Дис. на соиск. учен. степ. д.физ.-мат.наук.- Москва, 1973.

7. Киприянов И.А. Асимптотическое распределение собственных значений и собственных функций одного класса сингулярных эллиптических операторов.- Труды Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, 1972, т.117.

8. Катрахов В.В. Об асимптотических свойствах спектральной функции сингулярных дифференциальных операторов.- Докл. АН СССР, 1974, т.214, № 2, с.272-275.

9. Катрахов В.В. Спектральная функция сингулярных дифференциальных операторов.- Дифференц.уравнения,1976, т.12, №7,с.1256-1266; Дифференц. уравнения, 1976, т.12, №9, с.1605-1618.

10. Киприянов И.А. Краевые задачи для сингулярных эллиптических операторов в частных производных.- Докл. АН СССР, 1970, т.195, №1, с.32-35.

11. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. Об одном классе псевдодифференциальных операторов.- Докл. АН СССР, 1974, т. 218, №2, с.278-280.

12. Ватсон Г.И. Теория бесселевых функций.- ИЛ, 1949, т.1,-798 с.

13. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория.- ИЛ., 1962,-895 с.